The Quantum Theory of Fields Volume II Modern Applications

Steven Weinberg(著) University of Texas at Austin

张驰(译)*

*此版仅为译稿,未经校对,如有任何翻译录入错误,请联系zhangchi_110@163.com

| | 记 号・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | iii |
|------|---|-----|
| 15 | 非阿贝尔规范理论・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 1 |
| 15.1 | 规范不变性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 1 |
| 15.2 | 规范理论拉格朗日量与单Lie群···································· | 5 |
| 15.3 | 场方程与守恒律 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 8 |
| 15.4 | 量子化・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 10 |
| 15.5 | De Witt-Faddeev-Popov方法 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 13 |
| 15.6 | 鬼 | 18 |
| 15.7 | BRST对称性····· | 20 |
| 15.8 | BRST对称性的推广····· | 27 |
| 15.9 | Batalin-Vilkovisky形式理论 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 30 |
| А | 关于Lie代数的一个定理 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 37 |
| В | Cartan目录····· | 39 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 43 |
| 16 | 外场方法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 47 |
| 16.1 | 量子有效作用量 •••••• | 47 |
| 16.2 | 有效作用量的计算 ••••••••••••••• | 51 |
| 16.3 | 能量诠释・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 53 |
| 16.4 | 有效作用量的对称性。 | 55 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 58 |
| 17 | 规范理论的重整化・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 59 |
| 17.1 | Zinn-Justin方程・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 59 |
| 17.2 | 重整化: 直接分析 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 60 |
| 17.3 | 重整化: 一般规范理论 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 66 |
| 17.4 | 背景场规范::::::::::::::::::::::::: | 69 |

| 17.5 | 背景场规范下的单圈计算 • • • • • • • • • • • • • • • • • • • |
|-------|--|
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 80 |
| 18 | 重整化群方法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 83 |
| 18.1 | 大对数来自何处? |
| 18.2 | 滑动标度・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 88 |
| 18.3 | 各种渐进行为 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 96 |
| 18.4 | 多耦合与质量效应 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 102 |
| 18.5 | 临界现象・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 106 |
| 18.6 | 最小减除・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 108 |
| 18.7 | 量子色动力学 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 111 |
| 18.8 | 改良微扰论・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 114 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 115 |
| 19 | 自发破缺的整体对称性・・・・・・・・・・・・・・・119 |
| 19.1 | 简并真空・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 119 |
| 19.2 | Goldstone玻色子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| 19.3 | 自发破缺的近似对称性 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| 19.4 | 作为Goldstone玻色子的π介子 ···································· |
| 19.5 | 有效场论: π介子和核子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| 19.6 | 有效场论: 一般对称性的破缺・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 153 |
| 19.7 | 有效场论: $SU(3) \times SU(3)$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| 19.8 | 有效场论中的反常项 |
| 19.9 | 未破缺的对称性 |
| 19.10 | U(1)问题···································· |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 178 |
| 20 | 算符积展开・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・183 |
| 20.1 | 展开: 描述与推导・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 183 |
| 20.2 | 动量流・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 185 |
| 20.3 | 系数函数的重整化群方程 190 |
| 20.4 | 系数函数的对称性 • • • • • • • • • • • • • • • • • • • |
| 20.5 | 谱函数求和规则 • • • • • • • • • • • • • • • • • • • |

目 录

| 20.6 | 深度非弾散射 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 197 |
|------|--|-----|
| 20.7 | 重整化子・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 204 |
| | 动量流: 一般情况・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 208 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 211 |
| 21 | 自发破缺的规范对称性 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 213 |
| 21.1 | 幺正规范 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2 | 213 |
| 21.2 | 可重整ξ-规范・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 217 |
| 21.3 | 电弱理论・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 220 |
| 21.4 | 定域对称性的动力学破缺 •••••••••••• | 229 |
| 21.5 | 电弱作用—强作用的统一理论 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 236 |
| 21.6 | 超导・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 239 |
| | 一般幺正规范 ••••••••••••••••••••• | 253 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 255 |
| 22 | 反常 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 259 |
| 22.1 | π^0 衰变问题···································· | 259 |
| 22.2 | 测度的变换: 阿贝尔反常 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 261 |
| 22.3 | 反常的直接计算: 一般情况 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 267 |
| 22.4 | 无反常的规范理论 ••••••••••••••• | 277 |
| 22.5 | 无质量束缚态 •••••• | 280 |
| 22.6 | 相容性条件・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 | 284 |
| 22.7 | 反常与Goldstone玻色子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 293 |
| | 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 300 |
| 23 | 扩展场构形・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 303 |
| 23.1 | 拓扑的使用 | 303 |
| 23.2 | - 同伦群・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ | 308 |
| 23.3 | | 312 |
| 23.4 | Cartan-Maurer积分不变量 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 319 |
| 23.5 | - <mark>瞬子・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・</mark> 3 | 322 |
| 23.6 | θ 角 · · · · · · · · · · · · · · · · · · | 326 |
| 23.7 | 扩展场构形附近的量子涨落 ••••••••••• | 330 |

| 23.8 | 真空衰变・・・・ | • | • | | • | | • | • | • | • | • | • | • | • | • | | • | • | • | • | • | | 332 |
|------|----------|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|-----|
| А | 欧几里得路径积分 | • | • | | | | | • | | • | | | • | | • | | • | • | • | • | • | • | 335 |
| В | 同伦群表・・・・ | | • | | • | | | • | • | • | • | | • | • | • | | • | • | • | • | • | • | 338 |
| | 参考文献・・・・ | | • | • | • | | | | | | • | | | | | | | • | | | • | | 340 |

记号

拉丁指标i, j, k等一般取遍三维空间坐标指标,通常取做1, 2, 3. 在有特殊说明的情况下,它们 取遍值1, 2, 3, 4,其中 $x^4 = it$.

希腊指标µ, ν等, 从希腊字母表的中间开始, 一般取遍四维时空坐标指标1, 2, 3, 0, 其中x⁰是时间坐标.

希腊指标α, β等, 从希腊字母表的开头开始, 一般取遍对称性代数的生成元.

重复指标一般表示求和,除非另有说明.

时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角的,其元素为 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1.$

达朗贝尔算符定义为 $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^{\mu}\partial x^{\nu} = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$,其中 ∇^2 是拉普拉斯算符 $\partial^2/\partial x^i\partial x^i$.

列维-奇维塔张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 定义为全反对称量,并有 $\epsilon^{0123} = +1$.

空间三矢由黑体字母标记.

任意矢量上的"帽子"代表相应的单位矢量:因此 $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ 。

任意量上加点代表该量对时间的导数.

狄拉克矩阵 γ_{μ} 的定义满足 $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2\eta_{\mu\nu}$.并且 $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\beta = i\gamma^0$.

阶跃函数 $\theta(s)$: 当s > 0时为1, s < 0时为0.

矩阵或矢量A的复共轭、转置、厄米共轭分别记为 A^* 、 A^T 以及 $A^{\dagger} = A^{*T}$. 算符O的厄米共轭 记为 O^{\dagger} ,除了强调一个算符的矩阵或矢量是非转置的才用星号. 在方程末尾的+H.c.或c.c.表示前 面几项的厄米共轭或复共轭. 狄拉克旋量u上加横线定义为 $\bar{u} = u^{\dagger}\beta$. 场 χ 在Batalin-Vilkovisky体 系中的反场记为 χ^{\dagger} 而不是 χ^* ,这是为了与普通的复共轭或反粒子场相区分.

使用的单位制通常取ħ和c为1. 自始至终-e是电子的有理化电荷,使得精细结构常数

 $\exists \alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137.$

引用数据末尾括号中的数字给出了引用数据末尾数字的不确定度,在没有额外指明的情况下,实验数据取自'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).

第15章 非阿贝尔规范理论

已经成功证明了, 描述真实世界的量子场论都是非阿贝尔规范理论, 这些理论所基于的规 范不变性原理要比量子电动力学的U(1)规范不变性更加普遍. 我们在8.1节的末尾概述了规范 场的存在以及它的一些性质, 源于它们在定域变换下的不变性原理, 而这些理论与电动力学共 享了这一迷人的特征. 在电动力学中, 电荷为 e_n 的场 $\psi_n(x)$ 经历了 $\Lambda(x)$ 任意的规范变换 $\psi_n(x) \rightarrow$ $\exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$. 由于 $\partial_\mu\psi_n(x)$ 并非像 $\psi_n(x)$ 那样变换, 我们必须要引入场 $A_\mu(x)$, 这个场有规范 变换性质 $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, 我们用它来构建规范协变导数 $\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$, 这 个协变导数像 $\psi_n(x)$ 那样变换, 因而可以用它和 $\psi_n(x)$ 构建规范不变拉格朗日量. 以类似的方法, 广 义相对论中的引力场 $g_{\mu\nu}(x)$, 它的存在以及一些性质源于广义坐标变换下的一个对称性原理.* 给 定这些不同的先例后, 很自然地应该将定域规范不变性拓广至定域非阿贝尔规范变换下的不变性.

在杨振宁和Mills1954年的原始工作中,^[1] 非阿贝尔规范群被取成了同位旋旋转的SU(2)群, 而 类似于光子场的矢量场则解释成相互作用很强的单位同位旋矢量介子的场.这一设想立刻就遇到 了障碍, 即这些矢量玻色子的质量必须为零, 就像光子一样, 而任何这样的粒子似乎应该早就被探 测到了.另一问题是, 像当时所有的强相互作用理论一样, 没有什么方法可以处理它; 理论过大的 耦合常数似乎阻止了使用任何的微扰论.

规范理论不久就被推广至任意的非阿贝尔规范群,^[2]并且继续在数学上研究它们的量子化,尤 其是Feynman,^[3]Faddeev和Popov,^[4]以及De Wittt,^[5]部分的出发点是作为更难的量子化广义相 对论问题的热身练习.他们证明了通过简单地观察拉格朗日量所获得朴素Feynman规则需要被额 外的"鬼"圈补足.然而,直到20世纪60年代后期,这些理论的物理相关性才开始得以理解.最后发 现,所有可观测的基本粒子相互作用都是由定域规范对称性所附带的矢量粒子生成的;相应的自 旋1粒子要么非常重,这是规范对称性自发破缺的结果,要么被"困住"了,这是耦合常数在大尺度 上升高后的结果.这些事情将分别是第21章和第18章的课题.在本章,我们将探索非阿贝尔规范理 论的公式化表述,并研究如何推导出它们的Feynman规则.

15.1 规范不变性

我们假定我们理论的拉格朗日量在物质场 $\psi_{\ell}(x)$ 的一组无限小变换

$$\delta\psi_{\ell}(x) = \mathrm{i}\,\epsilon^{\alpha}(x)(t_{\alpha})_{\ell}{}^{m}\psi_{m}(x) \tag{15.1.1}$$

下不变,其中 t_{α} 为某组独立的常数矩阵^{**},并且无限小参量 $\epsilon^{\alpha}(x)$ 为实,允许该参量(像电动力学

^{*}当然, 定域规范不变性与广义协变性都可以以一种平庸的方式实现, 即把 $A_{\mu}(x)$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$ 分别取为用来表征相位选择和坐标系选择的非动力学c-数函数. 当我们将 $A_{\mu}(x)$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$ 处理成在计算*S*-矩阵元时要积掉的动力学场时, 这些对称性在物理上变得重要.

^{**}在本书中,我们一般将用字母α, β等来标记对称性生成元,这些字母取自希腊字母表的开头,以便与取自希腊字母 的中间用来标记时空坐标的μ, ν等相区分.在后面,我们通常会用取自拉丁字母表开头的字母a, b等来标记破缺对称性 的生成元,而用取自拉丁字母表中间的字母*i*, *j*等来标记未破缺对称性的生成元.

中的规范变换那样)依赖于时空中的位置. 我们假定这些对称变换是一Lie群的无限小部分; 正如 在2.2节中所证明的, 这要求t_a服从对易关系

$$[t_{\alpha}, t_{\beta}] = i C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} t_{\gamma} , \qquad (15.1.2)$$

其中 $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 是一组实数,称为群的结构常数.对易子的反对称立刻就告诉我们,结构常数同样是反对称的:

$$C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \ . \tag{15.1.3}$$

另外,从Jacobi等式

$$0 = \left[[t_{\alpha}, t_{\beta}], t_{\gamma} \right] + \left[[t_{\gamma}, t_{\alpha}], t_{\beta} \right] + \left[[t_{\beta}, t_{\gamma}], t_{\alpha} \right]$$

$$= t_{\alpha} t_{\alpha} t_{\alpha} = t_{\alpha} t_{\alpha} t_{\alpha}$$

$$(15.1.4)$$

我们看到这些C满足进一步的约束

$$0 = C^{\delta}{}_{\alpha\beta}C^{\epsilon}{}_{\delta\gamma} + C^{\delta}{}_{\gamma\alpha}C^{\epsilon}{}_{\delta\beta} + C^{\delta}{}_{\beta\gamma}C^{\epsilon}{}_{\delta\alpha} .$$
(15.1.5)

任何一组满足方程(15.1.3)和(15.1.5)的常数 $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 至少定义了一组矩阵 t^{A}_{α} :

$$(t^{A}{}_{\alpha})^{\beta}{}_{\gamma} \equiv -i C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} , \qquad (15.1.6)$$

它们满足含有结构常数 $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的对易关系(15.1.2):

$$[t^{\mathcal{A}}{}_{\alpha}, t^{\mathcal{A}}{}_{\beta}] = \mathrm{i} C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} t^{\mathcal{A}}{}_{\gamma} . \qquad (15.1.7)$$

这称为结构常数为 $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 的Lie群的"伴随"(或"正则")表示.

例如,在原始的Yang-Mills理论中,物质场是由质子场 ψ_p 和中子 ψ_n 组成的二重态

$$\psi = \left(\begin{array}{c} \psi_p \\ \psi_n \end{array}\right)$$

而 t_{α} ,其中 $\alpha = 1, 2, 3$,是同位旋矩阵

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, $t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

它们满足

$$C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

的对易关系(15.1.2),其中,同往常一样,如果 $\gamma, \alpha, \beta \ge 1, 2, 3$ 的偶置换或奇置换,则 $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ 分别 是+1或-1,如果是其它情况,则 $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ 为零.我们发现这与3维旋转群的Lie代数(2.4.18)相同;这 里的矩阵构建了我们所公认的该Lie代数的自旋1/2表示.伴随表示的矩阵(15.1.6)在这里是(处在 行和列标记为1, 2, 3的基下):

$$t_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} , \quad t_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad t_3^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

这是旋转群Lie代数的自旋1表示.

我们现在来考察构建在变换(15.1.1)下不变的拉格朗日量需要什么.如果不存在作用在场上的导数项,这个任务将是非常简单的——物质场的任何函数,只要它在*ϵ*^α为常数的变换(15.1.1)下 是不变的,那么它在*ϵ*^α为时空坐标的任意实函数的变换(15.1.1)下也将是不变的.如果拉格朗日量 包含场的导数项(正如它所必须的),就不会是这种情况,这是因为有了位置相关函数*ϵ*^α(*x*).物质场 的导数就不会像场本身那样进行变换.对方程(15.1.1)取微分给出

$$\delta\left(\partial_{\mu}\psi_{\ell}(x)\right) = \mathrm{i}\,\epsilon^{\alpha}(x)(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\left(\partial_{\mu}\psi_{m}(x)\right) + \mathrm{i}\left(\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}(x)\right)(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\psi_{m}(x) \ . \tag{15.1.8}$$

为了使拉格朗日量不变,我们需要一个场 A^{α}_{μ} ,它的变换规则中包含一项 $\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}$,这一项可以用 来抵消方程(15.1.8)中的第二项.既然这个场携带一个 α 指标,我们希望它也经历一个类似方 程(15.1.1)的矩阵变换,只不过将 t_{α} 替换成伴随矩阵表示(15.1.6).因此,我们先试验性地取新"规 范"场的变换关系为

$$\delta A^{\beta}{}_{\mu} = \partial_{\mu} \epsilon^{\beta} + i \epsilon^{\alpha} (t^{A}{}_{\alpha})^{\beta}{}_{\gamma} A^{\gamma}{}_{\mu}$$

或者,利用方程(15.1.6),

$$\delta A^{\beta}{}_{\mu} = \partial_{\mu} \epsilon^{\beta} + C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} \epsilon^{\alpha} A^{\gamma}{}_{\mu} . \qquad (15.1.9)$$

这使得我们可以构建"协变导数":†

$$(D_{\mu}\psi(x))_{\ell} = \partial_{\mu}\psi_{\ell}(x) - i A^{\beta}{}_{\mu}(x)(t_{\beta})_{\ell}{}^{m}\psi_{m}(x) .$$
(15.1.10)

按计划, 方程(15.1.10)第二项中的 A^{β}_{μ} , 它的变换中的 $\partial_{\mu}\epsilon^{\beta}$ 项抵消了第一项变换中正比于 $\partial_{\mu}\epsilon^{\beta}$ 的那 一项, 给我们留下

$$\delta(D_{\mu}\psi)_{\ell} = \mathrm{i}\,\epsilon^{\alpha}\,(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\,\partial_{\mu}\psi_{m} - \mathrm{i}\,C^{\beta}_{\ \gamma\alpha}\,\epsilon^{\alpha}\,A^{\gamma}_{\ \mu}\,(t_{\beta})_{\ell}^{\ m}\,\psi_{m} + A^{\gamma}_{\ \mu}\,(t_{\gamma})_{\ell}^{\ m}\,(t_{\alpha})_{m}^{\ n}\,\psi_{n}$$

或者,使用方程(15.1.2)

$$\delta(D_{\mu}\psi)_{\ell} = \mathrm{i}\,\epsilon^{\alpha}\,(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\,(D_{\mu}\psi)_{m} , \qquad (15.1.11)$$

使得 $D_{\mu}\psi$ 像 ψ 本身那样变换.

我们也需要关心一下规范场的导数.为了消除 $\partial_{\nu}A^{\beta}_{\mu}$ 的变换中的 $\partial_{\nu}\partial_{\mu}\epsilon^{\beta}$ 项,就像在电动力学 中那样,我们对 μ 和 ν 做反对称化处理.然而,在 $\partial_{\nu}A^{\beta}_{\mu} - \partial_{\mu}A^{\beta}_{\nu}$ 的变换中,我们仍然有正比于 $\epsilon(x)$ 的 一阶导数的项,这些项产生于方程(15.1.9)中的第二项."协变旋度",即 $F^{\gamma}_{\nu\mu}$,在它的变换规则中所 有这样的 $\epsilon(x)$ 导数都互相抵消掉了,构建它的最简单方法就是考察作用在物质场 ψ 上的两个协变 导数的对易子:

$$\left([D_{\nu}, D_{\mu}]\psi\right)_{\ell} = -\mathrm{i} \left(t_{\gamma}\right)_{\ell}{}^{m} F^{\gamma}{}_{\nu\mu}\psi_{m} , \qquad (15.1.12)$$

其中

$$F^{\gamma}{}_{\nu\mu} \equiv \partial_{\nu}A^{\gamma}{}_{\mu} - \partial_{\mu}A^{\gamma}{}_{\nu} + C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}A^{\alpha}{}_{\nu}A^{\beta}{}_{\mu} .$$
(15.1.13)

方程(15.1.12)使得F^γ_{νμ}必须像伴随表示下的物质场那样进行变换这件事变得显然:

$$\delta F^{\beta}{}_{\nu\mu} \equiv i \epsilon^{\alpha} (t^{A}{}_{\alpha})^{\beta}{}_{\gamma} F^{\gamma}{}_{\nu\mu} = \epsilon^{\alpha} C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} F^{\gamma}{}_{\nu\mu} . \qquad (15.1.14)$$

[†]正如将要在下一节所讨论的,在写下方程(15.1.10)的同时,我们心照不宣地假定任何像电荷这样的耦合常数因子都被吸收进*t*₈中,因而也被吸收进结构常数中.

读者可以通过直接计算(利用关系(15.1.5))验证(15.1.13)中所定义的量 $F^{\alpha}_{\nu\mu}$ 确实有简单的变换规则(15.1.14).

由于某些原因,知道这些无限小规范变换可以被提升为有限的变换是有用的. 群元可以被一组实函数Λ^α(*x*)参数化,进而使得它以如下的矩阵变换作用在一个一般的物质场上

$$\psi_{\ell}(x) \to \psi_{\ell\Lambda}(x) = \left[\exp\left(\mathrm{i} t_{\alpha} \Lambda^{\alpha}(x)\right) \right]_{\ell}^{m} \psi_{m}(x) .$$
 (15.1.15)

我们希望协变导数以相同的方式进行变换:

$$(\partial_{\mu} - i t_{\alpha} A^{\alpha}{}_{\mu\Lambda})\psi_{\Lambda} = \exp(i t_{\alpha} \Lambda^{\alpha})(\partial_{\mu} - i t_{\alpha} A^{\alpha}{}_{\mu})\psi , \qquad (15.1.16)$$

所以我们必须给 A^{α}_{μ} 强加变换规则 $A^{\alpha}_{\mu} \rightarrow A^{\alpha}_{\mu\Lambda}$,使得

$$\partial_{\mu} \exp(\mathrm{i} t_{\beta} \Lambda^{\beta}) - \mathrm{i} t_{\beta} \exp(\mathrm{i} t_{\alpha} \Lambda^{\alpha}) A^{\beta}{}_{\mu}{}_{\Lambda} = -\mathrm{i} \exp(\mathrm{i} t_{\alpha} \Lambda^{\alpha}) t_{\beta} A^{\beta}{}_{\mu}$$

或者,以另一种形式

$$t_{\alpha}A^{\alpha}{}_{\mu\Lambda} = \exp(\mathrm{i}t_{\beta}\Lambda^{\beta})t_{\alpha}A^{\alpha}{}_{\mu}\exp(-\mathrm{i}t_{\beta}\Lambda^{\beta}) - \mathrm{i}\left[\partial_{\mu}\exp(\mathrm{i}t_{\beta}\Lambda^{\beta})\right]\exp(-\mathrm{i}t_{\beta}\Lambda^{\beta}) .$$
(15.1.17)

从方程(15.1.17)中,我们可以看到,通过对 $\Lambda^{\beta}(x)$ 的合适选择,总可以使 $A^{\alpha}_{\mu\Lambda}(x)$ 在任意一个点处为零,记该点x = z. (简单地令 $\Lambda^{\alpha}(z)$ 为零,并在x = z处令 $\partial\Lambda^{\alpha}(x)/\partial x^{\mu} = -A^{\alpha}_{\mu}(x)$.)另外,总可以对 $\Lambda^{\beta}(x)$ 进行选择,使得 $A^{\alpha}_{\mu\Lambda}(x)$ 的任意一个时空分量对于所有的 α 至少在任意一个给定点邻近的有限区域内处处为零.例如,为了使 $A^{\alpha}_{3\Lambda}(x)$ 为零,我们必须要解参量 $\Lambda^{\beta}(x)$ 的如下一阶常微分方程组:

$$\partial_3 \exp(\mathrm{i}t_\beta \Lambda^\beta) = -\mathrm{i} \exp(\mathrm{i}t_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha{}_3 , \qquad (15.1.18)$$

该方程组至少在任意一个给定点邻近的有限区域内有一个解.

然而, 一般而言, 不可能通过选择 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 使得 $A^{\alpha}_{\mu\Lambda}(x)$ 的4个分量在一个有限区域内都为零. 由于这个原因, 我们将不得不止步于偏微分方程组

$$\partial_{\mu} \exp(it_{\beta} \Lambda^{\beta}) = -i \exp(it_{\beta} \Lambda^{\beta}) t_{\alpha} A^{\alpha}{}_{\mu} , \qquad (15.1.19)$$

除非满足一定的可积性条件,否则这个方程组是解不出来的.特别地,如果 $A^{\alpha}_{\mu\Lambda}$ 处处为零,那 么 $F^{\alpha}_{\mu\nu\Lambda}$ 也将是如此,但是,由于场强的变换是齐次的,仅当 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 为零时, $F^{\alpha}_{\mu\nu\Lambda}$ 才能等于零.如 果存在一个规范变换使得 A^{α}_{μ} 处处为零,则称该规范场为"纯规范"场.不难证明, $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 处处为零 是 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$ 在任意单连通区域可作为纯规范场进行表述的充分必要条件.^[6]

* * *

在这里构造在规范变换下简单变换的客体,与在广义相对论中构造广义坐标变换下协变的客体,这两种构造之间存在着深刻的类比.正如我们使用规范场构造物质场的协变导数 $D_{\mu}\psi_{\ell}$,它有着与物质场本身相同的规范变换性质,我们使用仿射联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)$ 来构造张量 $T^{\rho\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots}$ 的协变导数:

$$T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots;\nu} \equiv \partial_{\nu}T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}T^{\lambda\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \cdots - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}T^{\rho\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots ,$$

其本身也是张量. 另外, 从规范场的导数中, 我们构造出了场强 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$, 它的变换性质与属于规范群 伴随表示的物质场的变换性质相同; 相应地, 从仿射联络的导数中, 我们可以构造一个量:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} \ ,$$

这个量作为一个张量变换,即Riemann-Christoffel曲率张量.两个规范协变导数 D_{μ} 和 D_{ν} ,它们的 对易子可以表示成场强张量 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 的形式;类似地,相对于 x^{ν} 和 x^{κ} 的两个协变导数,它们的对易子 也可以表示成曲率张量的形式:

$$T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\kappa}T^{\sigma\cdots}{}_{\mu\cdots} + \cdots - R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots$$

存在一个规范,使得该规范下的规范场在一个有限单连通区域内为零,该规范存在的充要条件 是场强张量为零,而存在一个坐标系使得仿射联络在一个有限单连通区域内为零的充要条件是, Riemann-Christoffel曲率张量为零.这个类比在一个重要方面上失效了:在广义相对论中,仿射联 络本身是用度规张量的一阶导数构建的,而在规范理论中,规范场无法表示成更基本的场.

15.2 规范理论拉格朗日量与单Lie群

规范场张量 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$,物质场 ψ 以及它们的规范协变导数,它们的变换规则不包含变换参量 $\epsilon^{\alpha}(x)$ 的导数,所以如果只用这些元素构建拉格朗日量,并且如果它在 ϵ^{α} 为常数的整体变换下不变,那么它在 $\epsilon^{\alpha}(x)$ 为一般的位置相关函数的规范变换就是不变的.因此,我们假定拉格朗日量满足这些条件:即,

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, D_{\mu}\psi, D_{\nu}D_{\mu}\psi, \cdots, F^{\alpha}{}_{\mu\nu}, D_{\rho}F^{\alpha}{}_{\mu\nu})$$
(15.2.1)

以及不变性条件:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{\ell}} i(t_{\alpha})_{\ell}^{m} \psi_{m} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_{\mu} \psi_{\ell})} i(t_{\alpha})_{\ell}^{m} (D_{\mu} \psi)_{m}
+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_{\nu} D_{\mu} \psi)_{\ell}} i(t_{\alpha})_{\ell}^{m} (D_{\nu} D_{\mu} \psi)_{m} + \dots + \frac{\partial \mathscr{L}}{F^{\beta}_{\mu\nu}} C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} F^{\gamma}{}_{\mu\nu}
+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial D_{\rho} F^{\beta}{}_{\mu\nu}} C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} D_{\rho} F^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \dots = 0.$$
(15.2.2)

另一方面,除了出现在 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 以及规范协变导数 D_{μ} 中的规范场,拉格朗日量可以不依赖于规范场本身.特别地,质量项 $-\frac{1}{2}m^{2}_{\alpha\beta}A_{\alpha\mu}A_{\beta}^{\mu}$ 被排除了.

我们现在将要集中考察拉格朗日量中只依赖于 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 的项. 如同电动力学中一样, 对于任何自旋为一的无质量粒子, 拉格朗日量必须要包含一个自由粒子项, 这一项是 $\partial_{\mu}A^{\alpha}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{\alpha}_{\mu}$ 的二次项, 而规范不变性则表明这一自由粒子项应该作为场强张量 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 的二次项的一部分出现. Lorentz不变性与流守恒表明它的形式为

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\alpha}{}_{\mu\nu} F^{\beta\mu\nu} \tag{15.2.3}$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 是常数矩阵. 如果我们不假定宇称(或者CP或T)守恒, 那么我们也可在拉格朗日量引入如下的项

$$\mathscr{L}'_{A} = -\frac{1}{2} \,\theta_{\alpha\beta} \,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\alpha}{}_{\mu\nu} F^{\beta}{}_{\rho\sigma}$$

其中θ^{αβ}是另一个常数矩阵.这一项实际上是全导数项,因而并不影响场方程或Feynman规则.然 而,这样的项会有非微扰的量子力学效应,我们会在23.6节讨论它.

在继续考察矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 的性质之前,值得关注如下的事实,在不引入相互作用的前提下,不可能 引入规范场 A^{α}_{μ} 的动能项,方程(15.2.3)中的这一项源于方程(15.1.13)所定义的场强 $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ 的二次部 分.这是非阿贝尔规范理论类似广义相对论的又一方面,在广义相对论中,引力场拉格朗日量的动 能部分被包含在Einstein-Hilbert拉格朗日密度—— $\sqrt{gR/8\pi G}$ 之中,这一项也包含引力场的自能. 两种情况下的原因是相似的:引力场与自身相作用是因为它与任何携带能量和动量的物质相作用, 而规范场与自身相作用是因为它与任何按照规范群的非平庸表示(在伴随表示的情况下)变换的物 质相作用.这与电动力学的情况相反,在电动力学中,光子不携带它所相互作用的量子数——电 荷,因而对于电磁场有可能引入不需要相互作用的动能项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

数值矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 可以取成对称的,并且为了给出实的拉格朗日量必须取成实的.为了使这一项满足规范不变性要求(15.2.2),对于所有的 δ ,我们必须有:

$$g_{\alpha\beta}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}C^{\beta}{}_{\gamma\sigma}F^{\gamma\mu\nu} = 0 \; .$$

为了在不对F之间附加任何的泛函关系的情况下使其成立,矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 必须满足条件:

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}{}_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^{\beta}{}_{\alpha\delta} . \qquad (15.2.4)$$

在矩阵 $g_{\gamma\beta}$ 上还有一个更重要的条件.如同电动力学中一样,正则量子化规则与量子标量积的 正定性要求拉格朗日量(15.2.3)中的矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 必须是正定的.(即,对于所有实的 $u, g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ 必须 是正的,而仅当对于所有的 α 有 $u^{\alpha} = 0$ 时, $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ 才为零.)这类似于在实场 ϕ 的动能拉格朗日 量 $-\frac{1}{2}Z\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^{2}\phi^{2}$ 中要求,常数Z必须是正定的.

矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 上的这些要求有着深远的含义. 它们构成了如下三个相互等价的条件中的一个: a:存在满足不变性条件(15.2.4)的实对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$.

b: 该Lie代数存在一组基(即,一组生成元 $\tilde{t}_{\alpha} = \mathscr{S}_{\alpha\beta}t_{\beta}$,其中 \mathscr{S} 是实的非奇异矩阵),使得结构常数 $\tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 不仅关于下指标 β 和 γ 是反对称的,并且对所有三个指标 α,β 和 γ 也是反对称的. (在这一基下,不在上下指标 α,β 等之间作区分将是方便的,并将 $\tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 写成 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$.)

c: 该Lie代数是U(1)子代数与互相交换的紧致单代数的直和.*

本章附录A给出了条件a, b和c相互等价的证明.^[7]

在继续讨论这一结果的物理含义之前, 就完备性条件再说几点将是有用的. 我们不会在这里 使用这个条件, 但是紧Lie代数构成了紧Lie群的生成元:即群的不变体积有限的群. 例如, 旋转群

$$C^{\ell c}{}_{namb} = \delta_{\ell m} \delta_{mn} C^{(n)c}{}_{ab}$$

其中 $C^{(n)c}_{ab}$ 是子代数 \mathcal{H}_n 的结构常数.

^{*}一些定义: Lie代数9的子代数 # 是线性空间,该线性空间由9的生成元 t_{α} 的特定实线性组合 $t_i = \mathscr{S}_{i\alpha}t_{\alpha}$ 张开, 使得 # 本身是Lie代数,也就是说, t_i 彼此之间的对易子的形式是 $[t_i, t_j] = ic^{k}_{ij}t_k$.如果整个代数9的任何元素与子 代数 # 的任何元素的对易子处在子代数 # 内,则称子代数 # 是不变的.单纯(简称"单")Lie代数是没有不变子代数 的Lie代数. 9的U(1)子代数是仅有一个生成元的代数,并且该生成元与整个代数9的所有生成元都对易. 半单Lie代数 是不含有不变阿贝尔子代数的代数,其中不变阿贝尔子代数是指生成元彼此对易的不变子代数.半单Lie代数是 单Lie代数(但不是U(1))的直和.如果矩阵Tr{ $t^{A}_{\alpha}t^{A}_{\beta}} = -C^{\gamma}_{\alpha\delta}C^{\delta}_{\beta\gamma}$ 是正定的,则称单Lie代数或半单Lie代数是紧 致(简称"紧")的.单纯性与紧致性的含义与重要性将在下面进一步讨论.称Lie代数9是子群 # no 直和是指,有可能找 到Lie代数9的一个基,其生成元为 t_{na} ,使得结构常数采取形式

是紧致的; Lorentz群则不是. 作为一个不紧的单Lie代数的例子, 考察对易关系

 $[t_1, t_2] = -i t_3$, $[t_2, t_3] = i t_1$, $[t_3, t_1] = i t_2$.

这里的结构常数是实的,但不是全反对称的;它的非零分量是

$$C^{3}_{12} = -C^{3}_{21} = -1$$
, $C^{1}_{23} = -C^{1}_{32} = 1$, $C^{2}_{31} = -C^{2}_{13} = 1$.

方程(15.A.10)所给出的度规在这里是对角的,其中元素为:

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2 \; .$$

这不是正定矩阵,所以Lie代数不是紧致的.事实上它是非紧群O(2,1)的Lie代数,该群是两维空间一维时间中的Lorentz群.

两组相差一个实非奇异线性变换的生成元被视为张开了同一个Lie代数,并且生成了同一个 群.这对于生成元的复线性变换是不成立的.特别地,通过在合适的基下改变生成元的相位,任 何单Lie代数都可以变成紧致的形式.例如,对于上例的Lie代数,只需定义新的生成元 $t'_1 = it_1$, $t'_2 = it_2$, $t'_3 = t_3$,对于这些生成元,对易关系是

$$[t_1', t_2'] = \mathrm{i} t_3' , \qquad [t_2', t_3'] = \mathrm{i} t_1' , \qquad [t_3', t_1'] = \mathrm{i} t_2' .$$

结构常数现在就变成了实的并且是全反对称的: $C^a_{bc} = \epsilon_{abc}$. 这时 $g_{ab} = 2\delta_{ab}$,并且代数是紧致的. 当然,我们辨认出这是熟悉的三维旋转的紧致群O(3)的代数.为了看到,对于任何的单Lie代数,这 总是可能的,注意到方程(15.A.10)定义的矩阵 g_{ab} 是实的,对称且非奇异的,使得可以通过一个实 正交变换将其变成非零元在主对角线上的对角形式. 然后,只需要给这一基下对应 g_{ab} 负对角元的 所有生成元乘以因子i即可.

我们不加证明地指出, 紧Lie群的有限维表示都是幺正的, 相应地, 紧Lie代数的有限维表示都 是厄密的.更进一步, 很容易看到, 通过独立的有限维厄密矩阵*t*_α而拥有任意的非平庸表示的唯 一Lie代数是*U*(1)与紧致单Lie代数的直和. 为了证明这一点, 我们可以简单地定义

$$g_{\alpha\beta} \equiv \operatorname{Tr}\{t_{\alpha}t_{\beta}\}$$
.

这个矩阵显然是正定的,这是因为 $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = \text{Tr}\{(u^{\alpha}t_{\alpha})^{2}\}$ 对于任意实的 u^{α} 都是正的,而仅 当 $u^{\alpha}t_{\alpha} = 0$ 时才为零,除非所有的 u^{α} 都为零,否则这是不可能的,这是因为 t^{α} 假定是独立的.进一 步的,该 $g_{\alpha\beta}$ 满足不变性条件(15.2.4),这一点可以通过给对易关系(15.1.2)乘以 t_{δ} 再取迹看到;这给 出

$$i C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \operatorname{Tr} \{ t_{\gamma} t_{\delta} \} = \operatorname{Tr} \{ [t_{\alpha}, t_{\beta}] t_{\delta} \} = \operatorname{Tr} \{ t_{\delta} t_{\alpha} t_{\beta} - t_{\beta} t_{\alpha} t_{\delta} \} ,$$

这显然关于 β 和 δ 是反对称的. 证实了**a**后, 我们可以通过之上的定理推出条件**c**, 这使得Lie代数必 须是紧致单纯子代数与U(1)子代数的直和.

现在我们回到规范理论的物理. 在本节, 从构建拉格朗日量中的规范场动能性的必要性, 我们已经推断出存在正定实对称矩阵 $g_{\alpha\beta}$, 它满足不变性条件(15.2.4), 并且在本章的附录A中我们已经证明了这个结果等价于Lie代数上的一个条件, 即它是紧致单纯子代数与U(1)子代数的直和. 对于我们的目的, 关于这一结果重要的是, 单Lie代数都是某些类型有限且维数有限的代数. 例如, 很容易看到不存在生成元少于3个的单Lie代数, 这是因为在一维或二维中, 无法存在有3个指标的全反

对称结构常数. 有了三个生成元, 通过取 C^{3}_{12} , C^{2}_{31} 以及 C^{1}_{23} 非零, 可以避免不变子代数. 在结构 常数是实的且全反对称的基下, 显然仅有一种可能性:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c \,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \; .$$

这里的c是一任意的非零常数,可以通过生成元的标度变换, $t_{\alpha} \rightarrow t_{\alpha}/c$, 消掉它, 所以Lie代数是

 $[t_{\alpha}, t_{\beta}] = \mathrm{i} \, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} t_{\gamma} \; .$

这可以视为三维旋转群O(3)的Lie代数,以及二维中的幺正幺模群SU(2)的Lie代数,并且在杨振宁和Mills的原始非阿贝尔理论中用它作为基.以同样的方式继续下去,当生成元个数为4,5,6或7时,单Lie代数是不存在的,生成元个数为8时有一个单Lie代数,依次类推.数学家(尤其是Killing(基灵)和E. Cartan(埃利·嘉当))已经能够编录所有的单Lie代数.单Lie代数的紧致形式构成了几个"典型"Lie群代数的无限类——幺正幺模群,幺正正交群以及幺正辛群——再加上五个例外Lie群.本章的附录B给出了这个目录.

在附录A中同样证明了,在等价条件a,b或c下,度规采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab} \tag{15.2.5}$$

其中 g_m 是实的,而m和n用来标记单纯子代数或U(1)子代数,而a和b用来标记这些不变子代数的各个生成元.我们可以通过重新调节规范场消掉常数 g_m^{-2}

$$A^{\mu}_{ma} \to \tilde{A}^{\mu}_{ma} \equiv g_m^{-1} A^{\mu}_{ma} , \qquad (15.2.6)$$

但另一方面,为了保持 $D_{\mu}\psi$ 和 $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ 的公式(15.1.10)和(15.1.13)不变,我们必须重新定义矩阵 t_{α} 以及 结构常数

$$t_{ma} \to \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma} , \qquad (15.2.7)$$

$$C_{cab}^{(m)} \to \tilde{C}_{cab}^{(m)} = g_m C_{cab}^{(m)} .$$
 (15.2.8)

即,我们总可以定义规范场的标度(现在扔掉波浪符)使得方程(15.2.5)中的gm为1:

$$g_{ab} = \delta_{ab} , \qquad (15.2.9)$$

但另一方面,对于每个单纯子代数或U(1)子代数,变换矩阵 t_{α} 和结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 就要包含一个未知的乘子 g_m .这些因子是规范理论的耦合常数.或者,在每个单纯子代数或U(1)子代数中采取虽然任意但固定的归一化,这有时更加方便一些,在这种情况下,就像因子 g_m^{-2} 出现在方程(15.2.5)中, 耦合常数将出现在规范场拉格朗日量(15.2.3)中.

15.3 场方程与守恒律

在方程(15.2.3)中使用矩阵g_{αβ}的方程(15.2.9), 全拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{\mathrm{i}}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_{\alpha}^{\ \mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\mu\psi) , \qquad (15.3.1)$$

在没有规范场时, $\mathscr{L}_{M}(\psi, \partial_{\mu}\psi)$ 将是"物质"拉格朗日密度. 原则上, 我们可以引入 \mathscr{L}_{M} 对 $F_{\alpha\mu\nu}$ 以及高 阶协变导数 $D_{\nu}D_{\mu}\psi$, $D_{\lambda}F_{\alpha\mu\nu}$ 等的相关性, 但是, 因为与电动力学相同的原因, 我们在这里将这些 不可重整项排除在外: 正如12.3节所讨论的, 在普通的能量下, 这样的项将被某些非常大的质量项 的负幂次高度抑制. 由于这个原因, 对于弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型, 它的拉格朗日量 的一般形式为(15.3.1).

规范场的运动方程在这里是

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\alpha \nu})} = -\partial_{\mu} F_{\alpha}{}^{\mu \nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\alpha \nu}}$$
$$= -F_{\gamma}{}^{\nu \mu} C_{\gamma \alpha \beta} A_{\beta \mu} - \mathrm{i} \frac{\partial \mathscr{L}_{M}}{\partial D_{\nu} \psi} t_{\alpha} \psi$$

因而

$$\partial_{\mu}F_{\alpha}^{\ \mu\nu} = -\mathscr{J}_{\alpha}^{\ \nu} , \qquad (15.3.2)$$

其中 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ 是流:

$$\mathscr{J}_{\alpha}{}^{\nu} \equiv -F_{\gamma}{}^{\nu\mu}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta\mu} - \mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}_{M}}{\partial D_{\nu}\psi}t_{\alpha}\psi . \qquad (15.3.3)$$

流Jav在平常的意义下守恒

$$\partial_{\nu} \mathscr{J}_{\alpha}{}^{\nu} = 0 , \qquad (15.3.4)$$

这一点即可以从ψ的运动方程和不变性条件(15.2.2)中看到,也可以,更简单地,从场方程(15.3.2)中 直接得出.

方程(15.3.2)和(15.3.4)中导数是普通导数,不是规范协变导数 D_{ν} ,所以这些方程的规范不变性晦涩不明.用场强的规范协变导数重写方程(15.3.2),这可以使得规范不变性变得显然

$$D_{\nu}F_{\alpha}^{\ \mu\nu} \equiv \partial_{\lambda}F_{\alpha}^{\ \mu\nu} - i(t^{A}{}_{\beta})_{\alpha\gamma}A_{\beta\lambda}F_{\gamma}^{\ \mu\nu} = \partial_{\lambda}F_{\alpha}^{\ \mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta}A_{\beta\lambda}F_{\gamma}^{\ \mu\nu} .$$
(15.3.5)

这样, 方程(15.3.2)变成

$$D_{\mu}F_{\alpha}{}^{\mu\nu} = -J_{\alpha}{}^{\nu} , \qquad (15.3.6)$$

其中J_α^ν仅是物质场的流

$$J_{\alpha}{}^{\nu} \equiv -i \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial D_{\nu} \psi} t_{\alpha} \psi . \qquad (15.3.7)$$

如果 \mathcal{L}_M 是规范不变的,上式就是规范协变的.另外,通过用算符 D_{ν} 作用方程(15.3.6),利用对易关系

$$[D_{\nu}, D_{\mu}]F_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = -\mathrm{i}\,(t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma})_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_{\beta}{}^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_{\beta}{}^{\rho\sigma} ,$$

我们看到J_α^ν满足规范协变守恒律

$$D_{\nu}J_{\alpha}^{\ \nu} = 0 \ , \tag{15.3.8}$$

而不是整个流 *J*_α^ν所满足的平常的守恒律(15.3.4). 另外, (利用方程(15.1.5))可以直接导出等式:

$$D_{\mu}F_{\alpha\nu\lambda} + D_{\nu}F_{\alpha\lambda\mu} + D_{\lambda}F_{\alpha\mu\nu} = 0 , \qquad (15.3.9)$$

无论规范场是否满足场方程,这总是成立的.

这些结果有助于强调在15.1节提到的非阿贝尔规范理论与广义相对论之间的深刻类比. 在广义相对论中,类似于 J^{μ} ,存在物质的能动量张量 T^{ν}_{μ} ,它满足广义协变守恒律 $T^{\nu}_{\mu;\nu}$,并且 在Einstein场方程的广义协变形式, $R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R = -8\pi GT^{\nu}_{\mu}$ 中,它在方程的右边.然而, T^{ν}_{μ} 在 通常的意义下并不守恒: $\partial_{\nu}T^{\nu}_{\mu}$ 并不为零.另一方面,将Einstein方程左边的非线性项移至右边给 出场方程^[8]

$$\left(R^{\nu}{}_{\mu}-\frac{1}{2}\,\delta^{\nu}{}_{\mu}R\right)_{\rm LINEAR} = -8\pi G\,\tau^{\nu}{}_{\mu}\ ,$$

其中τνμ不是张量

$$\tau^{\nu}{}_{\mu} \equiv T^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{8\pi G} \left(R^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} \,\delta^{\nu}{}_{\mu} R \right)_{\text{NONLINEAR}}$$

类似于 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$. 同 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ 一样, τ^{ν}_{μ} 在通常的意义下守恒

$$\partial_{\nu} \tau^{\nu}{}_{\mu} = 0$$

并可以视为能量和动量的流:

$$P_{\mu} = \int \tau^0{}_{\mu} \,\mathrm{d}^3 x \ .$$

因为引力场携带能量和动量,它包含一个纯引力项;没有这一项, τ^{ν}_{μ} 无法守恒. 类似地,对于非阿贝尔群(那些 $C^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$ 的群),规范场携带它们所作用的量子数,所以 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ 包含一个规范场项(方程(15.3.3)右边的第一项).因为 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ 在通常的意义下守恒,它可以视为这些量子数的流,其中对称性生成元由下面的时间无关量给出

$$T_{\alpha} = \int \mathscr{J}_{\alpha}{}^{0} \mathrm{d}^{3}x \;. \tag{15.3.10}$$

(另外,齐次方程(15.3.9)包含协变导数,就像广义相对论的Bianchi(比安奇)等式.)相反,这些复杂性都没有出现在量子电动力学中,这是因为光子不携带它所作用的量子数,电荷.

15.4 量子化

我们现在开始量子化前两节所描述的规范理论. 拉格朗日密度取为(15.3.1)的形式:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_{\alpha}^{\ \mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\nu\psi) , \qquad (15.4.1)$$

其中

$$\begin{split} F_{\alpha\mu\nu} &\equiv \partial_{\mu}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} ,\\ D_{\mu}\psi &\equiv \partial_{\mu}\psi - \mathrm{i}t_{\alpha}A_{\alpha\mu}\psi . \end{split}$$

我们不能简单地令对易子等于i乘以相对应的Poisson括号就将这个理论量子化.问题是约束中的一个.用7.6节所描述的Dirac术语来说,存在一个初级约束

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_0 A_{\alpha}{}^0)} = 0 \tag{15.4.2}$$

以及 A_{α}^{0} 的场方程所提供的次级约束:

$$-\partial_{\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\alpha 0}} = \partial_{\mu} F_{\alpha}{}^{\mu 0} + F_{\gamma}{}^{\mu 0} C_{\gamma \alpha \beta} A_{\beta \mu} + J_{\alpha}{}^{0} = \partial_{k} \Pi_{\alpha}{}^{k} + \Pi_{\gamma}{}^{k} C_{\gamma \alpha \beta} A_{\beta k} + J_{\alpha}{}^{0} = 0 , \qquad (15.4.3)$$

其中 $\Pi_{\alpha}{}^{k} \equiv \partial \mathscr{L}/\partial(\partial_{0}A_{\alpha k}) = F_{\alpha}{}^{k_{0}}$ 是共轭于 $A_{\alpha k}$ 的"动量",其中k在1,2,3之间取值. $\Pi_{\alpha 0}$ 与 $\partial_{k}\Pi_{\alpha}{}^{k} + \Pi_{\gamma}{}^{k}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta k} + J_{\alpha}{}^{0}$ 的Poisson括号为零(这是因为后一个量独立于 $A_{\alpha}{}^{0}$),所以它们是第一类约束,这些约束不能用Dirac括号替换Poisson括号进行处理.

正如电动力学的情况,我们通过选择规范来处理这些约束.电动力学采用的Coulomb规范在 这里将会导致一个令人不快的复杂性,*所以我们转而在所谓的轴向规范下进行处理,它基于条件

$$A_{\alpha 3} = 0 \ . \tag{15.4.4}$$

这样,规范场的正则变量就是Aai,i现在在1和2之间取值,再加上它们的正则共轭

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_{\alpha}{}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} .$$
(15.4.5)

场 $A_{\alpha 0}$ 不是独立的正则变量, 而是通过约束(15.4.3)以其它变量定义的. 为了看到这一点, 注意到"电"场场强 $F_{\alpha}^{\mu 0}$ 是

$$F_{\alpha}^{\ i0} = \Pi_{\alpha i} , \qquad F_{\alpha}^{\ 30} = \partial_3 A_{\alpha}^{\ 0} , \qquad (15.4.6)$$

所以约束(15.4.3)变成

$$- (\partial_3)^2 A_{\alpha}{}^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma \alpha \beta} A_{\beta i} + J_{\alpha}{}^0 , \qquad (15.4.7)$$

这个方程(在合理的边界条件下)可以很容易地解出,并以 $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$ 和 J_{α}^{0} 的泛函给出 A_{α}^{0} . (我们使用了求和约定,指标i,j等对1和2求和.) 应该注意的是,物质场 ψ_{ℓ} 的正则共轭是

$$\pi_{\ell} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_0 \psi_{\ell})} = \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial (D_0 \psi_{\ell})} , \qquad (15.4.8)$$

所以物质流的时间分量可以仅用物质场的正则变量表示

$$J_{\alpha}^{\ 0} = -\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}_{M}}{\partial(D_{0}\psi_{\ell})}(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\psi_{m} = -\mathrm{i}\pi_{\ell}(t_{\alpha})_{\ell}^{\ m}\psi_{m} \ . \tag{15.4.9}$$

因此方程(15.4.7)将给定时刻的 A_{α}^{0} 定义为同一时刻的正则变量 $\Pi_{\gamma i}, A_{\beta i}, \pi_{\ell} \pi \psi_{m}$ 的泛函.

既然我们已经找出了这一规范下的正则变量,我们现在可以着手构建哈密顿量了.哈密顿密度是^a

$$\mathcal{H} = \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{L}$$

= $\Pi_{\alpha i} (F_{\alpha 0 i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell$
 $- \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} F_{\alpha i 3} F_{\alpha i 3}$
 $- \frac{1}{2} F_{\alpha 0 3} F_{\alpha 0 3} - \mathcal{L}_M .$ (15.4.10)

利用方程(15.4.4)和(15.4.6),这变成

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i} (\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0} , \qquad (15.4.11)$$

^{*}除了纯代数上的困难外, Coulomb规范(同其他许多规范一样)还有一个称为Gribov(格里波夫)多值性的问题:^[9]即 便附加 \mathbf{A}_{α} 在无限远处为零的条件,对于Coulomb规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\alpha} = 0$ 的每个解,存在另一个解,与其相差有限的规范 变换. Gribov多值性不会在这里影响我们,因为我们是在轴向规范下进行量子化的,在轴向规范下,这个问题是不存在 的,并且我们仅用其它规范,例如Lorentz规范,来生成微扰展开.

^a原书方程(15.4.10)有笔误, $F_{\alpha i j} F_{\alpha i j}$ 的系数应该是 $\frac{1}{4}$ 而非 $\frac{1}{2}$. ——译者注

其中ℋM是物质哈密顿密度:

$$\mathscr{H}_M \equiv \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{L}_M . \tag{15.4.12}$$

沿用9.2节所导出的一般规则,我们现在可以用这一哈密顿密度计算作为路径积分的矩阵元, 该路径积分是对 $A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_{ℓ} 和 π_{ℓ} 的路径积分,含有权重因子exp(iI),其中

$$I = \int d^4x \left[\Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{H} + \epsilon \mathfrak{M} \right], \qquad (15.4.13)$$

在*I*中, " ϵ 项"仅用来给出传播子分母中正确的无限小虚项. (参看9.2节.) 我们注意到方程(15.4.7)和 (15.4.9)给出的 A_{α}^{0} 是正则变量的泛函,而该泛函关于 $\Pi_{\alpha i}$ 和 π_{ℓ} 是线性的. 那么,对方程(15.4.11)的 观察表明了,(假定 \mathcal{L}_{M} 至多是 $D_{\mu}\psi$ 的平方)完整作用量(15.4.13)的被积函数至多是 $\Pi_{\alpha i}$ 和 π_{ℓ} 的二次.因此,通过高斯积分的通常规则,我们可以算出对这些正则"动量"的路径积分. 这一步骤的麻烦是 方程(15.4.13)中 $\Pi_{\alpha i}$ 的二阶项系数是 $A_{\alpha i}$ 的函数,所以高斯积分将会产生一个可怕的场相关行列式 因子. 另外,此时的整个体系看起来没有丝毫的可能是Lorentz不变的.

我们不在这条道路上继续前行,取而代之,我们将使用一个类似于在9.6节的电动力学路径积 分公式中使用过的技巧.注意到,如果我们暂且认为 $A_{\alpha 0}$ 是独立变量,那么作用量(15.4.13)显然 是 $A_{\alpha 0}$ 的二次型,其中二阶项 $A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$ 的系数等于场无关核(∂_3)² $\delta^4(x - y)$.正如我们在第九 章的附录中所看到的,这种对 $A_{\alpha 0}(x)$ 的高斯积分,除去一个常数因子外,等于被积函数在指数变量 稳定"点"的值.但是,这里的作用量变分导数是

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_{\alpha}{}^{0} + \partial_{i}\Pi_{\alpha i} + C_{\beta \alpha \gamma}\Pi_{\beta i}A_{\gamma i} - \partial_{3}^{2}A_{\alpha 0} ,$$

所以作用量的"稳定"点是约束方程(15.4.7)的解.因此,取代用*A*_{α0}作为方程(15.4.7)的解,我们同 样可以就把它当做独立的积分变量进行处理.

现在, 视 $A_{\alpha 0}$ 为独立变量时, 哈密顿量 $\int d^3x \mathscr{H}$ 显然是 $\Pi_{\alpha i}$ 的二次型, 其中二阶项 $\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$ 的 系数由场无关核 $\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\delta_{ij}$ 给出. 假定这对于物质场 π_ℓ 同样是成立的, 通过令 π_ℓ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 等于对应 方程(15.4.1)的作用量的稳定"点", 我们可以计算出对 π_ℓ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 的路径积分至相差一个常数因子, π_ℓ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 的稳定"点"是:

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \pi_{\ell}} = \partial_0 \psi_{\ell} - \frac{\partial \mathscr{H}_M}{\partial \pi_{\ell}} ,$$

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i} .$$

将其代回方程(15.4.13)给出

$$I = \int d^4x \left[\mathscr{H}_M + \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} - \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} + \frac{1}{2} (\partial_3 A_{\alpha 0})^2 \right]$$
$$= \int d^4x \, \mathscr{L} , \qquad (15.4.14)$$

其中 \mathscr{L} 是我们所出发的拉格朗日量(15.3.1)!换句话说,我们要做的是对 $\psi_{\ell}(x)$ 以及 $A_{\alpha\mu}(x)$ 的全部4个分量的路径积分,其中的权重因子由方程(15.4.14)和(15.3.1)给出且是显然协变的,但是强加了轴向规范协变条件,即插入了因子

$$\prod_{x,\alpha} \delta\Big(A_{\alpha3}(x)\Big) \ . \tag{15.4.15}$$

只要OA, OB···是规范不变的, 我们就有

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VACUUM}} \propto \int \left[\prod_{\ell,x} \mathrm{d}\psi_\ell(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)\right] \\ \times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots \exp\{\mathrm{i}I + \epsilon \mathfrak{M}\}\prod_{x,\alpha} \delta(A_{\alpha3}(x)) ,$$
(15.4.16)

其中I是方程(15.4.14)给出的Lorentz不变且规范不变的作用量.

为了将来的参考,我们注意到,方程(15.4.16)中对规范场积分的体积元 $\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$ 是规范 不变的,也就是说

$$\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\Lambda\alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x) , \qquad (15.4.17)$$

其中 $A_{\Lambda\alpha\mu}$ 是用规范变换作用 $A_{\alpha\mu}(x)$ 后的结果,规范变换的参量是 $\Lambda_{\alpha}(x)$.证明对于单位元附近的 变换,即无限小的变换参量 $\lambda_{\alpha}(x)$,这是成立的就足够了.在这一情况下

$$A_{\lambda\alpha}{}^{\mu} = A_{\alpha}{}^{\mu} + \partial_{\mu}\lambda_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta}{}^{\mu}\lambda_{\gamma} ,$$

所以体积元之间的关系为

$$\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\lambda\alpha\mu}(x) = \mathrm{Det}(\mathscr{N}) \prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x) \; ,$$

其中√是"矩阵":

$$\mathcal{N}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y)\,\delta^{\nu}_{\mu}\left[\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma}\lambda_{\gamma}(x)\right]\,.$$

因为迹 $C_{\alpha\alpha\gamma}$ 为零,所以到 λ_{γ} 的一阶, \mathcal{N} 的行列式为1.

在本章,我们将假定对物质场积分的体积元 $\prod_{n,x} d\psi_n(x)$ 也是规范不变的. 这里有一个很重要的微妙,在第22章我们将回到这个问题上,但是,正如那里所证明的,这一假定对于我们目前的强作用和电弱作用的非阿贝尔规范理论是适用的.

15.5 De Witt-Faddeev-Popov方法

我们的路径积分公式(15.4.16)是在一个有利于正则量子化的规范下导出的,但是从这一公式 导出的Feynman规则会隐藏理论潜在的旋转不变性与Lorentz不变性.为了导出显然Lorentz不变 的Feynman规则,我们需要改变规范.

我们首先注意到的是,方程(15.4.16)是(相差一个不重要的常数因子)一大类泛函积分中的一 个特殊情况,这类泛函积分的形式为:

$$\mathscr{I} = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x) \right] \mathscr{G}[\phi] B[f[\phi]] \operatorname{Det} \mathscr{F}[\phi] , \qquad (15.5.1)$$

其中 $\phi_n(x)$ 是一组规范场和物质场; $\prod_{n,x} d\phi_n(x)$ 是体积元; 而 $\mathscr{G}[\phi]$ 是 $\phi_n(x)$ 的泛函, 并满足规范不变 条件:

$$\mathscr{G}[\phi_{\lambda}] \prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_{\lambda n}(x) = \mathscr{G}[\phi] \prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_{n}(x) , \qquad (15.5.2)$$

其中 $\phi_{\lambda n}(x)$ 是用一个规范变换作用在 ϕ 上的结果, 该规范变换的参量是 $\lambda_{\alpha}(x)$. (通常情况下, 当这一点满足时, 泛函g与体积元分别是不变的, 但在这里我们所需要的只有方程(15.5.2).) 另外, $f_{\alpha}[\phi;x]$ 是这些场的"规范固定泛函", 它不是规范不变的且依赖于x和 α ; B[f]是针对x和 α 的一般函数 $f_{\alpha}(x)$ 所定义的某个数值泛函; 而g是"矩阵":

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi] \equiv \left. \frac{\delta f_{\alpha}[\phi_{\lambda};x]}{\delta \lambda_{\beta}(y)} \right|_{\lambda=0} \,. \tag{15.5.3}$$

(与我们通常函数的泛函或泛函的泛函的记法一致, $B[f[\phi]]$ 所依赖的 $f_{\alpha}[\phi; x]$ 值是: 对未表示出的 变量 α 和x的所有值所取的值, 而表示出的变量, 函数 $\phi_n(x)$, 保持不变.) 方程(15.5.1)并不代表方程(15.4.16)最大可能的推广; 在15.7节我们将看到, 由于某些原因, 需要并存在进一步的推广. 这 里我们从方程(15.5.1)出发, 这是因为它将协助推动15.7节的形式体系, 并且就处理处在最方便规 范下的非阿贝尔规范理论而言, 它是足够的.

我们必须要验证路径积分(15.4.16)确实是方程(15.5.1)的一个特殊情况.在方程(15.4.16)中, 场 $\phi_n(x)$ 由 $A_{\alpha\mu}(x)$ 和物质场 $\psi_\ell(x)$ 构成,并且

$$f_{\alpha}[A,\psi;x] = A_{\alpha3}(x) ,$$
 (15.5.4)

$$B[f] = \prod_{x,\alpha} \delta(f_{\alpha}(x)) , \qquad (15.5.5)$$

$$\mathscr{G}[A,\psi] = \exp\{\mathrm{i}\,I + \epsilon \mathfrak{I}\}\,\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots, \qquad (15.5.6)$$

$$\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x) = \left[\prod_{\ell,x} \mathrm{d}\psi_\ell(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A^{\mu}_{\alpha}(x) \right] .$$
(15.5.7)

(我们现在去掉上下标 α, β, \dots 之间的区别.) 比较方程(15.4.16)与方程(15.5.1)—(15.5.3), 这表明了 除去因子Det $\mathscr{F}[\phi]$ 之外, 这些路径积分实际上是相同的. 对于特定的规范固定泛函(15.5.4), 这一 因子是场无关的: 如果 $A^3_{\alpha}(x) = 0$, 那么在参量为 $\lambda_{\alpha}(x)$ 的规范变换下, $A^3_{\alpha}(x)$ 的变化是

$$A^{3}_{\lambda\alpha}(x) = \partial_{3} \lambda_{\alpha}(x) = \int \mathrm{d}^{4}y \,\lambda_{\alpha}(y) \,\partial_{3} \delta^{4}(x-y) \,,$$

使得方程(15.5.3)在这里变成场无关"矩阵"

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi] = \delta_{\alpha\beta} \,\partial_3 \delta^4(x-y) \;.$$

因此,方程(15.5.1)中的行列式在这一规范下也是场无关的.正如第9章所论述过的,泛函积分中的场无关因子仅影响期望值与S-矩阵的真空涨落部分,因而与S-矩阵元连通部分的计算是无关的.

将任意非阿贝尔理论的泛函积分(15.4.16)视为一般路径积分(15.5.1)的一个特殊情况,其 中的关键之处在于,在这一形式下我们可以自由地改变规范.特别地,我们有一个定理,即积 分(15.5.1)实际上(在一个很宽泛的限制下)独立于规范固定泛函*f*_α[*φ*;*x*],它仅通过一个不相关的常 数因子与泛函*B*[*f*]的选择相关. 证明: 将方程(15.5.1)中的所有积分变量 ϕ 替换成一个新的积分变量 ϕ_{Λ} ,其中的 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 是任意(但固定)一组规范变换参量:

$$\mathscr{I} = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_{\Lambda n}(x) \right] \mathscr{G}[\phi_{\Lambda}] B\left[f[\phi_{\Lambda}] \right] \operatorname{Det} \mathscr{F}[\phi_{\Lambda}] .$$
(15.5.8)

(这一步在数学上是平庸的, 就像将积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 变成 $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$, 并且没有使用我们关于规范 不变性的假定.)现在使用已假定的测度 $\Pi d\phi$ 乘以泛函 $\mathscr{G}[\phi]$ 的规范不变性(15.5.2), 将其重写为

$$\mathscr{I} = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x) \right] \mathscr{G}[\phi] B \Big[f[\phi_\Lambda] \Big] \operatorname{Det} \mathscr{F}[\phi_\Lambda] .$$
(15.5.9)

既然 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 是任意的,这时左边不能与它相关.因此,在一个合适的权重因子 $\rho[\Lambda]$ (会在后面选定)下 积掉 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 会给出

$$\mathscr{I}\int\left[\prod_{\alpha,x}\mathrm{d}\Lambda^{\alpha}(x)\right]\rho[\Lambda] = \int\left[\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_n(x)\right]\mathscr{G}[\phi]C[\phi] ,\qquad(15.5.10)$$

其中

$$C[\phi] \equiv \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\Lambda^{\alpha}(x)\right] \rho[\Lambda] B\left[f[\phi_{\Lambda}]\right] \operatorname{Det} \mathscr{F}[\phi_{\Lambda}] .$$
 (15.5.11)

现在, 方程(15.5.3)给出

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_{\lambda}] = \left. \frac{\delta f_{\alpha}[(\phi_{\Lambda})_{\lambda}; x]}{\delta \lambda^{\beta}(y)} \right|_{\lambda=0} \,. \tag{15.5.12}$$

我们假定这些变换构成群;即,我们可以将先进行参量为 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 的规范变换再进行参量为 $\lambda^{\alpha}(x)$ 的规范变换后的结果,写成规范变换参量为 $\tilde{\Lambda}^{\alpha}(x;\Lambda,\lambda)$ 的单次"乘积"规范变换作用后的结果,

$$(\phi_{\Lambda})_{\lambda} = \phi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda,\lambda)} . \tag{15.5.13}$$

利用偏(泛函)微分的链式法则,我们就有

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_{\Lambda}] = \int \mathscr{I}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda] \mathscr{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda] \mathrm{d}^{4} z , \qquad (15.5.14)$$

其中

$$\mathscr{I}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda] \equiv \left. \frac{\delta f_{\alpha}[\phi_{\tilde{\Lambda}};x]}{\delta \tilde{\Lambda}^{\gamma}(z)} \right|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda} = \frac{\delta f_{\alpha}[\phi_{\Lambda};x]}{\delta \Lambda^{\gamma}(z)}$$
(15.5.15)

以及

$$\mathscr{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda] = \frac{\delta \tilde{\Lambda}^{\gamma}(z;\Lambda,\lambda)}{\delta \lambda^{\beta}(y)} \bigg|_{\lambda=0} \,. \tag{15.5.16}$$

由此得出

$$\operatorname{Det} \mathscr{F}[\phi_{\Lambda}] = \operatorname{Det} \mathscr{I}[\phi, \Lambda] \operatorname{Det} \mathscr{R}[\Lambda] . \tag{15.5.17}$$

我们注意到, Det $\mathscr{I}[\phi, \Lambda]$ 就是积分变量从 $\Lambda^{\alpha}(x)$ 变换到(ϕ 固定的) $f_{\alpha}[\phi_{\Lambda}; x]$ 的雅克比行列式.因此, 如果我们将权重函数 $\rho(\Lambda)$ 选为

$$\rho(\Lambda) = 1 / \operatorname{Det} \mathscr{R}[\Lambda] \tag{15.5.18}$$

那么

$$C[\phi] = \int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^{\alpha}(x)\right] \operatorname{Det} \mathscr{I}[\phi,\Lambda] B[f[\phi_{\Lambda}]]$$
$$= \int \left[\prod_{\alpha,x} df_{\alpha}(x)\right] B[f] \equiv C , \qquad (15.5.19)$$

它显然是独立于 ϕ 的. (读者可以认为方程(15.5.18)给出了群的参量空间上的不变(Haar)测度.) 这样,最终我们有

$$\mathscr{I} = \frac{C \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x)\right] \mathscr{G}[\phi]}{\int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^{\alpha}(x)\right] \rho[\Lambda]} .$$
(15.5.20)

这个结果显然与我们对 $f_{\alpha}[\phi;x]$ 的选择无关,它已经被简化成单变量的积分,并且它仅通过常数C与B[f]相关,这正是所要证明的.

在继续应用这个定理之前,我们应该暂停一下,关注推导中的一个技巧点.由于同一个原因, 方程(15.5.20)的分子和分母中的积分都是病态定义的.因为假定 $\mathcal{G}[\phi]$ 是规范不变的,所以它对 ϕ 的 积分不可能收敛的;将 ϕ 变成 ϕ_{λ} 的"轨道"能够抵达所有可能的 $\lambda_{\alpha}(x)$,而 $\mathcal{G}[\phi]$ 沿着所有这样的轨道 都是常数.同样,分母中的积分也是发散的,这是因为 $\rho[\Lambda]$ IIdA就是普通群积分的不变体积元,并 且它沿着"轨道" $\Lambda \to \tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)$ 是常数.通过在一个有限的时空晶格内表述该理论,方程(15.5.20)中 分子和分母的发散都可以被消除掉,在这一情况下,规范群的体积就是整体Lie群本身的体积乘以 晶格格位的数目.对于方程(15.5.20)左边的原始定义(15.5.1)而言,由于规范固定因子B[f]消除了 这一发散,我们可以推测,随着晶格格位的数目趋于无穷,它在方程(15.5.20)右边的分子和分母之 间抵消了.

现在, 切入主题. 我们已经看到, 轴向规范下的真空期望值(15.4.16)由一般形式的路径积分(15.5.1)给出. 装备了之上的定理后, 对于 $f_{\alpha}[A, \psi; x]$ 和B[f]的(几乎)任意选择, 我们得到结论

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_V \propto \int \left[\prod_{\ell,x} \mathrm{d}\psi_\ell(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_\alpha^\mu(x)\right] \times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\{\mathrm{i}I + \epsilon \overline{\mathfrak{M}}\} B\left[f[A,\psi]\right] \operatorname{Det}\mathscr{F}[A,\psi] .$$
 (15.5.21)

因此,我们现在可以在一个更加方便的规范下用方程(15.5.21)推导Feynman规则.

我们知道如何计算的路径积分是高斯型乘以多项式的路径积分,所以我们一般会取

$$B[f] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\xi} \int \mathrm{d}^4 x \, f_\alpha(x) f_\alpha(x)\right) \,, \qquad (15.5.22)$$

其中ξ是任意的实参量. 在这一选择下, 因子B在方程(15.5.21)中的效应仅是给有效拉格朗日量增加一项

$$\mathscr{L}_{\rm EFF} = \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_{\alpha} f_{\alpha} . \qquad (15.5.23)$$

Lorentz不变的规范固定函数 f_{α} 的最简单选择与电动力学中的选择相同:

$$f_{\alpha} = \partial_{\mu} A_{\alpha}{}^{\mu} . \tag{15.5.24}$$

这样,裸规范场的传播子就可以像量子电动力学中那样进行计算.有效作用量的自由矢量玻色子部分可以写成

$$I_{0A} = -\int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) (\partial^\mu A_{\alpha}{}^\nu - \partial^\nu A_{\alpha}{}^\mu) + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_{\alpha}{}^\mu) (\partial_\nu A_{\alpha}{}^\nu) + \epsilon \mathfrak{M} \right]$$
$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \, \mathscr{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} A_{\alpha}{}^\mu(x) A_{\beta}{}^\nu(y) ,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial y_{\lambda}} \,\delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} \\ &- \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \,\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}} \,\delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} + \epsilon \mathfrak{M} \\ &= (2\pi)^{-4} \delta_{\alpha\beta} \int \mathrm{d}^4 p \left[\eta_{\mu\nu} (p^2 - \mathrm{i}\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_{\mu} p_{\nu}\right] e^{\mathrm{i}p \cdot (x-y)} \,\,. \end{aligned}$$

取方括号中矩阵的倒数,我们就得到了传播子:

$$\Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(x,y) = (\mathscr{D}^{-1})_{\alpha\mu x,\beta\nu y} = (2\pi)^{-4} \int d^4p \left[\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \right] \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - i\epsilon} .$$
(15.5.25)

这既是Landau规范的推广,也是Feynman规范的推广,可以通过取 $\xi = 0$ 和 $\xi = 1$ 分别回到这两个规范. 当 $\xi \rightarrow 0$ 时,除了 $f_{\alpha} = 0$ 附近,泛函(15.5.22)振荡的非常剧烈,所以这个泛函的作用就像 δ -函数,给泛函积分强加了Landau规范条件 $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$,它很自然地导出了满足条件 $\partial^{\mu}\Delta_{\alpha\mu,\beta\nu} = 0$ 所相应的传播子. 对于不为零的 ξ 值,泛函B[f]并不挑出规范场,使得 $A_{\alpha\mu}$ 满足任何特定规范条件,但是通常将传播子(15.5.25)称为"广义Feynman规范"或"广义 ξ -规范"下的传播子. 一个很好的计算物理振幅的策略是,保持 ξ 任意,而在计算的最后检验结果是不是 ξ -无关的.

附加一个条件后, Feynman规则现在是显然的:顶点的贡献可以从原始拉格朗日 *2*的相互作用项中读出来,而规范场传播子由方程(15.5.25)给出,物质场传播子像往常那样计算.确切些, *2*中的三线性相互作用

 $-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\mu}) A_{\beta}{}^{\mu} A_{\gamma}{}^{\nu}$

对应与三个矢量玻色子线相连的顶点,这些线携带(入)动量p,q,k以及Lorentz和规范指标 $\mu\alpha,\nu\beta,\rho\gamma$,那么,根据动量空间Feynman规则,这种顶点对被积函数的贡献是

 $i(2\pi)^{4}\delta^{4}(p+q+k)\left[-iC_{\alpha\beta\gamma}\right]\left[p_{\nu}\eta_{\mu\lambda}-p_{\lambda}\eta_{\mu\nu}+q_{\lambda}\eta_{\nu\mu}-q_{\mu}\eta_{\nu\lambda}+k_{\mu}\eta_{\lambda\nu}-k_{\nu}\eta_{\lambda\mu}\right].$ (15.5.26) 另外, *L*中的A⁴相互作用项,

$$-\frac{1}{4} C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma}^{\mu} A_{\delta}^{\nu}$$

它对应与四个矢量玻色子线相连的顶点.如果这些线携带(入)动量 p,q,k,ℓ ,以及Lorentz和规范指标 $\mu\alpha,\nu\beta,\rho\gamma$ 和 $\sigma\delta$,那么这种顶点对被积函数的贡献是

$$i(2\pi)^{4}\delta^{4}(p+q+k+\ell) \times \left[-C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) - C_{\epsilon\alpha\gamma} C_{\epsilon\alpha\gamma}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}-\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu}) - C_{\epsilon\alpha\delta} C_{\epsilon\beta\gamma}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}-\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu}) \right].$$
(15.5.27)

(回忆起结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 包含耦合常数因子,所以因子(15.5.26)和(15.5.27)关于耦合常数分别是一阶和二阶的.)

在这一Feynman规则中,还有一个困难我们没有处理,即,方程(15.5.21)中出现了因子det *ℱ*, 对于一般的规范,它不是常数.我们现在转向这个因子的考察.

15.6 鬼

我们现在来考察方程(15.5.21)中的因子 \mathscr{T} 对非阿贝尔规范场论Feynman规则的影响.为了能将这个影响处理成Feynman规则的修正,回顾我们在9.5节所证明的一个事实,即,任何矩阵 $\mathscr{T}_{\alpha x,\beta y}$ 的行列式可以表示为一个路径积分

Det
$$\mathscr{F} \propto \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega_{\alpha}^{*}(x)\right] \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega_{\alpha}(x)\right] \exp(\mathrm{i}I_{GH}) ,$$
 (15.6.1)

其中

$$I_{GH} \equiv \int d^4x \, d^4y \, \omega^*_{\alpha}(x) \, \omega_{\beta}(y) \, \mathscr{F}_{\alpha x,\beta y} \, . \tag{15.6.2}$$

这里的 ω_{α}^{*} 和 ω_{α} 是一组独立的反对易经典变量,并且比例常数是场无关的.(为了再次给出因 子Det \mathscr{F} ,我们必须将场变量 ω_{α} 和 ω_{α}^{*} 选成费米场变量;如果我们将这些场变量选成玻色的,那 么路径积分(15.6.1)就会正比于(Det \mathscr{F})⁻¹.)场 ω_{α}^{*} 和 ω_{α} 不非得通过复共轭相关联,我们甚至会 在15.7节看到,由于某些原因,我们需要假定 ω_{α}^{*} 和 ω_{α} 是独立的实变量.因子Det \mathscr{F} 的全部效应等同 于把 I_{GH} 纳入到全部的有效作用量中,并对"场" ω 和 ω^{*} 积分.即,对于任意的规范固定函数 $f_{\alpha}(x)$,

$$\langle T\{\mathcal{O}_A \cdots \} \rangle_V \propto \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\psi_n(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x) \right] \\ \times \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega_\alpha(x) \,\mathrm{d}\omega_\alpha^*(x) \right] \exp\left(\mathrm{i} I_{\mathrm{MOD}}[\psi, A, \omega, \omega^*]\right) \mathcal{O}_A \cdots ,$$
(15.6.3)

其中I_{MOD}是修正作用量

$$I_{\text{MOD}} = \int d^4x \left[\mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha \right] + I_{GH} . \qquad (15.6.4)$$

场 ω_{α} 和 ω_{α}^{*} (至少在协变规范下)是Lorentz标量,但它们满足费米统计.这里并没有真的违反 自旋统计关系,这是因为在初态或末态中不存在描述这些场的粒子.由于这个原因, ω_{α} 和 ω_{α}^{*} 称 为"鬼"粒子和"反鬼"粒子的场.对方程(15.6.2)的观察表明,这个作用量反应了称为"鬼数"的守恒 量, ω_{α} 的鬼数等于1, ω_{α}^{*} 的鬼数等于–1,而对于所以其它的场则是零.

当"矩阵" 买可以表示成

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1 , \qquad (15.6.5)$$

其中*ℱ*₀与场无关且是耦合常数的零阶项, 而*ℱ*₁与场相关且正比于一个或多个耦合常数, 这时鬼场的Feynman规则最简单. 在这一情况下, 鬼场传播子就是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = -(\mathscr{F}_0^{-1})_{\alpha x,\beta y} \tag{15.6.6}$$

而鬼场顶点直接从相互作用项中读出

$$I'_{GH} = \int \mathrm{d}^4 x \, \mathrm{d}^4 y \, \omega^*_{\alpha}(x) \, \omega_{\beta}(y) (\mathscr{F}_1)_{\alpha x, \beta y} \, . \tag{15.6.7}$$

例如,在上一节所讨论的广义ξ-规范中,我们有

$$f_{\alpha} = \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha} , \qquad (15.6.8)$$

并且,对于无限小的规范参量 λ_{α} ,方程(15.1.9)给出:

$$A^{\mu}_{\alpha\lambda} = A^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\mu}\lambda_{\alpha} + C_{\alpha\gamma\beta}\lambda_{\beta}A^{\mu}_{\gamma}$$

使得

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y} = \left. \frac{\delta \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha \lambda}(x)}{\delta \lambda_{\beta}(y)} \right|_{\lambda=0}$$
$$= \Box \, \delta^{4}(x-y) + C_{\alpha \gamma \beta} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[A^{\mu}_{\gamma}(x) \delta^{4}(x-y) \right] \,. \tag{15.6.9}$$

这就是(15.6.5)的形式,其中

$$(\mathscr{F}_0)_{\alpha x,\beta y} = \Box \delta^4(x-y) \,\delta_{\alpha\beta} \,, \qquad (15.6.10)$$

$$(\mathscr{F}_1)_{\alpha x,\beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big[A^{\gamma}_{\mu}(x) \delta^4(x-y) \Big] . \tag{15.6.11}$$

从方程(15.6.6)和(15.6.10)中,我们看到鬼场传播子是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = \delta_{\alpha\beta}(2\pi)^{-4} \int d^4p \, (p^2 - i\epsilon)^{-1} \, e^{ip \cdot (x-y)} \,, \qquad (15.6.12)$$

所以,在这一规范下,鬼场的行为就像零质量的无自旋费米子,它按照规范群的伴随表示进行变换.利用方程(15.6.7)和(15.6.11)并分部积分,我们发现这一作用量中的鬼场相互作用项变成

$$I'_{GH} = \int d^4x \, C_{\alpha\beta\gamma} \, \frac{\partial \omega^*_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \, A^{\mu}_{\gamma} \, \omega_{\beta} \, . \qquad (15.6.13)$$

这一相互作用所对应的顶点与一个出鬼线,一个入鬼线以及一个矢量玻色子线相连.如果这些线分别携带(入)动量p,q,k以及规范指标 α,β,γ ,并且规范场携带矢量指标 μ ,那么这种顶点对积分的贡献由动量空间Feynman规则给定为

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k) \times i p_\mu C_{\alpha\beta\gamma}$$
 (15.6.14)

鬼粒子绕圈传播,圈上的每一顶点与单个矢量玻色子线传播,就像平常对费米场变量所做的那样, 对于每一个圈都要补充一个额外的负号.

鬼圈额外的负号表明,每个鬼场 ω_{α} ,连同相应的反鬼场 ω_{α}^{*} ,代表的是某种负自由度.这些负自 由度是必要的,这是因为我们在使用协变规范场传播子时,我们确实对物理自由度重复计数了;物 理的自由度是 $A^{\mu}_{\alpha}(x)$ 的全部分量,减去描述规范变换所需要的参量 $\Lambda_{\alpha}(x)$.

总结一下,在广义 ξ-规范下,修正作用量(15.6.4)可以写成

$$I_{\rm MOD} = \int d^4x \,\mathscr{L}_{\rm MOD} , \qquad (15.6.15)$$

其中的修正拉格朗日密度是:

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} = \mathscr{L}_{\text{M}} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}_{\alpha} F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha}) (\partial_{\nu} A^{\nu}_{\alpha}) - \partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha} \partial^{\mu} \omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha}) A^{\mu}_{\gamma} \omega_{\beta} .$$
(15.6.16)

重点是(如果物质拉格朗日量是可重整的)这个拉格朗日量是可重整的,在基础的意义上,就是说 它的项所包含的场与导数的乘积,其总量纲(按质量幂次计)小于等于4. (方程(15.6.16)中的动能 项-∂_μω_α^{*}∂^μω_α确定了场ω和ω*的量纲,它们是质量的一次,和普通的标量场以及规范场相同.) 然 而,这里的可重整性并不止于幂次计数;同样必要的是,存在一个抵消项吸收了每个发散.在下一 节,我们将考察一个显著的对称性,在17.2节,我们将用这个对称性证明非阿贝尔场论在这一意义 下确实是可重整的,并且,这个对称性甚至可以取代我们一直讨论的Faddeev-Popov-De Witt方法.

15.7 BRST对称性

尽管前两节所描述的Faddeev-Popov-De Witt方法使得理论的Lorentz不变性变得显然,但它仍然依赖于选取一个规范,因而它很自然地隐藏了理论的底层规范不变性.在尝试证明理论的可重整性时,这将是一个严重的问题——规范不变性约束了拉格朗日量中可作为抵消项以吸收紫外发散的项的形式,但是一旦我们选择了规范,我们如何知道规范不变性是否仍然会约束无穷大所产生的方式?

然而,值得注意的是,即使在我们选择规范之后,路径积分仍然含有一个与规范不变性相关的对称性.发现这一对称性的是Becchi(贝奇),Rouet(鲁埃),以及Stora(斯托拉)^[10],(Tyutin(秋金)^[11]同时独立地发现了这一对称性),在1975年,Faddeev,Popov和De Witt的工作的几年之后,他们发现了这一对称性,为了纪念这些发现者,这一对称性被称为BRST对称性.这一对称性在一定程度上将以它的原始发现历程展现出来,它在这一过程中是作为Faddeev,Popov和De Witt方法的斟广物出现的,然而,正如我们将看到的,它也可以视为Faddeev-Popov-De Witt方法的替代品.

我们在方程(15.6.3)和(15.6.4)中已经看到,对于非阿贝尔规范场论,它的Feynman规则可以从 对物质场,规范场和鬼场的路径积分中获得,路径积分中的作用量进行了修正,我们可以将其写成

$$I_{\text{MOD}} = I_{\text{EFF}} + I_{GH} = \int d^4x \,\mathscr{L}_{\text{MOD}} , \qquad (15.7.1)$$

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} \equiv \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_{\alpha} f_{\alpha} + \omega_{\alpha}^* \Delta_{\alpha} , \qquad (15.7.2)$$

其中有一个我们现在引入的量

$$\Delta_{\alpha}(x) \equiv \int \mathrm{d}^4 y \, \mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[A,\psi] \,\omega_{\beta}(y) \;. \tag{15.7.3}$$

它对应于(15.5.21)中规范固定泛函的选择:

$$B[f] \propto \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\xi} \int \mathrm{d}^4 x \, f_\alpha f_\alpha\right) \,.$$
 (15.7.4)

对于我们当前的目的, 将B[f]重写成Fourier积分将是有帮助的:

$$B[f] = \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}h_{\alpha}(x)\right] \exp\left[\frac{\mathrm{i}\xi}{2} \int \mathrm{d}^{4}x \, h_{\alpha}h_{\alpha}\right] \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x \, f_{\alpha}h_{\alpha}\right] \,. \tag{15.7.5}$$

我们现在必须要做对场 h_{α} (通常称为"Nakanishi-Lautrup"场^[11a]),以及物质场,规范场,鬼场和反 鬼场做路径积分,其中作用量是一个新的修正作用量

$$I_{\rm NEW} = \int d^4x \left(\mathscr{L} + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha \right) \,. \tag{15.7.6}$$

这一修正作用量不是规范不变的——相反,如果我们要在路径积分中能够使用它,它不是规 范不变的反而更好. 然而,它在"BRST"对称变换下不变,该对称变换由一无限小常数 θ 参数化, $\theta = \omega_{\alpha}, \omega_{\alpha}^{*}$ 以及所有的费米物质场反对易. 对于给定的 θ , BRST变换是

$$\delta_{\theta}\psi = \mathrm{i}t_{\alpha}\theta\omega_{\alpha}\psi \;, \tag{15.7.7}$$

$$\delta_{\theta} A_{\alpha\mu} = \theta D_{\mu} \omega_{\alpha} = \theta [\partial_{\mu} \omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_{\gamma}] , \qquad (15.7.8)$$

$$\delta_{\theta}\omega_{\alpha}^{*} = -\theta h_{\alpha} , \qquad (15.7.9)$$

$$\delta_{\theta}\omega_{\alpha} = -\frac{1}{2}\theta \, C_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\omega_{\gamma} \,\,, \tag{15.7.10}$$

$$\delta_{\theta} h_{\alpha} = 0 \ . \tag{15.7.11}$$

(回忆,在费米路径积分中, ω_{α} 和 ω_{α}^{*} 之间不存在联系,使得方程(15.7.9)不必须是方程(15.7.10)的 共轭.)因为 h_{α} 是BRST-不变的,所以,我们可以按照自己的意愿将方程(15.7.5)中的高斯因 子exp($\frac{1}{2}i\xi \int h_{\alpha}h_{\alpha}$)替换为 h_{α} 的任意光滑泛函,这会产生一个任意的泛函B[f],但是不会影响作 用量的BRST不变性.然而,为了图形计算以及重整化的目的,保持B[f]为高斯型将是有帮助的.

在检查作用量(15.7.1)的不变性时,先注意到变换(15.7.7)—(15.7.11)的幂零性将是很有帮助的;即,如果 $F \ge \psi$, A, ω , ω^* 以及h的任意泛函,并且我们用

$$\delta_{\theta}F \equiv \theta sF \tag{15.7.12}$$

定义sF,那么*

$$\delta_{\theta}(sF) = 0 , \qquad (15.7.13)$$

或者等价地,

$$s(sF) = 0$$
. (15.7.14)

$$\begin{split} \delta_{\theta} s \psi &= \mathrm{i} t_{\alpha} \, \delta_{\theta}(\omega_{\alpha} \psi) = -\frac{1}{2} \mathrm{i} \, C_{\alpha\beta\gamma} t_{\alpha} \theta \omega_{\beta} \omega_{\gamma} \psi - t_{\alpha} t_{\beta} \omega_{\alpha} \theta \omega_{\beta} \psi \\ &= -\frac{1}{2} \mathrm{i} \, C_{\alpha\beta\gamma} t_{\alpha} \theta \omega_{\beta} \omega_{\gamma} \psi + t_{\alpha} t_{\beta} \theta \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \psi \; . \end{split}$$

右边第二项中的乘积 $\omega_{\alpha}\omega_{\beta}$ 关于 α 和 β 是反对称的,所以我们可以将这一项中的 $t_{\alpha}t_{\beta}$ 替换成 $\frac{1}{2}[t_{\alpha},t_{\beta}]$,这一项随之与第一项相抵消:

$$ss\psi = 0$$
. (15.7.15)

^{*}在BRST对称性的原始工作中,泛函B[f]的形式停留在了(15.7.4),使得方程(15.7.9)中的 h_{α} 被替换成了 $-f_{\alpha}/\xi$,并且,仅当作用在 ω_{α} 以及规范场和物质场的函数上时,BRST变换才是幂零的,但对于 ω_{α}^{*} 的函数则不是.

下一步,作用在规范场上,我们有

$$\begin{split} \delta_{\theta} s A_{\alpha \mu} &= \delta_{\theta} D_{\mu} \omega_{\alpha} \\ &= \partial_{\mu} \delta_{\theta} \omega_{\alpha} + C_{\alpha \beta \gamma} \delta_{\theta} A_{\beta \mu} \omega_{\gamma} + C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta \mu} \delta_{\theta} \omega_{\gamma} \\ &= \theta \Big(-\frac{1}{2} C_{\alpha \beta \gamma} \partial_{\mu} (\omega_{\beta} \omega_{\gamma}) + C_{\alpha \beta \gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\beta}) \omega_{\gamma} \\ &+ C_{\alpha \beta \gamma} C_{\beta \delta \epsilon} A_{\delta \mu} \omega_{\epsilon} \omega_{\gamma} - \frac{1}{2} C_{\alpha \beta \gamma} C_{\gamma \delta \epsilon} A_{\beta \mu} \omega_{\delta} \omega_{\epsilon} \Big) \\ &= \theta \Big(\frac{1}{2} C_{\alpha \beta \gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\beta}) \omega_{\gamma} + \frac{1}{2} C_{\alpha \beta \gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\gamma}) \omega_{\beta} \\ &- C_{\alpha \beta \gamma} C_{\gamma \delta \epsilon} A_{\delta \mu} \omega_{\epsilon} \omega_{\beta} - \frac{1}{2} C_{\alpha \beta \gamma} C_{\gamma \delta \epsilon} A_{\beta \mu} \omega_{\delta} \omega_{\epsilon} \Big) \;. \end{split}$$

最后一式中,由于*C_{αβγ}*关于β和γ是反对称的,所以前两项相互抵消了,而第三项和第四项由于雅 克比等式(15.1.5)相互抵消,所以

$$ssA_{\alpha\mu} = 0$$
. (15.7.16)

方程(15.7.9)和(15.7.11)立刻证明了

$$ss\omega_{\alpha}^* = 0 \tag{15.7.17}$$

和

$$ssh_{\alpha} = 0$$
. (15.7.18)

最后,^b

$$\begin{split} \delta_{\theta} s \omega_{\alpha} &= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\theta}(\omega_{\beta}\omega_{\gamma}) \\ &= \frac{1}{4} \theta \left(C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} \, \omega_{\delta} \omega_{\epsilon} \omega_{\gamma} - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \, \omega_{\beta} \omega_{\delta} \omega_{\epsilon} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \theta \, C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_{\delta} \omega_{\epsilon} \omega_{\beta} \, . \end{split}$$

但是, 乘积 $\omega_{\beta}\omega_{\delta}\omega_{\epsilon}$ 是反对称的, 所以雅克比等式(15.1.5)表明它也为零

$$ss\omega_{\alpha} = 0 . \tag{15.7.19}$$

现在考察两个场 ϕ_1 和 ϕ_2 的乘积,它们中的一个是 ψ , A, ω , ω^* 或h,也可以二者都是,并且它们不一定在同一时空点上.那么

$$\delta_{\theta}(\phi_1\phi_2) = \theta(s\phi_1)\phi_2 + \phi_1\theta(s\phi_2) = \theta\left\lfloor (s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2 \right\rfloor \,,$$

其中, 当φ₁是玻色场时, 符号±取正号, 当φ₁是费米场时, 则取负号. 即,

$$s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2$$
.

正如我们所看到的,由于 $\delta_{\theta}(s\phi_1) = \delta_{\theta}(s\phi_2) = 0$,BRST变换在 $s(\phi_1\phi_2)$ 上的效果是

$$\delta_{\theta} s(\phi_1 \phi_2) = (s\phi_1)\theta(s\phi_2) \pm \theta(s\phi_1)(s\phi_2) .$$

^b原书最后一个等号处有符号错误,但不影响结果. ——译者注

然而, $s\phi$ 总有一个与 ϕ 相反的统计, 所以将右边第一项中的 θ 移至左边会引入一个符号因子 \mp :

$$\delta_{\theta}s(\phi_1\phi_2) = \theta \Big[\mp (s\phi_1)(s\phi_2) \pm (s\phi_1)(s\phi_2) \Big] = 0 \; .$$

以这一方式继续下去,我们会看到,BRST变换作用在不同时空点的场的任何乘积上都是幂零的:

$$\delta_{\theta} s(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots) = 0$$

任何泛函F[6]都能写成这种乘积再加上c-数系数的多重积分之和,这样

$$\delta_{\theta} sF[\phi] = \theta ssF[\phi] = 0 . \qquad (15.7.20)$$

这样就补全了BRST变换幂零性的证明.

现在我们回到作用量(15.7.6)的BRST不变性验证.首先,注意到,对于任何仅是物质场和规范场的泛函,BRST变换就是一个规范变换,该规范变换的参量是无限小参量

$$\lambda_{\alpha}(x) = \theta \omega_{\alpha}(x) . \tag{15.7.21}$$

因此, 方程(15.7.6)中的第一项自动是BRST不变的:

$$\delta_{\theta} \int \mathrm{d}^4 x \,\mathscr{L} = 0 \,. \tag{15.7.22}$$

为了计算BRST变换在作用量(15.7.6)其它部分上的效果,要注意到它在规范固定函数上的效应就 是规范变换(15.7.21),所以

$$\delta_{\theta} f_{\alpha}[x; A, \psi] = \int \left. \frac{\delta f_{\alpha}[x; A_{\lambda}, \psi_{\lambda}]}{\delta \lambda^{\beta}(y)} \right|_{\lambda=0} \theta \, \omega_{\beta}(y) \, \mathrm{d}^{4} y$$
$$= \theta \int \mathscr{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi] \, \omega_{\beta}(y) \, \mathrm{d}^{4} y$$

或者以(15.7.3)的形式

$$\delta_{\theta} f_{\alpha}[x; A, \psi] = \theta \Delta_{\alpha}(x; A, \psi, \omega) . \qquad (15.7.23)$$

(注意, \mathscr{F} 是一个玻色量, 所以在这里将 θ 移至左边时没有符号变化.) 另外, 回忆起 $\delta_{\theta}\omega_{\alpha}^{*} = -\theta h_{\alpha} \pi \delta_{\theta} h_{\alpha} = 0.$ 因此, 在"新"作用量(15.7.6)的被积函数中, 除 \mathscr{L} 以外的项可以写成

$$\omega_{\alpha}^{*}\Delta_{\alpha} + h_{\alpha}f_{\alpha} + \frac{1}{2}\xi h_{\alpha}h_{\alpha} = s\left(\omega_{\alpha}^{*}f_{\alpha} + \frac{1}{2}\xi\omega_{\alpha}^{*}h_{\alpha}\right)$$
(15.7.24)

或者,以另一种形式

$$I_{\rm NEW} = \int d^4x \,\mathscr{L} + s\Psi \,\,, \tag{15.7.25}$$

其中

$$\Psi \equiv -\int d^4x \left(\omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha\right) \,. \tag{15.7.26}$$

BRST变换的幂零性立刻告诉我们 $s\Psi$ 和 $\int d^4x \mathscr{L}$ 都是BRST不变的.

在某种意义上,这一结果的逆方向也是成立的:我们会在17.2节看到,对于服从BRST不变性 以及拉格朗日量(15.7.25)其它对称性的可重整拉格朗日量,除了各种常系数的值会有一个变化外,

它必须采取方程(15.7.25)的形式. 但这还不足以确立这些理论的可重整性. BRST对称变换以非线性的方式作用在场上,而在这一情形下,拉格朗日量的对称性与矩阵元和Green函数的对称性之间不存在简单的联系. 利用下一章所发展的外场方法,我们将在17.2节证明, Feynman振幅中的紫外发散项(尽管有限部分不在此列)确实服从一种重整化后的BRST不变性,这使得可重整性的证明完整了.

方程(15.7.25)表明, 任何规范理论的物理部分都包含在, BRST算符的核(即, 一般的BRST不 变项 $\int d^4x \mathscr{L} + s\Psi$)模掉BRST变换的像(即, 形式为 $s\Psi$ 的项)后的那部分中. 任何幂零变换的核, 在 模掉该变换的像后, 称为构成该变换的上同调. 换另一说法, 一个规范理论的物理部分可以等同 为BRST算符的上同调.^[12] 一个基本的物理要求是, 物理态之间的矩阵元应该独立于我们对规范 固定函数 f_{α} 的选择, 换句话说, 矩阵元应该独立于对方程(15.7.25)中泛函 Ψ 的选择. 对于任意的矩 阵元 $\langle \alpha | \beta \rangle$, Ψ 的变化 $\delta\Psi$ 所引起的变化是

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = i\langle\alpha|\tilde{\delta}I_{\rm NEW}|\beta\rangle = i\langle\alpha|s\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle . \qquad (15.7.27)$$

(我们在这里使用波浪符是为了将规范固定函数中的这种任意变化与BRST变换或者规范变换区分开.)我们可以引入一个费米的BRST"核"Q,它的定义满足,对于任何场算符Φ,

$$\delta_{\theta} \Phi = \mathbf{i}[\theta Q, \Phi] = \mathbf{i}\theta [Q, \Phi]_{\mp} ,$$

换句话说,

$$[Q,\Phi]_{\mp} = \mathbf{i}s\Phi , \qquad (15.7.28)$$

根据Φ是玻色的还是费米的,符号分别为-和+. 那么BRST变换的幂零性就给出了

 $0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_{\mp}]_{\pm} = [Q^2, \Phi]_{-} .$

为了使其对于所有的算符Φ都成立, Q²要么为零, 要么正比于单位算符. 但是, 由于Q²有一个不为 零的鬼数^{**}, 它不可能正比于单位算符, 所以它必须为零:

$$Q^2 = 0 . (15.7.29)$$

从方程(15.7.27)和(15.7.28),我们得到

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|[Q,\tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle . \tag{15.7.30}$$

为了使其对于 Ψ 的所有变化 δ Ψ 都为零,必须有

$$\langle \alpha | Q = Q | \beta \rangle = 0 . \tag{15.7.31}$$

因此,物理态在幂零算符Q的核中.两个物理态,若它们仅相差Q的像中的一个态矢,即,形式 为Q|···>的态矢,显然,它们与所有其它物理态之间的矩阵元是相同的,因而在物理上是等价的. 因此,独立的物理态对应于Q的核模掉Q的像后中的态——即,它们对应于Q的上同调.

^{**}回忆鬼数的定义, 它对于 ω_{α} 为+1, 对于 ω_{α}^{*} 为-1, 对于所有的规范场和物质场则是零.

为了看到这在实际情形中是如何运作的,我们来考察一个纯电动力学的简单例子.[†] 取规范固定函数为 $f = \partial_{\mu}A^{\mu}$ 并积掉辅助场h, BRST变换(15.7.8)—(15.7.10)在这里是

$$s A_{\mu} = \partial_{\mu} \omega$$
, $s \omega^* = \partial_{\mu} A^{\mu} / \xi$, $s \omega = 0$. (15.7.32)

我们将场展成简正模^{††}

$$A^{\mu}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{2p^{0}}} \left[a^{\mu}(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot x} + a^{\mu*}(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x} \right] ,$$

$$\omega(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{2p^{0}}} \left[c(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot x} + c^{*}(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x} \right] ,$$

$$\omega^{*}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{2p^{0}}} \left[b(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot x} + b^{*}(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x} \right] .$$

(15.7.33)

匹配方程(15.7.28)两边e^{±ip·x}的系数给出

$$[Q, a^{\mu}(\mathbf{p})]_{-} = -p^{\mu}c(\mathbf{p}) , \qquad [Q, a^{\mu*}(\mathbf{p})]_{-} = p^{\mu}c^{*}(\mathbf{p}) ,$$

$$[Q, b(\mathbf{p})]_{+} = p^{\mu}a_{\mu}(\mathbf{p})/\xi , \qquad [Q, b^{*}(\mathbf{p})]_{+} = p^{\mu}a^{*}_{\mu}(\mathbf{p})/\xi , \qquad (15.7.34)$$

$$[Q, c(\mathbf{p})]_{+} = [Q, c^{*}(\mathbf{p})]_{+} = 0 .$$

考察任何满足物理条件(15.7.31)的态 $|\psi\rangle$:

$$Q|\psi\rangle = 0. \qquad (15.7.35)$$

那么,对于含有一个额外光子的态 $|e,\psi\rangle = e_{\mu}a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$,如果 $e_{\mu}p^{\mu} = 0$,它们就满足物理条 件 $Q|e,\psi\rangle = 0$.另外,态 $|\psi\rangle' \equiv b^{*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$ 满足

$$Q|\psi\rangle' = p^{\mu}a^*_{\mu}(\mathbf{p})|\psi\rangle/\xi , \qquad (15.7.36)$$

所以 $|e + \alpha p, \psi\rangle = |e, \psi\rangle + \xi \alpha Q |\psi\rangle'$,因而物理上的等价于 $|e, \psi\rangle$.由此我们得出 e^{μ} 物理上等价于 $e^{\mu} + \alpha p^{\mu}$,这就是通常的光子极化矢量上的"规范不变"条件.另一方面,

$$Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p}) \neq 0$$

所以不满足 $b^*|\psi\rangle$ 不物理条件(15.7.31). 另外, 对于任何 $e \cdot p \neq 0$ 的 e_{μ} ,

$$c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Qe_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle/e\cdot p$$

所以 $c^*|\psi\rangle$ 是BRST-恰当的,因而等价于零.因此,物理的Hilbert空间是没有鬼和反鬼的.

为了保持Lorentz不变性,我们必须要把 $a^{\mu}(\mathbf{p})$ 全部4个分量解释成湮灭算符,也就是说

$$0 = a_{\mu}(\mathbf{p})|0\rangle , \qquad (15.7.37)$$

[†]由于电动力学中的结构常数为零,方程(15.6.11)和(15.6.7)表明,这里鬼场不与其它场耦合. 然而,就用BRST对称 性识别物理态这一点而言,电动力学提供了一个很好的例子. 确实如此,在分析"入"态和"出"态上的物理条件时,我们 忽略了相互作用,所以,由于这个原因,处理非阿贝尔规范场论就像同时处理几个量子电动力学.

^{††}就像 $\omega^*(x)$ 并没有视为 $\omega(x)$ 的厄密共轭, $b^* n c^*$ 也不是c n b的共轭. 然而, 既然 $A^{\mu}(x)$ 是厄密的, 那么如果Q是厄密的, $\omega(x)$ 也将是厄密的.

其中 $|0\rangle$ 是BRST-不变的真空态. 但是, 从BRST-不变的作用量(例如, $\xi = 1$ 的作用量)所导出的正则对易关系给出

$$[a_{\mu}(\mathbf{p}), a_{\nu}^{*}(\mathbf{p}')]_{-} = \eta_{\mu\nu}\delta^{3}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \qquad (15.7.38)$$

这对应于Feynman规范中的传播子.这违反了量子力学通常的正定性规则,原因是方程(15.7.37)和 (15.7.38)给出^[13]

$$\langle 0|a_0(\mathbf{p}) a_0^*(\mathbf{p}')|0\rangle = -\langle 0|0\rangle$$
 . (15.7.39)

虽然如此,我们能够确信物理态之间的所有振幅满足通常的正定性条件,这是因为物理态满足方程(15.7.31),而对于这样的态,跃迁振幅与更加物理的规范下的振幅,例如Coulomb规范或轴向规范下的跃迁振幅,是相同的,而在那样的规范下,正定性或幺正性的问题是不存在的.

迄今为止所描述的Faddeev-Popov-De Witt形式理论,它所产生的作用量关于鬼场 ω_{α}^* 和 ω_{α} 必然是双线性的.对于规范固定函数为 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A_{\alpha}^{\mu}$ 的可重整Yang-Mills理论,这是足够的,但对于更普遍的情况,作用量关于鬼场仅是双线性还不够.例如,我们会在17.2节看到,在其它规范下,对于有4条外鬼线的圈图中的紫外发散,可重整Yang-Mills理论的拉格朗日密度中需要 $\omega^*\omega^*\omega\omega$ 项来充当它的抵消项.

幸运的是, Faddeev-Popov-De Witt形式理论仅代表生成一类等价拉格朗日量的一种方法, 其中拉格朗日量等价是指它们所产生的幺正S-矩阵相同. BRST形式理论提供了一个更加普遍 的方法, 它完全省去了Faddeev-Popov-De Witt形式理论. 在这一方法中, 取作用量为物质场, 规 范场, ω^A场, ω*^A场以及h^A场最一般的定域泛函, 但满足鬼数为零, 并且在BRST变换(15.7.7)— (15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性下不变. (对于可重整理论, 还要限制拉格朗日密度是 量纲小于等于4的算符, 但这个约束在下面的讨论中没有任何作用.) 我们会在下一节证明, 在一个 比Yang-Mills理论更普遍的情形下, 这类作用量的最普遍形式是两项的和, 其中第一项仅是物质场 和规范场(统称为φ)的泛函, 而第二项由BRST算符s作用在鬼数为–1的任意泛函Ψ上产生:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s \,\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h] , \qquad (15.7.40)$$

就像Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.7.25), 只不过 $s \Psi$ 现在关于鬼场和反鬼场不一定是双线性的.

通过与之前相同的讨论,我们得到这样的结论:对于被BRST算符Q所湮灭的态,它的S-矩阵 元与方程(15.7.40)中亚的选择无关,所以只要存在使鬼场退耦的亚的选择,那么鬼场在一般情形下 都会退耦.在Yang-Mills理论中,对轴向规范中的理论进行量子化提供了一个这样的亚,所以在这 样的理论中,不仅是那些如(15.7.26)那样由Faddeev-Popov-De Witt形式理论生成的选择,对于泛 函 $\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h]$ 的任意选择,鬼场都会退耦.

我们可以更进一步,并且可以完全摆脱对非Lorentz不变规范下的正则量子化的依赖,例如对 轴向规范中正则量子化的依赖. 再一次,取作用量为规范场,物质场,ω^A场,ω^{*A}场以及h^A场的最 一般泛函,满足鬼数为零,且在BRST变换(15.7.7)—(15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性 不变,其中整体对称性包含Lorentz不变性. 从作用量的BRST不变性中,我们可以推断出存在一个 守恒的BRST幂零算符Q. 而把鬼场和反鬼场当做厄密场时,Q也将是厄密的. 像上面一样,物理态 的空间定义为被Q湮灭的态所构成的空间,其中,如果两个态的差是Q作用另一个态,那么这两个 态视为等价. 已经证明了,对于Yang-Mills理论,这一空间没有鬼和反鬼且有一个正定的范数,并 且这一空间中的S-矩阵是幺正的. 这一步骤称为*BRST*量子化. 它已经被扩展至含有其它定域对称性的理论,例如广义相对论和弦论. 不幸的是,到现在为止, BRST上同调无鬼以及作用在该空间上的*S*-矩阵幺正,看起来必须要在每一种情形下分别进行证明. 这些证明中的关键是,对于每一个负范的自由度,例如Yang-Mills理论中规范场的时间分量,存在一个定域对称性使得这一自由度被移除了.

* * *

尽管我们不会在这里使用它,但是关于鬼和BRST对称性有一个非常漂亮的几何解释^[14],我 们应该在这里提及一下.规范场 A_{α}^{μ} 可以写成1-形式 $A_{\alpha} \equiv A_{\alpha\mu}dx^{\mu}$,其中 dx^{μ} 是一组反对易c-数.(参 看5.8节)在一个扩张空间中,它可以与鬼场结合组成1-形式 $\mathscr{A}_{\alpha} \equiv A_{\alpha} + \omega_{\alpha}$.另外,普通的外 导数d $\equiv dx^{\mu}\partial/\partial x^{\mu}$ 可以与BRST算符s相结合,它们构成了扩张空间下的外导数 $\mathscr{D} = d + s$,由 于 $s^2 = d^2 = sd + ds = 0$,这一外导数是幂零的.

下一章会介绍外场方法,在第17章,我们将用这一方法并结合BRST对称性,完成对非阿贝尔 规范场论可重整性的证明.

15.8 BRST**对称性的推广***

上一节所描述的BRST对称性有一个很有用的推广,使得我们可以在一大类理论的量子化中使用它,而这些理论中包括广义相对论和弦论.在所有这些情形中,我们处理的作用量 $I[\phi]$ 和测度 $[d\phi] \equiv \prod_r d\phi^r$ 在如下的无限小变换下不变:

$$\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A \delta_A \phi^r \ . \tag{15.8.1}$$

这是缩略"De Witt"记号,其中r和A包含时空坐标和离散指标,而求和包含对这些坐标的积分. 例如,对于规范变换(15.1.9),指标A由群指标 α 和时空坐标x构成,并有 $\epsilon^{\alpha x} \equiv \epsilon^{\alpha}(x)$,而指标r由 矢量指标 μ ,群指标 α 以及时空坐标x组成,并有 $\phi^{\mu\alpha x} \equiv A^{\alpha}{}_{\mu}(x)$;以方程(15.8.1)的记法,在变 换(15.1.9)中变分 $\delta_{A}\phi^{r}$ 读作

$$\delta_{\beta y} \phi^{\mu \alpha x} = \delta^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta^4(x-y) + C^{\beta}{}_{\gamma \alpha} \phi^{\mu \gamma x} \delta^4(x-y) \; .$$

正如上一节所讨论的特殊情况——Yang-Mills理论,BRST不变性可用来替代这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述,而即便Faddeev-Popov-De Witt方法失效了,BRST不变性依旧是适用的.然而,为了引入BRST不变性,在这里,我们着手于那些有着一般定域对称性的理论,从这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述出发,然后再考察进一步的推广.

沿用导出方程(15.5.21)的讨论,我们就获得了广义Faddeev-Popov-De Witt定理:

$$\frac{C}{\Omega} \int [\mathrm{d}\phi] \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\phi]} \,V[\phi] = \int [\mathrm{d}\phi] \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\phi]} \,B[f[\phi]] \,\mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \,V[\phi] \,, \tag{15.8.2}$$

其中 $V[\phi]$ 是 ϕ "的任意泛函,并满足在规范变换(15.8.1)下不变; $f_A[\phi]$ 是一组 ϕ "的规范固定泛函^{**}, 对它的选择要使得"矩阵" $\delta_A f_B[\phi]$ 有一个非零的行列式,而B[f]是 f_A 的泛函,它的选择多少有些任

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^{**}我们用相同的字母*A*, *B*等来标记*f*_A和规范变分 δ_A , 是为了强调规范固定泛函的数目要与独立规范变换的数目相同. 然而, 在某些情形下, 例如在弦理论中, 即便指标a与规范变分 δ_A 上的指标*A*取的值完全不同, 只要它们所取的值"个数相同", 就会很自然地使用*f*^a. 只要我们能够定义*f*_A = $c_{Aa}f^a$, 其中 c_{Aa} 是场无关且非奇异的, 那么在现在的形式理论中就不需要作出改变.

意(例如 $\prod_A \delta(f_A)$.) 常数Ω是规范群的体积元, 而常数C(就像方程(15.5.19)那样)定义为

$$C \equiv \int [\mathrm{d}f] B[f] . \qquad (15.8.3)$$

我们已经看到, 方程(15.8.2)在规范理论中的重要性就在于, 它告诉我们右边的积分独立于规范固 定泛函*f_A*的选择, 而仅通过常数*C*与*B*[*f*]相关. 在这里, 我们可以给通常无限大的规范群体积Ω赋 予某些含义, 就像我们在有限时空晶格上的规范理论中所做的那样, 这样, 方程(15.8.2)在作为左 边的积分公式时也可以有值.

为了定义幂零的BRST变换,我们必须先把泛函B[f]表示成Fourier变换

$$B[f] = \int [\mathrm{d}h] \, \exp(\mathrm{i}h^A f_A) \,\mathscr{B}[h] \,, \qquad (15.8.4)$$

其中 $[dh] \equiv \prod_{A} dh^{A}$. 另外, 行列式可以表示成对费米c-数场[†] ω^{*A} 和 ω^{A} 的积分:

$$\operatorname{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \propto \int [\mathrm{d}\omega^*] [\mathrm{d}\omega] \, \exp\left(\mathrm{i}\omega^{*B}\omega^A \delta_A f_B\right) \,, \qquad (15.8.5)$$

其中 $[d\omega^*] \equiv \prod_A d\omega^{*A} \overline{m}[d\omega] \equiv \prod_A d\omega^A$,像往常一样," \propto "是指相差一个与场无关的比例因子.将这些代入方程(15.8.2),就给出了规范固定路径积分的普遍公式

$$\int [\mathrm{d}\phi] \exp\left(\mathrm{i}I(\phi)\right) B[f[\phi]] \operatorname{Det}(\delta_A f_B[\phi]) V[\phi]$$

$$\propto \int [\mathrm{d}\phi] [\mathrm{d}h] [\mathrm{d}\omega^*] [\mathrm{d}\omega] \exp\left(\mathrm{i}I_{\mathrm{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*]\right) \mathscr{B}[h] V[\phi] , \qquad (15.8.6)$$

其中INEW是新的总作用量:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] + h^A f_A[\phi] + \omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B[\phi] . \qquad (15.8.7)$$

我们在15.6节提到过,在对所有 ϕ "的积分中包含哪些仅相差规范变换(15.8.1)的 ϕ ",而我们可以把鬼场看成对这一积分的补救.因为鬼场是费米场,所以鬼线构成的圈会携带额外的负号,这使得这些圈抵消了对规范等价的 ϕ 的积分.但为了使其成功运作,鬼场 ω ^A的数目必须要和独立规范变换的数目一样多.即,既然 ω ^A是独立的,那么规范变换(15.8.1)必须全是独立的.对于Yang-Mills理论中的规范变换和广义相对论中的坐标变换,正是这种情况,但不总是这样.理论的规范变换不独立的经典例子是p-形式规范场,我们在8.8节描述过这一理论.p-形式A(p阶反对称张量)承载规范变换 $A \rightarrow A + d\phi$,其中 ϕ 是(p-1)-形式,而d ϕ 是它的外导数(反对称化导数).由于d是幂零的,当 $p \ge 2$ 时,我们可以让 ϕ 偏移d ψ 但不改变规范变换,所以在规范变换的规范变换下存在一个不变性,其中变换参量是(p-2)-形式 ψ .在这种情况下,由于引入了太多的鬼场,我们必须要进行补偿,进而又要引入"鬼场的鬼场".^[15]当 $p \ge 3$ 时,我们需要通过引入"鬼场的鬼场的鬼场" δ "进行补偿,以此类推.在下文中,我们将假定规范变换(15.8.1)都是独立的,使得鬼场 ω ^A(和反鬼场 ω *^A)是我们需要的全部.

尽管原始对称性(15.8.1)被非规范不变泛函*B*[*f*]的插入所消除,但是,在无限小BRST变换下, 新的总作用量有一个恰当对称性

$$\chi \to \chi + \theta \, s\chi \,\,, \tag{15.8.8}$$

[†]在弦论和其它地方,通常会发现鬼场 ω^{*A} 和 ω^{A} 分别写成了 $b^{A}(\mathbf{g}b_{A})$ 和 c^{A} .
其中 χ 是 ϕ^r , ω^A , ω^{*A} 或 h^A 中的任意一个量; θ 是无限小反对易c-数; 而s是Slavnov(斯拉夫诺夫)算符

$$s = \omega^A \,\delta_A \phi^r \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C \, f^A{}_{BC} \, \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} - h^A \, \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} \,. \tag{15.8.9}$$

在方程(15.8.9)中,下标*L*代表左微分,它的定义满足如果 $\delta F = \delta \chi G$,那么 $\delta_L F / \delta \chi = G$,而 f^A_{BC} 是对易关系中所出现的结构常数^{††}

$$[\delta_B, \delta_C] = f^A{}_{BC}\delta_A . (15.8.10)$$

 f^{A}_{BC} 在非阿贝尔规范理论和弦理论中是场无关的,尽管不总是这样,但BRST形式理论没有限制在这一情形中.直接的计算给出

$$s^{2} = \frac{1}{2}\omega^{A}\omega^{B} \left[\delta_{A}\phi^{s} \frac{\delta_{L}(\delta_{B}\phi^{r})}{\delta\phi^{s}} - \delta_{B}\phi^{s} \frac{\delta_{L}(\delta_{A}\phi^{r})}{\delta\phi^{s}} - f^{C}{}_{AB}\delta_{C}\phi^{r} \right] \frac{\delta_{L}}{\delta\phi^{r}} - \frac{1}{2}\omega^{B}\omega^{C}\omega^{D} \left[f^{E}{}_{BC}f^{A}{}_{DE} + \delta_{D}\phi^{r} \frac{\delta_{L}f^{A}{}_{BC}}{\delta\phi^{r}} \right] \frac{\delta_{L}}{\delta\omega^{A}} .$$
(15.8.11)

因此, BRST变换是幂零变换的条件等价于对易关系(15.8.10), 再加上一个相容性条件

$$f^{E}_{[BC}f^{A}_{D]E} + \delta_{[D}\phi^{r}\left(\delta_{L}f^{A}_{BC]}/\delta\phi^{r}\right) = 0 , \qquad (15.8.12)$$

其中, 下标中的括号代表对括号内的指标*B*, *C*和*D*做反对称化.按照导出通常的Jacobi等式的方法, 方程(15.8.12)可以从对易关系(15.8.10)中导出, 对于含有场相关结构常数的对称性, 它取代了Jacobi等式.

为了证明变换(15.8.8)是 I_{NEW} 的对称性,我们注意到(回忆起 θ 与 ω^{*A} 反对易)方程(15.8.7)可以 重写为

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] - s(\omega^{*A} f_A) .$$
(15.8.13)

因为BRST变换在场 ϕ 上的效果就是规范变换(15.8.1),只不过其中的 ϵ^A 被换成了 $\theta\omega^A$,而 $\theta\omega^A$ 与所 有的 ϕ^r 对易,所以 $I[\phi]$ 项是BRST-不变的.由于BRST变换是幂零的,所以 $s(\omega^{*A} f_A)$ 项是BRST不 变的.

由于几个原因,我们需要考察一类更广的作用量,这类作用要求在BRST变换(15.8.8)下不变, 但超出了Faddeev-Popov-De Witt方法所构建出的作用量的范围.这些作用量给出了物理上合理 的结果,作为迈向证明该陈述的一步,我们现在证明如下的普遍结果(在上一节使用过),最普遍的 鬼数为零的BRST-不变泛函是两项的和,其中第一项仅是场φ的泛函,而另一项由BRST算符s作用 在鬼数为–1的任意泛函Ψ上给出:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h] , \qquad (15.8.14)$$

Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.8.13)就是其中的一个例子. 简言之, 构成BRST上同调的规范 不变泛函 $I[\phi]$ 仅是场 ϕ^r 的泛函.

为了证明方程(15.8.14),我们注意到BRST变换(15.8.8)—(15.8.9)并不改变 h^A 场和 ω^{*A} 场的总数,所以,如果我们将I展成 I_N 项的级数,其中 I_N 包含总数为N的 h^A 场和 ω^{*A} 场,那么在sI中,N不同的项之间不存在抵消,所以每一项必须分别是BRST-不变的:

$$sI_N = 0$$
. (15.8.15)

^{††}例如,对于作用在物质场 $\psi(x)$ 上的规范变换,我们有 $\delta_{\beta y}\psi(x) = it_{\beta}\psi(x)\delta^4(x-y)$,因而 $\delta_{\beta y}\delta_{\gamma z}\psi(x) = -t_{\gamma}t_{\beta}\psi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$.因此,在这一情况下,我们有 $f^{\alpha x}{}_{\beta y \gamma z} = C^{\alpha}{}_{\beta \gamma}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$.

我们接下来引入所谓的Hodge(霍奇)算符:

$$t \equiv \omega^{*A} \frac{\delta}{\delta h^A} \ . \tag{15.8.16}$$

可以直接验证反对易关系

$$\{s,t\} = -\omega^{*A} \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} - h^A \frac{\delta}{\delta h^A} . \qquad (15.8.17)$$

那么,用算符 $\{s,t\}$ 作用 I_N 并利用方程(15.8.15)就给出了

$$stI_N = -NI_N$$
, (15.8.18)

所以,除了 I_0 外,每个 I_N 都是BRST-恰当的,也就是说,它可以写成算符s作用其它某个泛函上.因此,完整的泛函I可以写成 $I_0 + s\Psi$ 的形式,其中

$$\Psi = -\sum_{N=1}^{\infty} \frac{tI_N}{N} .$$
 (15.8.19)

由定义可知 I_0 独立于 ω^{*A} 和 h^A ,并且,既然我们假定了它的鬼数为零,它也必须独立于 ω^A ,这正是所要证明的.

为了证明, 当规范固定泛函 Ψ 的定义改变时, 物理矩阵元是不变的, 我们定义费米"荷"Q, 使得 任意算符 Φ 在BRST变换下的变化是

$$\delta_{\theta} \Phi = \mathbf{i}[\theta Q, \Phi] = \mathbf{i}\theta[Q, \Phi]_{\mp} \tag{15.8.20}$$

其中, 根据Φ是玻色的还是费米的, 分别在 $[x, y]_{\mp} \equiv xy \mp yx$ 使用上部的符号和下部的符号. 如同上 一节, 这样, BRST变换的幂零性就告诉我们 $Q^2 = 0$. 当且仅当物理态 $|\alpha\rangle$ 和 $\langle\beta|$ 满足

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q=0 , \qquad (15.8.21)$$

规范不变算符在物理态之间的矩阵元才独立于¥的选择,这一条件又一次告诉我们,物理上可分辨的物理态与Q的上同调中的元素一一对应.因此,如果我们能找到某个¥,就像Yang-Mills理论中的轴向规范,使得在这个规范下鬼场不与其它场相互作用,那么对于任意的规范固定泛函¥,广义BRST-不变作用量(15.8.14)就会产生物理上合理的结果.如果¥的这一无鬼(ghost-free)选择对于实际运算而言并不方便,就像轴向规范由于违反了Lorentz不变性而不方便,我们可以选择任何我们想要的规范固定泛函¥,并依旧可以确信,当初态和末态没有鬼时,存在幺正的S-矩阵.

这一方法在弦论中运作良好,在弦论中,所谓的光锥量子化发挥了轴向规范的作用.但在其它 理论中,例如广义相对论,无法选择一个坐标系使得鬼场退耦.这样的理论可以用上一节末尾所描述的BRST-量子化方法进行处理,用BRST-不变性证明*S*-矩阵在无鬼的物理Hilbert空间中是幺正的.

发现^[17] "反-BRST" 对称^[18]下的不变性表明了,除去表象,在ω^A和ω^{*A}的角色之间有相似之处,而这两个场的角色依旧保持着些许神秘.

15.9 Batalin-Vilkovisky形式理论^{*}

这一节将会描述一个强有力的形式理论, 它被大家称为Batalin-Vilkovisky^[19]方法. 它是在拉格朗日框架下发展起来的, 但是它根植于更早的Batalin-Fradkin-Vilkovisky形式理论,^[20]而这一形式理论是在哈密顿框架下导出的. (在微扰论的意义下, 已经证明这两种方案是等价的.^[21]) 我们 会在17.1节看到, 为了处理规范理论的重整化, Zinn-Justin^[22](齐恩-朱斯坦)甚至在此之前就发展 了同样的形式机制. 至少有如下三个方面证明这一形式理论的价值是无可估量的:

(i) 直到现在, 我们所考察的仅是不可约系统, 并且它的代数在方程(15.8.10)的意义下封闭. 在某 些理论中, 例如超引力(没有辅助场)^[23], 代数是开的: 仅当场方程成立时, 代数才是封闭的, 这使 得方程(15.8.10)中会出现正比于 $\delta I/\delta \chi^n$ 的项. 这样, 在相容性条件(15.8.12)中也会出现类似的项. 那么, 方程(15.8.11)就表明了 s^2 在这样的理论中并不为零, 而是等于导数 $\delta I/\delta \chi^n$ 的线性组合. 我们 会在这一节看到, Batalin-Vilkovisky方法使得我们能够处理非常宽泛的规范理论, 这些理论中包 含那些有着开规范对称代数或者可约规范对称代数的理论.

(ii) 就像上面所提及的, Batalin-Vilkovisky形式理论的重要方面就在于, 它原本是Zinn-Justin为证 明规范理论的可重整性而发展的. 其中的关键点是, 尽管背景场中所有单粒子不可约图的和不服 从原始作用量的BRST对称性, 但是它共享了作用量的关键性质之一, 即称为主方程的性质, 我们 将在17.1节对其进行阐述.

(iii) Batalin-Vilkovisky方法提供了一个方便的技巧用以分析量子效应所造成的作用量对称性的可能破坏.由于这个原因,它将用于22.6节.

Batalin-Vilkovisky形式理论的出发点是对于理论中的每个场引入所谓的"反场",我们 令 χ^n 取遍所有的场 ϕ^r , ω^A , ω^{*A} 和 h^A ,并对每一个 χ^n ,我们引入外反场^{**} χ^{\ddagger}_n ,它与BRST-变换 后的场 $s\chi^n$ 有着相同的玻色统计或费米统计,但鬼数相反.即, χ^{\ddagger}_n 与 χ^n 有着相反的统计,但它的鬼 数等于-gh(χ^n)-1,其中gh(χ^n)是 χ^n 的鬼数.在最简单的情况下,包括Yang-Mills理论和量子引 力,要给原始规范不变作用量 $I[\phi]$ 添加反场 χ^{\ddagger}_n 与 $s\chi^n$ 相耦合的一项,这给出了作用量.

$$S[\chi, \chi^{\ddagger}] \equiv I[\phi] + (s\chi^n)\chi_n^{\ddagger}$$
 (15.9.1)

它满足所谓的主方程(master equation)

$$0 = \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n} , \qquad (15.9.2)$$

其中"*R*"和"*L*"在这里代表右微分和左微分.为了验证它,注意到方程(15.9.2)中反场的零阶项正 好给出规范不变性条件

$$0 = \left(s\phi^r\right)\frac{\delta_L I}{\delta\phi^r} = \omega^A \,\delta_A I[\phi] \,, \qquad (15.9.3)$$

而反场 ϕ_n^{\ddagger} 的线性项提供了幂零条件:

$$0 = \left(s\chi^m\right) \frac{\delta_L(s\chi^n)}{\delta\chi^m} = s^2\chi^n .$$
(15.9.4)

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^{**}在这里使用符号‡而不是最通常的*,是为了强调它与复共轭或电荷共轭无关.特别地,反鬼场 ω^{*A} 与鬼场 ω^{A} 的反场 ω_{A}^{\dagger} 并不相同.

 χ_n^{\ddagger} 是外场,在用 $S[\chi, \chi^{\ddagger}]$ 计算S-矩阵之前,我们必须要赋予它合适的值.由于这个原因,我们引入一个任意的费米泛函 $\Psi[\chi]$,它的鬼数为–1,并令[†]

$$\chi_n^{\ddagger} = \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n} \ . \tag{15.9.5}$$

这样, 方程(15.9.1)就变成

$$S[\phi, \delta\Psi/\delta\chi] = I[\phi] + (s\chi^n)\delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n = I[\phi] + s\Psi[\chi].$$
(15.9.6)

与方程(15.8.14)相比较表明它与规范固定泛函 $I_{\text{NEW}}[\chi]$ 是相同的.因此,利用与上一节相同的讨论可以得出这样的结论:物理矩阵元不被 Ψ 的微小变化所影响.Faddee-Popov-De Witt方法构建的作用量(15.8.7)对应于选择 $\Psi = -\omega^{*A} f_A$,这意味着 $\phi_r^{\ddagger} = \omega^{*A} \delta f_A / \delta \phi^r$, $\omega_C^{\ddagger} = 0$,以及 $\omega_A^{*\ddagger} = -f_A$.

迄今为止,并没有建立任何新的东西.第一个创新点是,通过令 $S[\chi,\chi^{\ddagger}]$ 是反场 χ_{n}^{\ddagger} 的非线性泛 函,主方程(15.9.2)可以用于更广泛的理论.(对于可约理论,就像上一节所讨论的那样,对于 χ^{n} 中 的鬼场,我们要引入鬼场的鬼场,以及相应的反场.)像之前一样,我们取 χ_{n}^{\ddagger} 的统计为与 χ^{n} 相 反的统计,并令它的鬼数等于 $-gh(\chi^{n}) - 1$,并且我们要求 $S[\chi,\chi^{\ddagger}]$ 是鬼数为零的玻色算符.因 为 ω^{*A} 和 h_{A} 有着线性BRST变换,所以影响其它 χ^{n} 的复杂性不会影响 ω^{*A} 和 h_{A} (在这一点上,可参 看16.4节),所以它们和它们的反场进入作用量 $S[\chi,\chi^{\ddagger}]$ 的方式与它们进入方程(15.9.1)的方式相同. 即,

$$S = S_{\min}[\phi, \omega, \phi^{\ddagger}, \omega^{\ddagger}] - h^A \, \omega_A^{\ast \ddagger} \,, \tag{15.9.7}$$

其中 ϕ_r^{\dagger} , ω_A^{\dagger} 和 $\omega_A^{*\dagger}$ 是 ϕ^r , ω^A 和 ω^{*A} 的反场, 它们的鬼数分别是-1, -2和0. (15.9.7)中的最后一项对 主方程没有任何影响, 所以 S_{\min} 凭借自身满足主方程.^{††}

因为Smin的鬼数为零,它的反场级数展开必须采取如下的形式

$$S_{\min} = I[\phi] + \omega^{A} f_{A}^{r}[\phi] \phi_{r}^{\ddagger} + \frac{1}{2} \omega^{A} \omega^{B} f^{C}{}_{AB}[\phi] \omega_{C}^{\ddagger} + \frac{1}{2} \omega^{A} \omega^{B} f^{rs}{}_{AB}[\phi] \phi_{r}^{\ddagger} \phi_{s}^{\ddagger} + \omega^{A} \omega^{B} \omega^{C} f^{rD}{}_{ABC}[\phi] \phi_{r}^{\ddagger} \omega_{D}^{\ddagger} + \frac{1}{2} \omega^{A} \omega^{B} \omega^{C} \omega^{D} f^{EF}{}_{ABCD}[\phi] \omega_{E}^{\ddagger} \omega_{F}^{\ddagger} + \cdots$$

$$(15.9.8)$$

主方程(15.9.2)中反场的零阶项(因而也就是ω^A的一阶项)给出

$$0 = f_A^r[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r} , \qquad (15.9.9)$$

这正是说 [] 何] 在如下变换下不变

$$\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f^r_A[\phi] , \qquad (15.9.10)$$

其中 ϵ^A 是任意的无限小量.主方程中右正比于 ϕ_s^{\dagger} 并左正比于 $\omega^A \omega^B$ 的项给出

$$0 = f_A^r[\phi] \frac{\delta f_B^s[\phi]}{\delta \phi^r} - f_B^r[\phi] \frac{\delta f_A^s[\phi]}{\delta \phi^r} + f_{AB}^C[\phi] f_C^s[\phi] + \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r} f_{AB}^{rs}[\phi] , \qquad (15.9.11)$$

[†]在这里没有必要区分左微分和右微分,这是因为 χ^n 或 $\delta\Psi/\delta\chi^n$ 中必有一个是玻色的.

^{††}场 ϕ^r , ω^A , ϕ_r^{\ddagger} , ω_A^{\ddagger} 有时被称为最小变量(*minimal variables*), 而像 ω^{*A} 和 h_A 这样的场, 它们和它们的反场以双线性的方式进入作用量, 就像方程(15.9.7)中那样, 它们被称为平庸对(*trivial pairs*).

当场方程 $\delta I/\delta \phi = 0$ 成立时,这变成了变换(15.9.10)的对易关系(结构常数为 $f^{C}_{AB}[\phi]$). 主方程中反场的其它线性项左正比于 $\omega^{A}\omega^{B}\omega^{C}$ 并右正比于 ω_{D}^{\ddagger} ,它给出

$$0 = f_{[A}^{r}[\phi] \frac{\delta f^{D}{}_{BC]}[\phi]}{\delta \phi^{r}} - f^{E}{}_{[AB}[\phi] f^{D}{}_{C]E}[\phi] + f^{rD}{}_{ABC}[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^{r}} , \qquad (15.9.12)$$

其中方括号代表对括号内的指标*A*, *B*和*C*做反对称化. 当场方程成立时, 这变成广义Jacobi等式(15.8.12). 为了对称性条件(15.9.9)(假定 f_A^r 构成规范对称性的完备基)的相容性, 方程(15.9.11)是必须的, 而为了对易关系(15.9.11)的相容性, 方程(15.9.12)又是必须的. 注意到, 方程(15.9.11)和(15.9.12)中正比于 $\delta I[\phi]/\delta \chi$ 的那些项, 它们来源于 S_{\min} 中反场的二次项, 由于它们正比于 $\delta I[\phi]/\delta \chi$, 所以当场方程成立时, 它们为零, 并且在这一意义下, 它们是开对称性代数的特征. 主方程中反场的二阶项或更高阶项包含了 S_{\min} 中反场的三阶项和/或更高阶项, 这提供了方程(15.9.11)和(15.9.12)的相容性条件, 相容性条件的相容性条件, 等等. Batalin-Vilkovisky形式理论的优点之一正是把所有这些相容性条件全部并入一个主方程中.

主方程可以重新解释为*S*在广义BRST变换下不变的陈述.为了看到这一点,并为了将来做准备,引入一种称为反括号(*antibracket*)的形式工具将是非常有帮助的.现在回到我们上一节的记号,两个一般泛函*F*[χ, χ[‡]]和*G*[χ, χ[‡]]的反括号定义为

$$(F,G) \equiv \frac{\delta_R F}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L G}{\delta \chi_n^{\ddagger}} - \frac{\delta_R F}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L G}{\delta \chi^n} .$$
(15.9.13)

注意到, 像S这样的玻色泛函, 它对玻色变量或费米变量的右泛函导数和左泛函导数分别等于彼此 或等于彼此的倒数. 既然 χ_n^{\dagger} 和 χ^n 总是一个玻色的而另一个是费米的, 由此得出, 对于反括号(S, S), 如果我们逆转左微分和右微分, 方程(15.9.13)右边第二项会改变符号

$$\frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n} = -\frac{\delta_L S}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = -\frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \,.$$

(最后一步之所以成立是因为,这里有一个因子是玻色的,进而它们的次序是无关紧要的.)我们看到,对于(*S*,*S*),方程(15.9.13)右边第二项是第一项的倒数.因此,主方程可以写成要求*S*与其自身的反括号为零:

$$(S,S) = 0 . (15.9.14)$$

这是不平庸的要求,因为反括号有一般的对称性质

$$(F,G) = \pm(G,F)$$
, (15.9.15)

其中, 当*F*和*G*都是玻色时, 符号取+1, 否则取-1. 特别地, 如果*F*是费米的, (*F*, *F*)自动为零, 但如果*F*是玻色的, 就不会这样.

广义BRST变换定义为

$$\hat{\delta}_{\theta}\chi^{n} = \theta \frac{\delta_{R}S}{\delta\chi^{\ddagger}_{n}} = -\theta(S,\chi^{n}) , \qquad (15.9.16)$$

$$\hat{\delta}_{\theta}\chi_{n}^{\ddagger} = -\theta \frac{\delta_{R}S}{\delta\chi^{n}} = -\theta(S,\chi_{n}^{\ddagger}) . \qquad (15.9.17)$$

其中 θ 是无限小的费米参量. (当S的形式为(15.9.1)时, χ 的变换与原始BRST变换 $\hat{\delta}_{\theta}\chi^{n} = \theta s \chi^{n}$ 相同.) 为了计算这一变换在一般泛函上的效果, 我们注意到反括号像导数一样作用, 也就是说

$$(F, GH) = (F, G)H \pm G(F, H)$$
, (15.9.18)

其中,如果*G*是费米的而*F*是玻色的,那么符号取-1,否则取+1.如果*G*和*H*是 χ 和 χ^{\ddagger} 的任意泛函并 满足 $\hat{\delta}_{\theta}G = -\theta(S,G)$ 和 $\hat{\delta}_{\theta}H = -\theta(S,H)$,那么

$$\hat{\delta}_{\theta}(GH) = -\theta(S,G)H - G\theta(S,H) = -\theta[(S,G)H \pm G(S,H)] ,$$

其中,根据G是玻色的或费米的,符号分别取+或-.令方程(15.9.18)中的F等于玻色泛函S,那么我们就看到

$$\hat{\delta}_{\theta}(GH) = -\theta(S, GH)$$
.

再加上方程(15.9.16)和(15.9.17), 这表明, 对于任意的泛函F, 如果它能变形成场与反场的乘积之和, 那么

$$\hat{\delta}_{\theta}F = -\theta(S,F) . \tag{15.9.19}$$

主方程(15.9.14)可以解释为如下的陈述,这些广义BRST变换使得S不变

$$\hat{\delta}_{\theta}S = -\theta(S,S) = 0$$
. (15.9.20)

就像原始的BRST变换,这一对称变换是幂零的.为了看到这一点,我们使用反括号的Jacobi恒等式

$$\pm (F, (G, H)) + \widehat{\mathfrak{k}} \not= 0, \qquad (15.9.21)$$

其中,如果F和H是玻色的,第一项的符号为–,否则为+,对F,G和H的其它两个轮换取相应的符号.取F = G = S,方程(15.9.21)变成

$$0 = \mp(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) - (S, (H, S)) = \mp 2(S, (S, H)) \mp (H, (S, S))$$

其中,如果H是玻色的,符号取-,如果H是费米的,符号取+.这样,主方程(15.9.14)就给出了幂零条件

$$(S, (S, H)) = 0$$
. (15.9.22)

由于这一对称性,主方程的解是不唯一的.例如,方程(15.9.22)表明对于任何给定的解S,我们 能够发现另一解,该解由如下的无限小变换给出

$$S' = S + (\delta F, S) , \qquad (15.9.23)$$

其中 $\delta F \neq \chi \pi \chi^{\dagger}$ 的无限小泛函,为了使S'是玻色的且鬼数为零, δF 必须是费米的且鬼数为–1,除 这些要求外,它是任意的.特别地,取 δF 为费米泛函 $\epsilon \Psi$,使它仅是 χ^n 的泛函,这样就给出

$$S'[\chi,\chi^{\ddagger}] = S[\chi,\chi^{\ddagger}] + \epsilon \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^{\ddagger}} = S\left[\chi,\chi^{\ddagger} + \epsilon \frac{\delta \Psi}{\delta \chi}\right] .$$
(15.9.24)

这些无限小变换可以被平庸地积掉, 进而表明, 如果我们将反场偏移至新的变量 $\chi_n^{\dagger'} \equiv \chi_n^{\dagger} - \delta \Psi / \delta \chi^n$, 主方程依旧是满足的.

变换(15.9.23)是通常所说的正则变换的一个特殊情况,在这里为了与第7章的正则变换相区分,称其为"反正则变换".反正则变换是场和反场的任意变换,它可以是有限小或无限小的,但它保持如下的基本反括号关系不变:

$$(\chi^n, \chi^{\ddagger}_m) = \delta^n_m , \qquad (\chi^n, \chi^m) = (\chi^{\ddagger}_n, \chi^{\ddagger}_m) = 0 .$$
 (15.9.25)

例如,考察由无限小费米算符 δF 生成的无限小反正则变换,在该变换下,任何的玻色泛函或费米泛函G变换到

$$G \to G' = G + (\delta F, G)$$
 . (15.9.26)

可以很容易证明这确实不改变基本反括号(15.9.25). 由于这一原因, 注意到两个泛函G和H的反括 号变换到(G', H'), 它到一阶无限小是

$$(G', H') = (G, H) + ((\delta F, G), H) + (G, (\delta F, H))$$
.

利用Jacobi恒等式(15.9.21), 这变成

$$(G', H') = (G, H) \pm (\delta F, (G, H)) , \qquad (15.9.27)$$

其中,如果*G*和*H*都是玻色的,符号取+,否则取-.特别地,如果(*G*,*H*)是c-数,那么它在反正则变 换下不变.(这是证明变换(15.9.23)保持主方程不变的另一方法.)场和反场的反括号(15.9.25)是c-数,所以对于变换后的场和反场,它们的反括号必须有相同的c-数.

为了计算S-矩阵,我们必须要赋予反场确定的值.正如闭规范代数的简单情况,在那 里S是(15.9.5)的线性形式,通过取形式为(15.9.5)中的反场,我们可以计算出S-矩阵;即,我们 利用"规范固定"作用量

$$I_{\Psi}[\chi] = S\left[\chi, \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi}\right]$$
(15.9.28)

计算*S*-矩阵, 其中 $\Psi[\chi]$ 是鬼数为–1的费米泛函. 根据方程(15.9.24)后面的评述, 这相当于取正则变换后的反场 $\chi^{\dagger'}$ 为零.

当BRST变换仅作用在场 χ^n 上时:

在这一变换下,规范固定作用量不变.为了验证这点,注意到

$$sI_{\Psi}[\chi] = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi^n}\right)_{\chi^{\ddagger} = \delta \Psi / \delta \chi} \\ + \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi_m^{\ddagger}} \frac{\delta_L^2 \Psi[\chi]}{\delta \chi^m \delta \chi^n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi_n^{\ddagger}}\right)_{\chi^{\ddagger} = \delta \Psi / \delta \chi}$$

右边的第一项是主方程的结果,因而为零,而第二项由于被加数关于m和n是反对称[‡]的,所以为零.

对于闭代数且形式为(15.9.1)的*S*, 变换(15.9.29)是原始的BRST变换 $\delta_{\theta}\chi^n = \theta s \chi^n$. 但对于一般的开代数, 变换(15.9.29)并不与原始BRST变换相同, 并且, 一般而言, 除非场方程被满足, 它甚至不是幂零的. 诚然, 从主方程中偏移场 $\chi_n^{\sharp'} = \chi_n^{\sharp} - \delta \Psi[\chi]/\delta \chi^n$ 的一阶项中, 我们发现

$$s^{2}\chi^{m} = \mp \left(\frac{\delta_{L}}{\delta\chi^{\ddagger}_{m}} \frac{\delta_{R}}{\delta\chi^{\ddagger}_{n}} I[\chi,\chi^{\ddagger}]\right)_{\chi^{\ddagger} = \delta\Psi/\delta\chi} \frac{\delta I_{\Psi}[\chi]}{\delta\chi^{n}} , \qquad (15.9.30)$$

[‡]若 χ^n 和 χ^m 都是玻色的,这是因为 $\delta S/\delta\chi^n$ 和 $\delta S/\delta\chi^m$ 反对易. 若 χ^n 和 χ^m 中一个是玻色的而另一个是费米的,这是 因为S对费米的 χ 的右导数和左导数符号相反. 若 χ^n 和 χ^m 都是费米的,由于对于这些项, $\delta_L^2 \Psi/\delta\chi^m\delta\chi^n$ 是反对称的,所 以该项是反对称的.

其中, 根据 χ^m 是玻色的还是费米的, 符号反别是–和+. 再一次, 我们看到开代数对场方程特征的 相关性与S中反场的二次项相联系.

直到现在,我们所考察的仅是基于开规范代数或闭规范代数的经典理论的公式化.现在,我 们必须考虑如何在这种理论中做量子力学计算.物理矩阵元可以通过含有权重为exp(i $I_{\Psi}[\chi]$)的泛 函积分算出,其中,就像前面所解释的那样, $I_{\Psi}[\chi]$ 是通过令 $\chi_n^{\ddagger} = \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n \mathcal{M} S[\chi, \chi^{\ddagger}]$ 中获得的,换 句话说,是通过令 $\chi_n^{\ddagger'} = 0$ 获得的.我们希望计算 $\Psi[\chi]$ 的变化在这些矩阵元上的效应.首先考察真 空-真空期望值

$$Z_{\Psi} = \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_{\Psi}[\chi]) . \qquad (15.9.31)$$

$$\delta Z = i \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_{\Psi}[\chi]) \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \right)_{\chi^{\ddagger} = \delta \Psi / \delta \chi} \left(\frac{\delta(\delta \Psi[\chi])}{\delta \chi^n} \right) .$$
(15.9.32)

在场空间中分部积分,这变成

$$\delta Z = \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_{\Psi}[\chi]) \\ \times \left\{ \frac{\delta_R S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L I_{\Psi}[\chi]}{\delta \chi^n} - i\Delta S[\chi, \chi^{\ddagger}] \right\}_{\chi^{\ddagger} = \delta \Psi/\delta \chi} \delta \Psi[\chi] , \qquad (15.9.33)$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta \chi_n^{\ddagger}} \frac{\delta_L}{\delta \chi^n} \,. \tag{15.9.34}$$

我们看到,一般而言, Φ与真空-真空振幅无关的条件不是主方程(15.9.2), 而是所谓的量子主方程

$$(S,S) - 2i\Delta S = 0 \qquad \quad \overleftarrow{E} \quad \chi^{\ddagger} = \delta \Phi / \delta \chi \ . \tag{15.9.35}$$

在cgs单位制^c中,伴随每个*S*[χ,χ[‡]]因子,都会有因子1/ħ,所以在方程(15.9.35)的第二项中,系 数–2i要被换成–2iħ.因此,无论量子主方程(15.9.35)是在何时成立的,*S*中ħ的零阶项满足原始主 方程(15.9.2).通常情况下,构建一个满足经典主方程的作用量是很容易的,这使得方程(15.9.35)中 的第一项为零,这样一来,问题就变成是否第二项也为零.在第22章,关于反常的讨论中,我们会 考察定域作用量不满足量子主方程的情况.

假定量子主方程(15.9.35)是满足的, Ψ 的变化 $\delta\Psi$ 所引起的算符 $O[\chi]$ 的真空期望值的变化是

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \frac{-\mathrm{i}}{Z_{\Psi}} \int \left[\prod \mathrm{d}\chi \right] \exp\left(\mathrm{i}I_{\Psi}[\chi]\right) \frac{\delta_R \mathcal{O}[\chi]}{\delta\chi^n} \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^{\ddagger}]}{\delta\chi_n^{\ddagger}} \right)_{\chi_n^{\ddagger} = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] . \tag{15.9.36}$$

在方程(15.9.36)的被积函数中,指数的系数正是*sO*[χ]. 我们看到,对于在广义BRST变换(15.9.16) —(15.9.17)下不变的算符,^{‡‡} 它们的真空期望值不被规范固定泛函Ψ的变化所影响. 对于两个或多 个算符的真空期望值,相对应的结果同样成立.

^{‡‡}对于开规范理论, 一般而言, 除了常数以外, 没有在变换(15.9.16)—(15.9.17)下不变的算符. 取而代之, 应该考虑的 是在幂零的"量子BRST算符" σ 下不变的算符 $O(\chi, \chi^{\ddagger})$, 其中 σ 定义为 $\sigma O = (O, S) - i\Delta O$. 对于仅依赖于 χ 的O, 这一条 件退化至方程(15.9.36). 如果 $\sigma O = 0$, 那么规范固定函数 Ψ 的微小变换不会影响 $O(\Psi, \delta \Psi / \delta \chi)$ 的期望值.^[24]

^c即厘米-克-秒(Centimeter-Gram-Second)单位制. ——译者注

附录A 关于Lie代数的一个定理

在这个附录中,我们所考察的是一般的Lie代数 \mathcal{G} ,生成元为 t_{α} ,结构常数为 $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$,并将证明如下3个条件的等价性:

a:存在一个实的对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$,其满足不变性条件

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}{}_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^{\beta}{}_{\alpha\delta} . \qquad (15.A.1)$$

(这正是在15.2节中证明的物理背景所需要的条件(15.2.4).)

b: 该Lie代数存在一组基(即,一组生成元 $\tilde{t}_{\alpha} = \mathscr{S}_{\alpha\beta}t_{\beta}$,其中ℒ是非奇异的实矩阵),使得这组基的 结构常数 $\tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 不仅对于下指标 β 和 γ 是反对称的,并且对于全部3个指标 α , β 和 γ 是全反对称的.

c: Lie代数9是相互交换的紧致单纯子代数与U(1)子代数的直和,记为子代数光m的直和.

我们将通过证明a推出b,b推出c,以及c推出a的方式来证明陈述a,b和c的等价性.作为中间的一个副产品,我们也将证明,如果这些条件被满足了,那么能够选出g的一组基tma,其中m标记tma所属的单纯或U(1)子代数*光m*,a标记该子代数下的个体生成元,使得满足方程(15.A.1)的矩阵采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab} , \qquad (15.A.2)$$

其中 g_m^{-2} 是任意的正实数.

首先,我们假定 \mathbf{a} ,即存在满足不变性条件(15.A.1)的实对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$.那么,我们就可以 定义新的生成元

$$\tilde{t}_{\alpha} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta} t_{\beta} , \qquad (15.A.3)$$

其中实的逆平方根矩阵 $g^{-1/2}$ 的存在性由 $g_{\alpha\beta}$ 的正定性保证.这些生成元满足Lie代数

$$\left[\tilde{t}_{\alpha}, \tilde{t}_{\beta}\right] = \mathrm{i}\,\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{t}_{\gamma} \,\,, \tag{15.A.4}$$

其中

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'} (g^{-1/2})_{\beta\beta'} (g^{+1/2})_{\gamma\gamma'} C^{\gamma'}{}_{\alpha'\beta'} . \qquad (15.A.5)$$

(在这一基下,不再区分上下标 α , β 等将是方便的,取代 $\tilde{C}^{\gamma}_{\alpha\beta}$,写成 $\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta}$.)那么,方程(15.A.1)就告诉我们 $\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$ 关于 α 和 γ 是反对称的并且关于 γ 和 δ 也是反对称的,进而是全反对称的,证明了**b**.

接下来,我们假定b,即存在Lie代数的一组基使得结构常数是全反对称的.在这一基下,伴随 表示的矩阵(\tilde{t}^{A}_{α})_{$\beta\gamma$} = $-i\tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$ 是纯虚且全反对称的,因而是厄米的.根据关于厄米矩阵的一般定 理,^{*} \tilde{t}^{A}_{α} 要么是不可约的,要么是完全可约的.

一组不可约的 $N \times N$ 矩阵 \tilde{t}^{A}_{α} 是指,对于这组矩阵不存在维数< N的子空间,使得该子空间 在所有的 \tilde{t}^{A}_{α} 作用下不变——即,不存在一组个数小于N的非零矢量 $(u_{r})_{\beta}$,使得对于每一 α 和r,

$$H_{\alpha} = \left(\begin{array}{cc} C_{\alpha} & 0 \\ 0 & D_{\alpha} \end{array} \right) \; .$$

以这种方式继续下去,我们可以完全地将矩阵H_a约化至每个分块矩阵都不可约的分块对角形式.

^{*}如果一组矩阵 H_{α} 的一组基不是不可约的,那么由定义可知,必存在一组矢量 u_n ,它们张开了一个子空间(不是 整个空间),使得这个子空间在 H_{α} 的作用下不变:即,对于所有的 α 和n, $H_{\alpha}u_n = \sum_m (C_{\alpha})_{mn}u_m$.在这一情况下,我 们可以取矢量 u_n 以及矢量 v_k 构成一个基,其中 v_k 张开的空间正交于所有 u_n .如果 H_{α} 是厄米的,那么($u_n, H_{\alpha}v_k$) = $\sum_m (C_{\alpha})_{mn}^*(u_m, v_k) = 0$,所以由 v_k 张开的空间在 H_{α} 也是不变的: $H_av_k = \sum_{\ell} (D_{\alpha})_{\ell k}v_{\ell}$.在这一基下,矩阵 H_{α} 可以同 时约化至分块对角形式:

 $(\tilde{t}^{A}_{\alpha})_{\beta\gamma}(u_{r})_{\gamma}$ 是矢量 $(u_{s})_{\beta}$ 的线性组合.既然矩阵 $(\tilde{t}^{A}_{\alpha})_{\beta\gamma}$ 正比于这组基下的结构常数,这等价于陈述:不存在一组线性组合 $\mathscr{T} \equiv (u_{r})_{\gamma}\tilde{t}^{A}_{\gamma}$,使得它与所有 \tilde{t}^{A}_{α} 的对易子封闭,即对于每一 α 和r, $[\tilde{t}^{A}_{\alpha}, \mathscr{T}]$ 是 \mathscr{T}_{s} 的线性组合.这样的矩阵 \mathscr{T}_{r} 将构成整个Lie代数的一个不变子代数的生成元;这种矩阵不存在意味着Lie代数是单纯的.

一组矩阵 \tilde{t}^{A}_{α} 完全可约是指,通过选择合适的基,它们可以写成分块对角的超矩阵

$$(\tilde{t}^{\mathcal{A}}{}_{\alpha})_{ma,nb} = [t^{\mathcal{A}(m)}{}_{\alpha}]_{ab} \,\delta_{mn} , \qquad (15.A.6)$$

其中子矩阵t^{A(m)}α要么不可约要么为零.** 对Lie代数本身也采用这组基,那么结构常数就变成

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \mathbf{i}(\tilde{t}^{\mathbf{A}}{}_{\ell c})_{ma,nb} = \mathbf{i}(t^{\mathbf{A}(m)}{}_{\ell c})_{ab}\,\delta_{mn} \ . \tag{15.A.7}$$

但是,既然它是全反对称的,并正比于 δ_{mn} ,它必须也正比于 $\delta_{\ell n}$ 和 $\delta_{\ell m}$:

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \delta_{\ell n} \, \delta_{\ell m} \, C_{cab}^{(\ell)} \,. \tag{15.A.8}$$

换句话说,在这组基下,对于Lie代数的任何表示 $t^{(m)}_a \equiv t_{ma}$,我们有

$$[t^{(m)}{}_{a}, t^{(m)}{}_{b}] = i \,\delta_{mn} C^{(m)}_{cab} t^{(m)}{}_{c} , \qquad (15.A.9)$$

其中*C*^(m)是实的且关于指标a, b, c反对称. 当我们说Lie代数是子代数*t*^(m)的直和时, 我们是指, 能够找到一组基, 使得在这组基下, 生成元落入集合*t*^(m)中, 并且一个集合内的生成元, 它们彼此之间的对易子有该集合内的生成元的线性组合给出, 并且一个集合内的所有生成元与所有其它集合内的所有生成元对易. 对于每一个*m*, 伴随表示*t*^{(m)A}的矩阵的集合要么不可约要么为零, 分别对应于单独子代数或者由所谓的*U*(1)生成元构成的子代数, 而后者与整个代数的所有生成元均对易.

因此,我们证明了,对于最一般的Lie代数,若它的结构常数是全反对称的,那么它是一个或 多个单纯Lie代数和/或U(1)Lie代数的直和.更进一步,单纯子代数是紧致的,也就是说,每个矩 阵 $-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}$ 是正定的,这是因为对于任意实矢量 u_a , $-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}u_au_b = \sum_{cd} [\sum_a u_a C_{acd}^{(m)}]^2$ 是正 量的和,除非 $u_a = 0$,否则它不能为零,既然对于 $u_a \neq 0$,条件 $\sum_a u_a C_{acd}^{(m)} = 0$ 将表明 $\sum_a u_a t^{(m)}_a$ 本 身是一个不变阿贝尔子代数,与 $t^{(m)}_a$ 构成单Lie代数的事实相矛盾.这完成了**c**的证明.

最后,我们假定**c**,即Lie代数是一组单纯Lie代数或U(1)Lie代数的直和;也就是说,在某个 $\pm t_a^{(m)} = \mathscr{S}_{ma,\alpha} t_{\alpha} \overline{\Gamma}, 其中 \mathscr{S}$ 是实的且非奇异,我们有

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(m)}] = i\delta_{nm}C^{(m)c}{}_{ab}t_c^{(m)}$$

其中每一子代数t^(m)不是单纯的就与所有量均对易.我们进一步假定单纯子代数是紧致的,也就是 说,矩阵

$$g_{ab}^{(m)} \equiv -C^{(m)c}{}_{ab}C^{(m)d}{}_{bc}$$
(15.A.10)

是正定的.为了构建满足方程(15.A.1)的实正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$,在生成元的基为 $t_{ma} = t_a^{(m)}$ 下,我们取

$$g_{ma,nb} \equiv g_{ab}^{(m)} \delta_{mn} , \qquad (15.A.11)$$

^{**}这里*m*和*n*用来标记沿着主对角的块, 而*a*和*b*标记这些块内的行和列. 另外, *m*是不求和的, 且*a*, *b*等指标的范围一般会依赖于*m*.

其中, 当 $t^{(m)}$ 是单纯子代数时, $g_{ab}^{(m)}$ 取为矩阵(15.A.10), 而当 $t^{(m)}$ 是一个或多个U(1)子代数的直和时, $g_{ab}^{(m)}$ 取为任意的实对称正定矩阵. 由于每一个 $g_{ab}^{(m)}$ 是实对称正定矩阵, 那么矩阵(15.A.11)显然也是如此. 为了验证要求(15.A.1), 回忆结构常数的Jacobi恒等式:

$$C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{be} + C^{(m)c}{}_{bd}C^{(m)d}{}_{ea} + C^{(m)c}{}_{ed}C^{(m)d}{}_{ab} = 0$$
(15.A.12)

然后与 $C^{(m)e}_{fc}$ 收缩. 重新命名第三项的指标, 使得 $c \to d \to e \to c$, 并使用方程(15.A.10), 在做了 这些之后, 针对单纯子代数的结果可以写成

$$g_{df}^{(m)}C^{(m)d}{}_{ab} = C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{be}C^{(m)e}{}_{cf} - C^{(m)c}{}_{fd}C^{(m)d}{}_{be}C^{(m)e}{}_{ca} \ .$$

其中的关键点在于,它表明左边关于a和f是全反对称的:

$$g_{df}^{(m)}C^{(m)d}{}_{ab} = -g_{da}^{(m)}C^{(m)d}{}_{fb} . (15.A.13)$$

这一结果在U(1)子代数中是平庸的, 在那里结构常数为零. 从方程(15.A.13)中就立刻得出了对称 性条件(15.A.1), 因此完成了a的证明. 这样就完成了我们对陈述a, b和c相互等价的证明.

现在我们回到矩阵 $g_{\alpha\beta}$.有了全反对称的结构常数,不变性条件(15.2.4)可以表示为如下的陈述,矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 与Lie代数伴随表示中的所有矩阵均对易

$$[g, t^{A}{}_{\gamma}] = 0 . (15.A.14)$$

我们已经看到所有的(t^{A}_{γ})_{$\alpha\beta$}都可以变成分块对角的形式,并且沿着主对角的是不可约子矩阵(或 零矩阵).那么,一个著名的定理^[25]会告诉我们, $g_{\alpha\beta}$ 也必须是分块对角的,且其中的块与 t^{A}_{γ} 中的 块有相同的大小和位置,而且每一块中的子矩阵正比于单位矩阵.(若 t^{A}_{γ} 中的两个矩阵是等价的, 也就是说这两个矩阵通过一个相似变换相关,为了使 $g_{\alpha\beta}$ 的子矩阵变成正比于单位矩阵的形式,可 能就需要在那里对基做一个合适的变换.)那么以方程(15.A.11)的记法,矩阵就由方程(15.A.2)给 出.

附录B Cartan目录

我们在这里不加证明的呈现出单Lie代数的全部目录,它的最终形式是由E. Cartan给出的.^[26] 这里所要呈现的是它们的"紧致"形式——即,生成元可以被有限维厄米矩阵忠实表示. Lie代数的标记中含有下标 $n \ge 1$,这用来标记它们的"秩"(rank)——相互独立且交换的生成元的线性组合的个数.

 A_n : 这是特殊幺正群SU(n+1)的代数, 特殊幺正群SU(n+1)是n+1维中所有幺正($U^{\dagger} = U^{-1}$)幺 模(Det U = 1)矩阵构成的群. 任何这样的矩阵, 只要它无限接近于单位元, 它可以表示成

$$U = 1 + iH$$

其中无限小的H满足条件

$$H^{\dagger} = H , \qquad \text{Tr} H = 0 ,$$

所以*A_n*是*n* + 1维中所有无迹厄米矩阵的Lie代数.任何一组相互交换的厄米矩阵可以同时对角化, 在*n* + 1维中,相互独立的无迹对角矩阵的最大数目是*n*,所以*n*是*A_n*的秩.*n* + 1维中的任何厄米矩 阵有(n+1)²个独立的实参数(其中沿着主对角的是n+1个实数,而在主对角上方有n(n+1)/2个 复数,这些复数等于主对角下方复数的共轭),无迹条件会消掉一个实参数,所以A_n的维数是

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$$
.

所有An都是单纯的.

 B_n : 这是幺正正交群O(2n + 1)的代数,该群由2n + 1维中所有幺正($O^{\dagger} = O^{-1}$)且正交($O^{T} = O^{-1}$)的矩阵构成,由于矩阵是幺正且正交的,所以它还是实矩阵. (有时为了体现幺正的限制会称 这个群为UO(2n + 1).) 任何这样的矩阵O,若它无限接近于单位元,它可以表示为

$$\mathcal{O} = 1 + \mathrm{i}A \; ,$$

其中A是无限小矩阵并满足条件

$$A^* = -A = A^{\mathrm{T}} \; .$$

(如果我们将自身限制于子群SO(2n+1), の要服从进一步的条件Det O = 1, 既然任何接近于单位 元的正交矩阵O都会有Det O = 1, 所以这并不会造成任何区别.) 任何一组(2n+1)-维中的反对称 虚矩阵可以(通过普通的正交矩阵)变成如下超矩阵的形式



其中 σ_2 是通常的2 × 2矩阵

$$\sigma_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{array} \right]$$

 ma_1, \dots, a_n 是实数.因此 B_n 的秩显然等于n.反对称虚矩阵完全由实对角上方的虚数指定,所以它的维数是

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1)$$

所有Bn都是单纯的.

O(*N*)还有另一种定义方法,而这个定义将会帮助我们理解下一大类单Lie代数的动机.除了 将*O*(*N*)定义成满足正交条件*O*^T*O* = 1的所有*N*维实矩阵构成的群,它也可以定义为满足条件

$$\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{P}\mathscr{M}=\mathscr{P}$$

的所有N维实矩阵*M*的群,其中*P*是正定对称实矩阵.这是因为任何这样的*P*总可以表示 为*P* = *R*^T*R*,其中*R*是某个非奇异的实矩阵,所以存在相似变换,使得满足上述条件的*M*变成实 正交矩阵*R*⁻¹*MR*,所以我们可以令*P*为各种各不相同的实对称正定矩阵却不改变群.

C_n: 这是幺正辛群*USp*(2*n*)的代数, 幺正辛群由所有保持反对称非奇异矩阵&/不变的幺正矩 阵 *M*构成:

$$\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\mathscr{M} = \mathscr{A} ,$$

$$\mathscr{A}^{\mathrm{T}} = -\mathscr{A} , \qquad \operatorname{Det} \mathscr{A} \neq 0 .$$

(注意, 在d维中, Det $\mathscr{A} = Det \mathscr{A}^{T} = (-)^{d} Det \mathscr{A}$, 所以, 如果d是奇数, Det \mathscr{A} 必须为零, 因此, 除 非d为偶数, 否则不存在USp(d).) 任何这样的反对称非奇异(可能为复)矩阵 \mathscr{A} 可以写成如下的标 准形式

$$\mathscr{A} = \mathscr{R}^{\mathrm{T}} \mathscr{A}_0 \mathscr{R} ,$$

其中沉是幺正矩阵,而必是超矩阵:

$$\mathscr{A}_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \; .$$

(或者,我们可以取 a_0 为分块对角超矩阵,其中主对角线上是 σ_1 .) USp(2n)可以描述成满足

$$\mathscr{S}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}_{0}\mathscr{S} = \mathscr{A}_{0}$$

的幺正矩阵 \mathscr{S} 所构成的群,这是因为任何这样的 \mathscr{S} 可以变换至幺正矩阵 $\mathscr{M} = \mathscr{R}^{-1}\mathscr{S}\mathscr{R}$,而 \mathscr{M} 满 足之前的条件 $\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\mathscr{M} = \mathscr{A}$.任何这样的矩阵 \mathscr{S} ,若它无限接近于单位元,它可以写成

$$\mathscr{S} = 1 + \mathrm{i}\,\mathscr{H}$$
 ,

其中光是无限小矩阵,并满足条件

$$\mathscr{H}^{\dagger} = \mathscr{H} , \qquad \mathscr{H}^{\mathrm{T}} \mathscr{A}_{0} + \mathscr{A}_{0} \mathscr{H} = 0 .$$

满足这些条件的最一般的2n维矩阵可以写成超矩阵

$$\mathscr{H} = \left[egin{array}{cc} \mathscr{A} & \mathscr{B} \ \mathscr{B}^* & -\mathscr{A}^* \end{array}
ight] \, ,$$

其中n维复子矩阵&, 33满足

$$\mathscr{A}^{\dagger} = \mathscr{A} , \qquad \mathscr{B}^{\mathrm{T}} = \mathscr{B} .$$

最大的一组相互对易的生成元满足如为对角矩阵而多为零,因而为如下的形式

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & & \\ & & -a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & -a_n \end{bmatrix}$$

其中 a_1, \dots, a_n 为实数.因此, C_n 的秩显然为n. C_n 的维数是, 厄米矩阵 \mathscr{A} 中相互独立的实参数数 目 n^2 , 加上对称复矩阵 \mathscr{B} 中相互独立的实参数数目2n(n+1)/2

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1)/2 = n(2n+1)$$
.

所有Cn代数都是单纯的.

 D_n : 这是幺正正交群O(2n)的代数, O(2n)由2n维中所有幺正正交矩阵构成. 对 B_n 的讨论可以挪 至 D_n , 所不同的是任何一组相互对易的生成元可以变成如下形式



所以秩仍然是n. 另外, 维数在这里是

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1)$$
.

除了 D_1 和 D_2 之外,所有的 D_n 都是单纯的, D_1 是只有一个生成元的阿贝尔代数,而 D_2 是直和 $B_1 + B_1$.

例外Lie代数:除了之上的典型Lie代数外,还存在5种特殊情况, $G_2(d = 14)$; $F_4(d = 52)$; $E_6(d = 78)$; $E_7(d = 133)$; $E_8(d = 248)$.

不是所有的典型Lie代数是真正不同的.存在如下4个同构

$$A_1 = B_1 = C_1 , \qquad C_2 = B_2 , \qquad A_3 = D_3 .$$

它们对应Lie群中代数之间的同构. 然而, 像 $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2 \pi D_3 = A_3$ 这样的同构并 不意味着SO(3)与SU(2)同构, 或者SO(5)与USp(4)同构, 或者SO(6)与SU(4)同构. 取而代之, SU(2), USp(4)和SU(4)是SO(3), SU(2)和SO(6)的单连通覆盖群. (即第二章讨论的覆盖群.) 然 而, Lie代数的同构使得SO(3), SU(2)和SO(6)双值基本表示的构造变得非常容易; 它们分别就 是SU(2), USp(4)和SU(4)的定义表示. 另外SO(4)同构于 $SO(3) \times SO(3)$, 所以它的双值旋量表示 就是 $SU(2) \times SU(2)$ 的定义表示. 当 $d \ge 7$ 时, SO(d)的双值旋量表示必须通过其它方法构建. 最简 单的技巧是使用5.4节讨论过的Clifford代数.

习题

1. 推导Bianchi恒等式

$$D_{\mu} F_{\alpha\nu\lambda} + D_{\nu} F_{\alpha\lambda\mu} + D_{\lambda} F_{\alpha\mu\nu} = 0 \; .$$

2. 假定我们在非阿贝尔规范理论中使用广义Coulomb规范, 取规范固定函数为 $f_{\alpha} = \nabla \cdot \mathbf{A}_{\alpha}$. 推导 鬼场拉格朗日量. 鬼场传播子是什么? (取 $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_{\alpha} f_{\alpha}/2\xi)$.)

3. 假定在电动力学中我们使用规范固定函数 $f = \partial_{\mu}A^{\mu} + cA_{\mu}A^{\mu}$,其中c是任意常数. 推导鬼场拉格朗日量. (取 $B[f] = \exp(-i\int d^4x f^2/2\xi)$.) 鬼场传播子是什么?

4. 证明单Lie单数的生成元个数不可能是4.

5. 证明,如果 $\psi(x)$ 属于某个规范群的一个表示,该规范群的生成元为 t_{α} ,并且 $\psi(x)$ 沿着路 径 $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$ 依照微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}t_{\alpha}\psi(\tau)A_{\alpha\mu}(x(\tau))\frac{\mathrm{d}x^{\mu}(t)}{\mathrm{d}\tau}$$

进行变化, (其中 $\psi_{\ell}(x)$ 和 $A_{\alpha\mu}(x)$ 是经典c-数场) 那么对于围绕点 X^{μ} 的任何小的闭环路 \mathcal{P}, ψ 沿该环路的变化正比于

$$t_{\alpha}\psi(X)F_{\alpha\mu\nu}(X)\oint_{\mathscr{P}}x^{\mu}(\tau)rac{\mathrm{d}x^{\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d} au$$
 .

找到比例常数. 用这一结果证明, 如果*F_{αμν}*处处为零, 那么, 至少在一有限区域内, 可以通过一个 规范变换使得*A_{αμ}(x*)为零. (提示: 沿用电动力学中的类似讨论, 或者沿用广义相对论中的讨论, 例如参考文献6.)

6. 对一般的非阿贝尔规范理论应用路径积分方法,选择规范固定泛函 $f_{\alpha} = n_{\mu}A^{\mu}_{\alpha}$,其中 n_{μ} 是任意 常数,计算规范场 $A_{\alpha\mu}(x)$ 的传播子.(取 $B[f] = \exp(-i\int d^4x f_{\alpha}f_{\alpha}/2\xi)$.)鬼场拉格朗日量是什么? 鬼场传播子是什么?鬼场相互作用顶点是什么?

7. 假定我们采用BRST不变性而非规范不变性作为基本的物理原理. 拉格朗日量是从场和场导数的乘积的和中构建的, 即从 $A_{\alpha\mu}$, ω_{α} , h_{α} 和/或它们的导数构建的, 要求场与场导数乘积的量纲(质量)^{*d*}满足 $d \leq 4$, 并且拉格朗日量在Lorentz变换, 鬼数相位变换($\omega_{\alpha} \rightarrow e^{i\theta}\omega_{\alpha}, \omega_{\alpha}^{*} \rightarrow e^{-i\theta}\omega_{\alpha}^{*})$,整体规范变换(ϵ_{α} 为常数)以及BRST变换下不变(可以相差一个全导数), 推导满足上述要求的最一般的拉格朗日量.

8. 证明反括号满足对称性条件(15.9.15)和Jacobi恒等式(15.9.21).

9. 证明,如果泛函O满足条件 $(O,S) = i\Delta S$ 并且作用量S满足量子主方程,那么量子均值 $\langle O \rangle$ 独立于规范固定泛函 Ψ .

参考文献

- C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* 96, 191 (1954). 在1938年的华沙会议, O. Klein在一次讲演中曾经非常接近SU(2)Yang-Mills理论的公式化表述, 收录于New Theories in Physics (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939). 关于Klein理论的批判性 讨论, 参看D. J. Gross在1994年斯德哥尔摩的Oscar Klein研讨会上的报告"Oscar Klein and Gauge Theory", Princeton preprint PUPT-1508.
- [2] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [3] R. P. Feynman, Acta Phys. Polonica 24, 697 (1963).
- [4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. 25B, 29 (1967).
- [5] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967).

- [6] 这一证明可以从广义相对论中相对应结果的标准证明中改编过来,即,在一有限单连通区域 内存在到平坦度规的坐标变换,其充要条件是Riemann-Christoffel曲率张量为零的证明.参 看,S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Sections 6.3和6.4.
- [7] **a**(其中 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)蕴含**b**, b蕴含**a**的证明是M. Gell-Mann和S. L. Glashow给出的, Ann. Phys. (N.Y.) **15**, 437 (1961).
- [8] 参看, S. Weinberg, 同上, Section 7.6.
- [9] V. Gribov, Nucl. Phys. B139, 1 (1978). 另见R. Jackiw, I. Muzinich and C. Rebbi, Phys. Rev. D17, 1576 (1978); R. Jackiw, in New Frontiers in High Energy Physics, B. Kursunoglu, A. Perlmutter, and L. Scott编辑(Plenum, New York, 1978); N. Christ and T. D. Lee, Phys. Rev. D22, 939 (1980); R. Jackiw, in Current Algebra and Anomalies (World Scientific, Singapore, 1985): footnote 50.
- [10] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Comm. Math. Phys. 42, 127 (1975); 收录 在Renormalization Theory, G. Velo and A. S. Wightman编辑(Reidel, Dordrecht, 1976); Ann. Phys. 98, 287 (1976).
- [11] I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint N39 (1975).
- [11a] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. 35, 1111 (1966); B. Lautrup, Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd. 35, 29 (1967).
- [12] 我不知道这个讨论的原始来源, 我是从J. Polchinski那里学到它的.
- [13] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. 63, 681 (1950); 64, 850 (1951); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta 3, 567 (1950); K. Bleuler and W. Heitler, Progr. Theor. Phys. 5, 600 (1950).
- [14] J. Thierry-Mieg, J. Math. Phys. 21, 2834 (1980); R. Stora, Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse, 1983, G.'t Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, and R. Stora编辑(Plenum, New York, 1984): p. 543; L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, Commun. Math. Phys. 155, 249 (1993); P. M. Lavrov, P. Yu Moshhin and A. A. Reshetnyak, Tomsk preprint hep-th/9507104; P. M. Lavrov, Tomsk preprint hep-th/9507105.
- [15] W. Siegel, Phys. Lett. 93B, 170 (1980); T. Kimura, Prog. Theor. Phys. 64, 357 (1980); 65, 338 (1981).
- [16] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, Commun. Math. Phys. 174, 57 (1995): Section 14.
- [17] G. Curci and R. Ferrari, Nuovo Cimento 32A, 151 (1976); I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Supp. 64, 625 (1980); L. Baulieu and J. Thierry-Mieg, Nucl. Phys. B197, 477 (1982).

[18] 反-BRST变换被L. Alvarez-Gaumè和L. Baulieu推广至一般的定域系统, *Nucl. Phys.* **B212**, 255 (1983). 它由如下算符诱导:

$$\begin{split} \bar{s} &= \omega^{*A} \delta_A \phi^r \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^{*B} \omega^{*C} f^A{}_{BC} \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} - \omega^{*B} h^C f^A{}_{BC} \frac{\delta}{\delta h^A} \\ &+ \Big[- f^A{}_{BC} \omega^{*B} \omega^C + h^A \Big] \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} \; . \end{split}$$

可以直接验证这一变换是幂零的:

 $\bar{s}^2=0$.

另外, BRST变换和反-BRST变换反对易. 更进一步, 存在反-BRST变换的上同调定理(未发表), 类似于BRST变换的上同调定理: ϕ , ω^A , ω^{*A} 和 h^A 的泛函I, 如果满足反-BRST变换条件sI = 0并且鬼数为零, 那么它的最一般形式是

$$I[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + \bar{s} \bar{\Psi}[\phi, \omega, \omega^*, h] .$$

(用Hodge算符 $\bar{t} \equiv \omega^A \delta / \delta h^A$ 取代t即可.) 反-BRST变换有助于列举拉格朗日量和Green函数中可能的项,但我不知道它在什么情况下是不可或缺的.

- [19] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* B102, 27 (1981); *Nucl. Phys.* B234, 106 (1984); *J. Math. Phys.* 26, 172 (1985). 另见B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* 50, 218, 628 (1982). 一个简明的综述可参看, J. Gomis, J. París and S. Samuel, *Phys. Rep.* 259, 1 (1995).
- [20] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett* B55, 224 (1975); CERN report TH2332 (1977); I. A. Batain and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* B69, 309 (1977); I. S. Fradkin and T. E. Fradkina, *Phys. Lett.* B72, 334 (1977). 另见M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge System* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [21] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, *Phys. Lett.* **B356**, 373 (1995).
- [22] J. Zinn-Justin, Trends in Elementary Particle Theory International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974 (Springer-Verlag, Berlin, 1975): p. 2.
- [23] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.*, D13, 3214 (1976); R. E. Kallosh, *Nucl. Phys.* B141, 141 (1978); B. de Wit and J. W. van Holten. *Phys. Lett.*, B79, 389 (1979); P. van Nieuwenhuizen *Phys. Rep.*, 68, 189 (1981).
- [24] M. Henneaux and C. Teitelboim, 参考文献[20]: Section 18.1.4.
- [25] E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press, New York, 1950): pp. 76-8.
- [26] 原始文献是E. Cartan, Sur la Structure des Groupes de Transformations Finis et Continue, (Paris, 1894; 2nd edn 1933). 教科书处理可以参看, R. Gilmore, Lie Group, Lie Algebras, and some of Their Applications (Wiley, New York, 1974): Chapter 9.

第 16 章 外场方法

考察有经典外场的量子场论通常是有益的.一个原因是,在很多物理情况下,确实出现了外场,例如经典电磁场或引力场,或者真空期望值不为零的标量场.(我们将在第19章看到,这种标量场会在拉格朗日量的对称性自发破缺中扮演一个重要角色.)然而,即便问题中没有出现真正的外场,通过在一个虚拟外场下考察物理振幅可以极大地简化一些计算.这一章将会证明,可以将所有的多圈效应等效成对"树"图的求和,这些树图的顶点和传播子从量子有效作用量中获得,而量子有效作用量不是别的,正是有外场时的单粒子不可约连通真空-真空振幅.在下一章将会看到,这提供了一种极其方便的方法,即补全了始于第15章的非阿贝尔规范理论可重整性的证明,又简化了荷重整化因子的计算,而后者,正是我们在构建量子色动力学中渐进自由的临界性质时所需要的.

16.1 量子有效作用量

考察一作用量为 $I[\phi]$ 的量子场论,并假定我们"打开"了与该理论的场 $\phi^r(x)$ 相耦合的经典流 $J_r(x)$. 那么,有这些流的完整真空-真空振幅是

$$Z[J] \equiv \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J$$
$$= \int \left[\prod_{s,y} d\phi^s(y) \right] \exp\left(iI[\phi] + i \int d^4x \, \phi^r(x) J_r(x) + \epsilon \mathfrak{M} \right) \,. \tag{16.1.1}$$

场 $\phi^r(x)$ 不需要是标量. 它们甚至可以是费米的,尽管如此,直到16.4节,我们都不会费心于 追踪这一情况下会出现的符号.) 计算Z[J]的Feynman规则与计算没有外流的真空-真空振 幅Z[0]的Feynman规则相同,只不过现在的Feynman图要包含一种新顶点,这一顶点与单个 ϕ^r -线相连. 这类顶点会用坐标x进行标记,并且会给坐标空间Feynman振幅的被积函数贡献"耦 合"因子i $J_r(x)$. 等价地,我们可以说,在Z[J]作为J的幂级数展开式中,正比于i $J_r(x)$ i $J_s(y)$ ···的 项,它的系数就是外线(包含传播子)对应于 $\phi^r(x)$, $\phi^s(y)$ 等场的图的和.特别地,一阶导数给出对应 于 $\phi^r(x)$ 的量子力学算符 $\Phi^r(x)$ 的真空矩阵元:

$$\left[\frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J]\right]_{J=0} = i \int \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x)\right] \phi^r(y) \exp\{iI[\phi] + \epsilon \mathfrak{M}\}$$
$$= i \langle VAC, \text{ out} | \Phi^r(y) | VAC, \text{ in} \rangle_{J=0} .$$
(16.1.2)

对于泛函Z[J]的定义(16.1.1),其中的场 $\phi^r(x)$ 可以不是基本场(即,出现在作用量中的场),而是基本场的乘积,我们有时也会处理这样的Z[J].若 $\phi^r(x)$ 是N个基本场的乘积,Z[J]的Feynman规则中的新顶点就会与N个线相连.本章的一些结果(包含方程(16.1.2))适用于这一情况,但是,凡是涉及Feynman图的地方,将默认假定 $\phi^r(x)$ 是基本的.

现在, *Z*[*J*]由含有流*J*的所有真空-真空振幅的和给出, 这些振幅中既包括连通图也包括非连 通图, 但是, 对于在同一子图或不同的连通子图中仅相差顶点置换的那些图, 并没有计为不同的 图. 一个由*N*个连通分支构成的一般图对*Z*[*J*]的贡献等于这些分支的贡献之积, 再除以顶点的置 换数*N*!, 即仅对一个连通分支与另一个连通分支的所有顶点进行置换产生的重复计数.* 因此, 所 有图的和是

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (iW[J])^N = \exp(iW[J]) , \qquad (16.1.3)$$

其中iW[J]是所有连通真空-真空振幅的和,再一次地,对于那些仅相差顶点置换的图,并没有计为不同的图.

由于众多目的,更进一步,并用所有连通单粒子不可约图取代W[J]进行处理将是有用的.(单粒子不可约图是指无法通过剪掉任何一条内线变得不连通的图.)我们可以以如下方式给出这一求和的形式表达式.首先,定义 $\phi_J^r(x)$ 为算符有流J时的 $\Phi^r(x)$ 的真空期望值:

$$\phi_J^r(x) \equiv \frac{\langle \text{VAC, out} | \Phi^r(x) | \text{VAC, in} \rangle_J}{\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J} = -\frac{\mathrm{i}}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J_r(x)} Z[J]$$
(16.1.4)

或者,以连通图之和的形式

$$\phi_J^r(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)} W[J] . \qquad (16.1.5)$$

这一公式可以逆转. 定义 $J_{\phi r}(x)$ 为使(16.1.4)有规定值 $\phi^{r}(x)$ 的流:

$$\phi_J^r(x) = \phi^r(x) \quad \text{in \mathbb{R}} \quad J_r(x) = J_{\phi r}(x) \; .$$

量子有效作用量^[1]由Legendre变换定义(作为 ϕ 的泛函,而非J)

$$\Gamma[\phi] \equiv -\int d^4x \, \phi^r(x) J_{\phi r}(x) + W[J_{\phi}] \,. \tag{16.1.6}$$

我们将证明 $\Gamma[\phi]$ 是有流 J_{ϕ} 时的所有连通单粒子不可约图的和. 然而, 我们先来看一下它另一方面的物理意义.

注意到, $\Gamma[\phi]$ 的泛函导数是

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = -\int d^4x \ \phi^r(x) \ \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)} - J_{\phi s}(y) + \int d^4x \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)}\right]_{J=J_{\phi}} \ \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)}$$

或者,使用方程(16.1.5)

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = -J_{\phi s}(y) \ . \tag{16.1.7}$$

因此, $\Gamma[\phi]$ 是"有效作用量", 也就是说, 在没有流*J*时, 外场 $\phi^{s}(y)$ 的可能值由 Γ 的驻"点"给定:

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = 0 \quad \forall \not = 0 . \tag{16.1.8}$$

^{*}有N个连通分支的Feynman图,若每个分支中的顶点数分别为 n_1 , n_2 ,… n_N ,从Dyson展开中可知,这 个Feynman图的贡献正比于因子 $1/(n_1 + \dots n_N)!$,而因子 $(n_1 + \dots n_N)!/N!$ 是这些顶点的置换数,在置换计数时, 那些仅交换两个分支所有顶点的置换视为是等同的.

可以与经典场方程做一比较, 经典场方程仅要求实际的作用量*I*[*φ*]是稳定的.因此, 方程(16.1.8)可以视为将量子修正考虑在内的外场*φ*的运动方程.

Γ[φ]不仅提供了量子修正后的场方程;它还是有效作用量,也就是说,如果作用量是Γ[φ]而不 是*I*[φ],利用从此得出的顶点,i*W*[*J*]可以作为真空-真空振幅的连通树图和算出.我们这里的树图 是指,如果剪断任何一条内线这个图就会变得不连通.通过用Γ[φ]而非*I*[φ],就将所有的圈图效应 考虑在内了.

为了看到这点,^[2] 我们来考察将用来代替W[J]的量 $W_{\Gamma}[J,g]$,如果我们用作用量 $g^{-1}\Gamma[\phi]$ 代 替 $I[\phi]$:

$$\exp\{\mathrm{i}W_{\Gamma}[J,g]\} \equiv \int \prod_{r,x} \mathrm{d}\phi^{r}(x) \exp\{\mathrm{i}g^{-1} \Big[\Gamma[\phi] + \int \mathrm{d}^{4}x \ \phi^{r}(x) J_{r}(x)\Big] + \epsilon \bar{\mathfrak{M}} \}, \qquad (16.1.9)$$

其中g是任意常数.这里的传播子是 $g^{-1}\Gamma[\phi]$ 中 ϕ 的二次项系数的逆,因而正比于g,而所有顶点的贡献均正比于1/g,所以,若一个图包含V个顶点(包含那些流J产生的顶点)和I条内线(包含那些与J顶点相连的线),那么它正比于 g^{I-V} .对于任何连通图,圈的数目是L = I - V + 1,所以 $W_{\Gamma}[J,g]$ 中的L-圈项与g的关系是

$$\left(W_{\Gamma}[J,g]\right)_{L \text{ loops}} \propto g^{L-1}$$
 (16.1.10)

等效地,我们可以写成(至少形式上地)

$$W_{\Gamma}[J,g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_{\Gamma}^{(L)}[J] , \qquad (16.1.11)$$

其中(通过令g = 1可以看到), $W_{\Gamma}^{(L)}[J]$ 是对连通真空振幅 $W_{\Gamma}[J, 1]$ 的*L*-圈贡献, 而 $W_{\Gamma}[J, 1]$ 是通过使用 $\Gamma[\phi]$ (不含因子g)而非作用量 $I[\phi]$ 获得的.

现在,我们在这里只关心无圈的树图的和,计算这些图所用的顶点和传播子是从 $\Gamma[\phi]$ 而 非 $I[\phi]$ 中得出的.在我们目前的记法中,这是 $W_{\Gamma}^{(0)}[J]$.为了孤立出方程(16.1.11)中L = 0的项,考察 极限 $g \to 0$.在这一极限下,路径积分(16.1.9)被稳相点所主导,

$$\exp\left\{\mathrm{i}W_{\Gamma}[J,g]\right\} \propto \exp\left\{\mathrm{i}g^{-1}\Big[\Gamma[\phi_J] + \int \mathrm{d}^4x \,\phi_J^r(x)J_r(x)\Big]\right\} ,\qquad(16.1.12)$$

其中,由于它是作为J所产生的场定义的,场øJ是指数的驻点,也就是说

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)}\Big|_{\phi=\phi_J} = -J_r(x) \ . \tag{16.1.13}$$

方程(16.1.12)中的比例因子一般是J的泛函,但它是 g^0 阶项开始的g的幂级数.因此,对两边取对数,并将 g^{-1} 阶项孤立出来,这会给出

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \, \phi_J^r(x) J_r(x) \,. \tag{16.1.14}$$

在方程(16.1.6)中令 $\phi = \phi_J$,我们看到方程(16.1.14)的右边正是W[J]:

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = W[J] . (16.1.15)$$

概括一下,这说明,通过用 $\Gamma[\phi]$ 代替 $I[\phi]$ (下标 Γ)并只保持树(0-圈)图可以算出W[J]:

$$iW[J] = \int_{\substack{\text{CONNECTED}\\\text{TREE}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x)\right] \exp\left\{i\Gamma[\phi] + i\int \phi^r(x)J_r(x)\,d^4x\right\} .$$
 (16.1.16)

现在, iW[J]的任何连通图都可视为树图, 只不过其中的顶点由单粒子不可约子图组成.因此, 为了使方程(16.1.16)成立, iΓ[φ]必须是外线数目任意的所有单粒子不可约连通图的和, 而图中的 每一外线对应的是因子φ而非传播子或波函数.由于这个原因, 在Γ[φ]围绕某个固定场φ₀关于场以 及场导数的幂级数展开中, 展开系数可以视为重整化耦合常数, 而这里的重整化"点"是由φ₀而非 某组动量指定的.

等价地,对于某个固定场 $\phi_0^r(x)$, i $\Gamma[\phi_0]$ 可以表示为真空-真空振幅的单粒子不可约图的和,只不过计算使用的是偏移作用量 $I[\phi + \phi_0]$:

$$i\Gamma[\phi_0] = \int_{\substack{1 \text{PI} \\ \text{CONNECTED}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp\{iI[\phi + \phi_0]\} .$$
(16.1.17)

这是因为只要是 ϕ_0 出现的地方,无论是方程(16.1.17)中单粒子不可约图中的顶点还是传播子,都 会与一个外 ϕ -线相连. (限制在单粒子不可约图上在方程(16.1.17)中扮演了一个重要角色;没有这 个限制,我们偏移积分变量所产生的积分显然与 ϕ_0 无关.)取代方程(16.1.17),写成

$$\exp\left[\mathrm{i}\,\Gamma[\phi_0]\right] = \int_{\mathrm{1PI}} \left[\prod_{r,x} \mathrm{d}\phi^r(x)\right] \exp\left\{\mathrm{i}\,I[\phi+\phi_0]\right\}$$
(16.1.18)

通常是方便的,其中我们计算的路径积分包含所有图,包括连通或非联通的,但在每个图中,每个 连通分支都是不可约的.

* * *

这一形式理论提供了对树图求和的简单方法. 作为一个例子, 考察全两点函数 $\Delta^{rx,sy}$ 与它的单粒子不可约部分 $\Pi_{rx,sy}$ 之间的关系. 从方程(16.1.5)和(16.1.7)中, 我们发现

$$\Delta^{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x) \delta J_s(y)} = \frac{\delta \phi_J^r(x)}{\delta J_s(y)} , \qquad (16.1.19)$$

$$\Pi_{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x) \delta \phi^s(y)} = -\frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \phi^s(y)} .$$
(16.1.20)

由此立刻得出"矩阵"△和Ⅱ之间的关系为

$$\Delta = -\Pi^{-1} . (16.1.21)$$

这一关系是传播子与自能部分之间的常见关系(10.3.15)的副本,在方程(10.3.15)中,分母中的额外 $\overline{ \eta} q^2 + m^2$ 代表单粒子不可约两点函数的零阶项.



图 16.1 相互作用为 ϕ^4 的中性标量场 ϕ 的量子有效作用量的Feynman图,这些图依次对应零圈阶,单圈阶和两圈阶.

16.2 有效作用量的计算

为了看到上一节的形式理论在真实情况中是如何运作的,考察一个简单例子,单个实标量 场*ϕ*(*x*)的可重整理论,其作用量为

$$I[\phi] = -\int d^4x \left[\lambda + \frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right] \,. \tag{16.2.1}$$

(在这里, 我们在拉格朗日密度中引入了"宇宙学常数" – λ , 这样做的原因在后文中将会变得非常清楚). 简单起见, 假定我们希望计算的是某个位置无关场 $\phi_0(x) = \phi_0$ 的 $\Gamma[\phi_0]$. $\Gamma[\phi_0]$ 中的每一项将包含一时空体积因子

$$\mathscr{V}_4 = \int d^4 x = \delta^4 (p - p) (2\pi)^4 \tag{16.2.2}$$

这产生于动量守恒 δ -函数.因而,对于常数的 ϕ_0 ,我们将写出

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathscr{V}_4 V(\phi_0) , \qquad (16.2.3)$$

其中V(ϕ_0)是一普通函数,称为有效势.在本节,我们将计算有效势至它的一阶.这一工作最初 是由Coleman和E. Weinberg^[3]在研究对称性自发破缺时完成的,对称性自发破缺将是第19章和 第21章的主题. 他们也将这一结果用于重整化群的一个早期应用,我们会在18.2节描述它.

令 ϕ 偏移 ϕ_0 ,这样,方程(16.1.18)中的作用量是:*

$$I[\phi + \phi_0] = -\mathscr{V}_4 \left[\lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{24} g \phi_0^4 \right] - \left[m^2 \phi_0 + \frac{1}{6} g \phi_0^3 \right] \int d^4 x \, \phi \\ - \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_0) \phi^2 \right] - \int d^4 x \left[\frac{1}{6} g \phi_0 \phi^3 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right] \,, \tag{16.2.4}$$

其中µ²是场相关质量

$$\mu^2(\phi_0) = m^2 + \frac{1}{2}g\phi_0^2 . \qquad (16.2.5)$$

注意到,现在出现了正比于 ϕ 的新相互作用(这对于单粒子不可约图没有任何影响)和正比于 ϕ ³的新相互作用,以及与原相互作用有相同结构的项.

图16.1展示了 $\Gamma[\phi_0]$ 到两圈阶的Feynman图. 真空-真空振幅中的零圈阶项由 $I[\phi + \phi_0]$ 中的常数项给出

$$i\Gamma^{(0 \text{ loop})}[\phi_0] = -i\mathscr{V}_4\left(\lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\phi_0^4\right) .$$
(16.2.6)

^{*}对于m² < 0的理论, 在微扰论的适用性上有一限制, 我们会在下一节讨论它.

单圈项给定为

$$\exp\left(\mathrm{i}\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}[\phi_0]\right) = \int \prod_x \mathrm{d}\phi(x) \,\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \mu^2(\phi_0)\phi^2\right] + \epsilon \bar{\mathfrak{M}}\right\}.$$
(16.2.7)

在第九章我们学习过如何计算这样的积分,结果由方程(9.A.18)给出

$$i\Gamma^{(1 \text{ loop})}[\phi_0] = \ln \operatorname{Det}\left(\frac{iK}{\pi}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\left(\frac{iK}{\pi}\right) , \qquad (16.2.8)$$

其中

$$K_{x,y} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial y_{\lambda}} + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon\right] \delta^4(x-y) . \qquad (16.2.9)$$

像往常一样,为了计算这样的矩阵,经由动量空间将K对角化将是有帮助的:

$$K_{p,q} = \int \frac{\mathrm{d}^4 x}{(2\pi)^2} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x} \,\frac{\mathrm{d}^4 y}{(2\pi)^2} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q \cdot y} K_{x,y} = \left(p^2 + \mu^2(\phi_0) - \mathrm{i}\epsilon\right) \delta^4(p-q) \;.$$
(16.2.10)

对角矩阵的对数就是对主对角元取对数:

$$\left[\ln\left(\frac{\mathrm{i}K}{\pi}\right)\right]_{p,q} = \ln\left[\frac{\mathrm{i}}{\pi}(p^2 + \mu^2(\phi_0) - \mathrm{i}\epsilon)\right]\delta^4(p-q)$$
(16.2.11)

那么, 它的迹是

$$i\Gamma^{(1 \text{ loop})}[\phi_0] = -\frac{1}{2} \int d^4 p \left[\ln\left(\frac{iK}{\pi}\right) \right]_{p,p} - \frac{\mathscr{V}_4}{2(2\pi)^4} \int d^4 p \ln\left(\frac{i}{\pi}(p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon)\right) .$$
(16.2.12)

将方程(16.2.6)和(16.2.12)合在一起,我们就有了到一圈阶的有效势

$$V(\phi_0) = \lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\phi_0^4 + \mathscr{I}(\mu^2(\phi_0)) , \qquad (16.2.13)$$

其中

$$\mathscr{I}(\mu^2) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int d^4 p \, \ln\left(\frac{i}{\pi}[p^2 + \mu^2 - i\epsilon]\right) \,. \tag{16.2.14}$$

有效势的这一公式包含紫外发散是极其显然的. 幸运的是, 这些紫外发散会自然地被理论参量的重整化所吸收. 尽管积分(16.2.14)是发散的, 简单的幂次级数表明, 通过对µ²微分三次可以使这个积分收敛:

$$\mathscr{I}'''(\mu^2) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 p \, (p^2 + \mu^2 - \mathrm{i}\epsilon)^{-3} \, .$$

 $-i\epsilon$ 项又一次告诉我们, 必须要逆时针旋转 p^0 围道, 使得 $p^0 = ip^4$, 而 p^4 从 $-\infty$ 取到 $+\infty$:

$$\mathscr{I}'''(\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 k^3 dk}{(k^2 + \mu^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2 \mu^2} \ .$$

积分三次,我们就有

$$\mathscr{I}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} + A + B \,\mu^2 + C \,\mu^4 \;.$$

常数*A*, *B*, *C*不由这一计算方法决定, 而且, 既然它们显然无论如何都是无穷大的, 这也很难说的 上是一个严重问题. 我们通过定义λ, *m*²和*g*的"重整化"值来消除这些常数:

$$\lambda_R \equiv \lambda + A + Bm^2 + Cm^4 ,$$

$$m_R^2 \equiv m^2 + gB + 2gm^2C ,$$

$$g_R \equiv g + 6g^2C .$$

那么,对于到一圈阶的势,我们的最终结果是

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} .$$
(16.2.15)

其中 $\mu(\phi_0)$ 是方程(16.2.5)所定义的场相关质量,到这一阶,它可以用 m_R 和 g_R 而非m和g计算出来:

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \frac{1}{2}g_R\phi^2 \; .$$

如果理论包含一个自旋¹/₂的复费米场 $\psi(x)$,并且它与标量 ϕ 相互作用,那么会有类似的结果成 立.例如,如果相互作用哈密顿密度有简单形式 $G\phi\bar{\psi}\psi$,那么在有一常数背景标量场 ϕ_0 的情况下, 费米子的质量 $M(\phi_0)$ 就有形式:

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0$$
.

很容易看到势(16.2.15)在这一情况下得到一个额外项:

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} - \frac{M^4(\phi_0)\ln M^2(\phi_0)}{16\pi^2} .$$
(16.2.16)

新项中的数值系数是方程(16.2.15)中 $\mu^4 \ln \mu^2$ 项的数值系数的4倍,这是因为这里假定 $\psi n \bar{\psi}$ 所描述的费米子和反费米子是不同的,并且它们中的每一个都有两个自旋态,符号相反是由于(正如第9章 所示),高斯型的费米路径积分所给出的结果正比于指数中系数矩阵的行列式,不同于玻色路径积分,后者给出的结果正比于这一行列式的倒数.

16.3 能量诠释

分别以能量和能量密度的形式, 对有效作用量 $\Gamma[\phi]$ 和有效势 $V[\phi]$ 有一重要的解释.^[4]为了看 到这一点, 假定我们打开流 $J^n(\mathbf{x},t)$, 它从 $t = -\infty$ 时的零光滑地增长至一有限值 $\mathscr{I}^n(\mathbf{x})$, 并在一段 很长的时间T内保持该值, 在此之后又光滑的衰减到 $t = +\infty$ 时的零. 这一微扰的效应是将真空 转化至有确定能量 $E[\mathscr{I}](\mathscr{I}(\mathbf{x})$ 的泛函)的态, 在这个态上会持续时间T, 然后又回到真空. 然而, 尽 管"出"真空与"入"真空是相同的物理态, 但是在时段T内会累积相因子 $\exp(-iE[\mathscr{I}]T)$, 所以这两 个态矢会相差相因子 $\exp(-iE[\mathscr{I}]T)$:

$$\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J = \exp\left(-iE[\mathscr{I}]T\right).$$
 (16.3.1)

与方程(16.1.1)和(16.1.3)相比较,这给出

$$W[J] = -E[\mathscr{I}]T . (16.3.2)$$

为了看到这一能量与有效作用量之间的联系, 假定我们要寻找一个态 Ω_{ϕ} , 它使得能量期望值最小

$$\langle H \rangle_{\Omega} = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega, \Omega)} ,$$
 (16.3.3)

它满足条件: 量子场 $\Phi_n(\mathbf{x}, t)$ 有一与时间无关的期望值 $\phi_n(\mathbf{x})$

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x}, t)\Omega)}{(\Omega, \Omega)} = \phi_n(\mathbf{x}) .$$
(16.3.4)

同时附加上Ω是归一化的条件将是方便的

$$(\Omega, \Omega) = 1 . \tag{16.3.5}$$

为了最小化服从约束(16.3.4)和(16.3.5)的期望值(16.3.3),我们使用拉格朗日数乘法,转而最小化如下的量

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega, \Omega) - \int d^3x \,\beta^n(\mathbf{x}) \Big(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega\Big) , \qquad (16.3.6)$$

这样, Ω上就没有约束了. 这给出

$$H\Omega = \alpha \Omega + \int d^3x \,\beta^n(\mathbf{x}) \Phi_n(\mathbf{x})\Omega \,\,. \tag{16.3.7}$$

选择 α 和 $\beta^n(\mathbf{x})$ 的方式要使得约束(16.3.4)和(16.3.5)被满足,因而它们会以泛函的形式依赖于规定的期望值 $\phi_n(\mathbf{x})$.

好了,我们曾说过,当有流 $\mathscr{I}^n(\mathbf{x})$ 时,哈密顿量 $H - \int d^3x \mathscr{I}^n(\mathbf{x}) \Phi_n(x)$ 会有本征值 $E[\mathscr{I}]$:

$$\left[H - \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{I}^n(\mathbf{x}) \Phi_n(x)\right] \Psi_{\mathscr{I}} = E[\mathscr{I}] \Psi_{\mathscr{I}} , \qquad (16.3.8)$$

其中Ψ是归一化的本征矢.更进一步,既然缓慢地打开这个流使得真空转化成这一能量本征态, 我们可以假定*E*[ノ]是有流时的最低能量本征态.因此,如果

$$\Omega = \Psi_{\mathscr{I}_{\phi}} , \qquad (16.3.9)$$

$$\alpha = E[\mathscr{I}_{\phi}] , \qquad (16.3.10)$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathscr{I}^n_\phi(\mathbf{x}) , \qquad (16.3.11)$$

方程(16.3.4), (16.3.5)和(16.3.7)就会被满足, 其中 $\mathscr{I}_{\phi}(\mathbf{x})$ 是使得 $\Phi(x)$ 在态 $\Psi_{\mathscr{I}}$ 上有期望值 $\phi(\mathbf{x})$ 的流.

在方程(16.3.8)中取 $\mathscr{I} = \mathscr{I}_{\phi}$,并取其与 $\Psi_{\mathscr{I}_{\phi}}$ 的标量积,对于约束场 Φ_n 有期望值 ϕ_n 的态,它的最低能量被视作是

$$\langle H \rangle_{\Omega} = E[\mathscr{I}_{\phi}] + \int \mathrm{d}^3 x \, \mathscr{I}_{\phi}^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) \,. \tag{16.3.12}$$

回忆方程(16.3.2)以及J(x)的假定形式,这是

$$\langle H \rangle_{\Omega} = \frac{1}{T} \left[-W[J_{\phi}] + \int \mathrm{d}^4 x \, J_{\phi}^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) \right] = -\frac{1}{T} \Gamma[\phi] \,. \tag{16.3.13}$$

正如上一节所指出的,如果场 $\phi(x)$ 在一个很大的时空体积 $\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 T$ 上有常数值 ϕ ,那么我们可以将有效作用量写成有效势 $V(\phi)$ 的形式:

$$\Gamma[\phi] = -\mathscr{V}_3 T V(\phi) . \tag{16.3.14}$$

在这一情况下,方程(16.3.13)告诉我们能量密度是

$$\langle H \rangle_{\Omega} / \mathscr{V}_3 = V(\phi) . \tag{16.3.15}$$

主要结果是:对于所有态,若它服从标量场 Φ_n 在态上的期望值为 ϕ_n 的约束条件,那么它的能量密度期望值的最小值是 $V(\phi)$.一个结果是,在没有外流时,真空态将放松至另一个态,在这个态中,由于场方程(16.1.8)的要求,势 $V(\phi)$ 是稳定的,此外它也是最小的.

这一结果帮助解决了量子有效势诠释中的一个问题,路径积分形式理论的欧几里得版本(将在第23章的附录A进行描述)使得两点函数 Δ (在矩阵意义下)为正这件事变得显然,所以,根据方程(16.1.2), $-\Pi = \Delta^{-1}$ 也是这样.再加上方程(16.2.3),这暗示了,对于单个标量场,有效势 $V(\phi)$ 对 ϕ 的二阶导数必须为正(或零).更普遍的,有效势必须是凸的:^[5]

$$V\left(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2\right) \le \lambda V(\phi_1) + (1-\lambda)V(\phi_2) \quad \forall \neq 0 \le \lambda \le 1 .$$

但对方程(16.2.13)的检查表明, 当 $m^2 < 0\pi g > 0$ 时, 对于作用量为(16.2.1)的标量场论, 在 ϕ 处在 有效势的两个极值点± $\sqrt{6|m^2|/g}$ 之间时, 它的有效势的零圈近似有一个负定的二阶导数. 会产生 这个矛盾是因为, 微扰论的引出暗中依赖于稳定真空的存在, 但当 $V''(\phi) < 0$ 时, 场 ϕ 所处的值 $\tilde{\phi}$ 使 得 $V(\tilde{\phi}) - J_{\phi}\tilde{\phi}$ 是极大值而不是极小值, 这意味着当有流 J_{ϕ} 时, 真空态是不稳定的.

那么, 当m < 0且 ϕ 处在有效势的两个极小值之间时, 这一标量场真正的有效势是什么呢? 本节的结果是, 我们必须找到使得算符 Φ 的期望值等于 ϕ 的最小能量态.只要 ϕ 处在该势的两个极小值之间, 通过将 Φ 取做 ϕ 处在极小值 $\phi \simeq \pm \sqrt{6 |m^2|/g}$ 时的态的合适的线性组合, 我们就可以赋予 Φ 期望值 ϕ .这一态中的能量等于极小值处的能量, 所以这一态显然使得能量最小化.(在体积无限大的极限下, 交叉项为零, 原因会在19.1节进行阐述.)因此, 在两个极小值之间的有效势是常数, 这满足二阶导数非负的要求.相同的讨论表明, 在有限势有两个能量不等的定域极小值的更普遍理论中, 这两个极小值之间的有效势是线性的.^[6]

16.4 有效作用量的对称性

虽然不总是这样,但在某些情况下,作用量 $I[\phi]$ 的对称性自动地也是有效作用量的 $\Gamma[\phi]$ 的 对称性.例如,在16.2节的例子中,作用量(16.2.1)在离散变换 $\phi \to -\phi$ 下有一对称性.因此, $\mathcal{M}Z[J]$ 和W[J]的定义中可以知道,它们在相对应的反射 $J \to -J$ 下是偶的.这样,方程(16.1.5)表 明 $\phi_{-J} = -\phi_J$,因此 $J_{-\phi} = -J_{\phi}$,所以方程(16.1.6)表明 $\Gamma[\phi]$ 在 $\phi \to -\phi$ 下是偶的.这一结果被单圈 结果(16.2.15)所证实.对于(16.2.16)中的费米圈贡献,在M(0) = 0的特殊情况下,这一贡献也呈现 出在 $\phi \to -\phi$ 下的对称性,这是因为,在这一情况下,作用量在 $\phi \to -\phi$ 和 $\psi \to \gamma_5\psi$ 的组合变换下不 变.

除非我们能够证明附加于作用量的对称性也适用于有效作用量,否则我们在建立理论的可重整性时会遇到问题.例如,在上面的例子中,如果假定 $I[\phi]$ 对 ϕ 是偶的,但 $\Gamma[\phi]$ 却不是,那么 Γ 中正比

于 $\int d^4x \phi \overline{\eta} \eta \int d^4x \phi^3 \overline{\eta}$ 的系数将会发散,但作用量的对称性将不允许我们引入吸收这些无限大的抵消项.

在这一动机下,我们现在转向一类重要的对称性,这类对称性由如下的无限小变换生成

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi] , \qquad (16.4.1)$$

其中 F^n 是 x^μ 的函数但以泛函的形式依赖于 χ^n . (例如, $F^n[x;\chi]$ 可以是 χ^n 以及 χ^n 在点x处导数的普通函数.) 我们现在使用符号 χ^n 而非 ϕ^r 来标记不同类型的场,是为了强调它们不仅包含普通的规范场和物质场(它们在下一章会被记为 $\phi^r(x)$),而且包含出现在规范固定作用量中的所有其它场,包括鬼场. 我们再次指出: $\chi^n(x)$ 不一定是标量,它可以是任意类型的场.

我们假定作用量和测度均在对称变换(16.4.1)下不变:

$$I[\chi + \epsilon F] = I[\chi] , \qquad (16.4.2)$$

$$\prod_{n,x} \mathrm{d}\Big(\chi^n(x) + \epsilon F[x;\chi]\Big) = \prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x) \ . \tag{16.4.3}$$

(实际上, 仅乘积($\prod_{n,x}$)d $\chi^n(x)$ exp(i*I*)不变就足够了, 但这时方程(16.4.2)和(16.4.3)往往都是成立的.) 用 $\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]$ 替换方程(16.1.1)中的积分变量, 这样我们就有

$$\begin{split} Z[J] &= \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d} \left(\chi^n(x) + \epsilon \, F^n[x;\chi] \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \mathrm{i} \, I[\chi + \epsilon \, F] + \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left(\chi^n(x) + \epsilon \, F^n[x;\chi] \right) J_n(x) \right\} \\ &= \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d} \chi^n(x) \right] \exp \left\{ \mathrm{i} \, I[\chi] + \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left(\chi^n(x) + \epsilon \, F^n[x;\chi] \right) J_n(x) \right\} \\ &= Z[J] + \mathrm{i} \epsilon \int \left(\prod_{n,x} \mathrm{d} \chi^n(x) \right) \int F^n(y;\chi) J_n(y) \mathrm{d}^4 y \\ &\quad \times \exp \left\{ \mathrm{i} I[\chi] + \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \, \chi^n(x) J_n(x) \right\} \end{split}$$

因而

$$\int \mathrm{d}^4 y \, \langle F^n(y) \rangle_J J_n(y) = 0 \;, \qquad (16.4.4)$$

其中 $\langle \rangle_J$ 代表有流 $J_n(x)$ 时的量子平均值,

$$Z[J]\langle F^{n}(y)\rangle_{J} \equiv \int \left(\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^{n}(x)\right) F^{n}[y;\chi] \\ \times \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x\,\chi^{n}(x)J_{n}(x)\right\} , \qquad (16.4.5)$$

归一化使得 $\langle 1 \rangle_J = 1$. 但回忆起 $J_n(y)$ 是以有效作用量 $\Gamma[\chi]$ 的形式通过方程(16.1.7)给定的

$$J_{n,\chi}(y) = -\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)}$$
.

因此, 方程(16.4.4)可以写成

$$0 = \int \mathrm{d}^4 y \, \langle F^n(y) \rangle_{J_{\chi}} \, \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} \,. \tag{16.4.6}$$

换句话说, $\Gamma[\chi]$ 在无限小变换

$$\chi^n(y) \to \chi^n(y) + \epsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_{\chi}} .$$
(16.4.7)

下不变. 这样的对称性条件被称为Slavnov-Taylor恒等式.[7]

这一对称变换是否是我们所出发的对称变换呢?对于一类非常重要的无限小对称变换确实是 这样,即那些线性的变换.对于这样的对称性,F是

$$F^{n}[x;\chi] = s^{n}(x) + \int t^{n}_{\ m}(x,y)\chi^{m}(y) \,\mathrm{d}^{4}y \;. \tag{16.4.8}$$

(在最通常的情况下, $s^n(x)$ 为零而 $t^n_m(x, y)$ 是常数矩阵与 $\delta^4(x - y)$ 之积.) 对于任何线性的F, 我们有

$$\langle F^n(y) \rangle_J = s^n(x) + \int t^n_{\ m}(x,y) \langle \chi^m(y) \rangle_J \,\mathrm{d}^4 y \;.$$

但对于任何固定的 χ , J_{χ} 定义为使得 $\langle \chi^m(y) \rangle_J$ 等于 $\chi^m(y)$ 的流J的值, 所以

$$\langle F^n(y) \rangle_{J_{\chi}} = s^n(x) + \int t^n_{\ m}(x,y)\chi^m(y) \,\mathrm{d}^4 y = F^n[x;\chi] \;.$$
 (16.4.9)

因此, 对于所有的泛函线性变换 $\chi^n \to \chi^n + \epsilon F$, 若该变换保持 $I[\chi]$ 和测度不变, 那么方程(16.4.6)会要求 $\Gamma[\chi]$ 在这样的变换下不变.

我们有时还要处理非线性的对称变换. 15.7节所讨论的BRST变换就提供了一个重要例子. 对于非线性的变换, 使得有限作用量不变的对称变换(16.4.7)一般与保持原作用量不变的假设对称变换(16.4.1)不相同, 这是因为场的非线性泛函的均值一般不等于平均场的泛函. 的确如此, $\langle F^n \rangle_{J_{\chi}}$ 作为 χ 的泛函, 它的形式一般会依赖于系统的动力学, 并且通常是非定域. 这一复杂性将在下一章利用反括号的方法进行处理.

直到现在,我们默认假定场 χ^n 和相对应的变换函数 F^n 以及流 J_n 都是玻色的. 当其中的一些量 是费米量时,特别地,就像超对称变换或BRST变换,在那里 ϵ 是常数而 χ^n 和 F^n 有相反的统计,这时 我们将需要注意到可能出现的符号因子. 当流像方程(16.1.1)和(16.1.5)中那样插入在场的右边时, 方程(16.1.5)和(16.1.7)会变成如下的形式

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi_J^m(y) , \qquad (16.4.10)$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^m(y)} = -J_{\chi,m}(y) , \qquad (16.4.11)$$

其中下标R和L是指导数是从右边和左边作用的.因此,Slavnov-Taylor恒等式(16.4.6)应该写成

$$0 = \int d^4 y \langle F^n(y) \rangle_{J_{\chi}} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} . \qquad (16.4.12)$$

习题

1. 考察赝实标量 $\phi(x)$ 与复Dirac场 $\psi(x)$ 的理论,它们的质量分别是M和m,相互作用为 $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$. 计 算 $\phi =$ 常数, $\psi = 0$ 时的有效势,并计算至一圈阶.

2. 导出 $\delta^{3}W[J]/\delta J_{n}(x)\delta J_{m}(y)\delta J_{\ell}(z)$ 和 $\delta^{4}W[J]/\delta J_{n}(x)\delta J_{m}(y)\delta J_{\ell}(z)\delta J_{k}(w)$ 的一般公式,将其写 成 $\Gamma[\phi]$ 对 ϕ 的变分导数的形式.指出这些公式中的每一项分别对应那些Feynman图.

3. 对于六维中相互作用拉格朗日密度为 $g\phi^3/6$ 的中性标量场 ϕ 的理论, 计算有效势至一圈阶.

4. 假定作用量 $I[\phi]$ 在有限大矩阵变换 $\phi_n(x) \to \sum_m M_{nm}\phi_m(x)$ 下不变. 那么在流的何种变换 下W[J]不变? 利用这一结果导出 $\Gamma[\phi]$ 的对称性质

参考文献

- [1] 有效作用量Γ[φ]由J. Goldstone, A.Salam和S. Weinberg引入, Phys. Rev. 127, 965 (1962), 在这里是以微扰论的方式,将其作为对单粒子不可约图的求和定义的. 非微扰定义(16.1.6)是如下几人独立地给出的, B. De Witt, in Relativity, Groups. and Topology Lectures Delivered at Les Houches during the 1963 Session of the Summer School of Theoretical Physics, C. De Witt和B. De Witt编辑. (Gordon and Breach, New York, 1964); G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento 34, 1790 (1964).
- [2] S. Coleman, Aspect of Symmetry (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 135-6
- [3] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* D7, 1888 (1973).
- [4] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 16, 48 (1970); S. Coleman, Aspects of Symmetry (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 139-42.
- [5] K. Symanzik, 参考文献4; J. Iliopoulos, C. Itzyskon, and A. Matrin, *Rev. Mod. Phys.* 47, 165 (1975).
- [6] Y. Fujimoto, L. O'Raifeartaigh, and G. Parravicini, Nucl. Phys. B212, 268 (1983); R. W. Haymaker and J. Perez-Mercader, Phys. Rev. D27, 1948 (1983); C. M. Bender and F. Cooper, Nucl. Phys. B224, 403 (1983); M. Hindmarsh and D. Johnston, J. Math. Phys. A19, 141 (1986); V. Branchina, P. Castorina, and D. Zappalà, Phys. Rev. D41, 1948 (1990); K. Cahill, Phys. Rev. D52, 4704 (1995).
- [7] A. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. 10, 152 (1972) [英译版: Theor. and Math. Phys. 10, 99 (1972)]; J. C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971).

第 17 章 规范理论的重整化

我们现在转向规范理论,并使用上一章所描述的外场形式理论来研究这些理论的重整化,然 后进行一个重要的计算.

17.1 Zinn-Justin方程

在本节,我们将用15.7节所描述的BRST对称性来例证量子有效作用量的一个泛函性质,这一性质是由Zinn-Justin首先导出的.^[1] 根据16.4节中所概述的一般规则,作用量*I*[χ]的BRST不变性 给有效作用量附加了条件

$$\int d^4x \, \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_\chi} \, \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0 \,, \qquad (17.1.1)$$

其中, $\chi^n(x)$ 在BRST变换下的改变是

$$\delta_{\theta}\chi^{n}(x) = \theta\Delta^{n}(x) , \qquad (17.1.2)$$

这里的 θ 是无限小费米参量, $\langle \cdots \rangle$ 是有流 J_{χ} 时的真空期望值, 而流 J_{χ} 使得算符场 $X^{n}(x)$ 的真空期望 值等于c-数函数 $\chi^{n}(x)$. 隐含地对n求和取遍BRST形式理论中的所有场; 即, 对 $\omega_{\alpha}, \omega_{\alpha}^{*}$ 和 h_{α} 以及我 们统称为 ϕ^{r} 的物质场和规范场求和. 当 χ^{n} 是规范场或物质场或 ω_{α} 时, 由于这时 $\Delta^{n}(x)$ 是场的二次 型, 方程(17.1.1)一般不会告诉我们有效作用量就像作用量本身那样在同一BRST变换下是不变的.

为了处理这一困难,我们采用一个技巧,这一技巧已被证明在处理任何一种幂零对称变换时都是有用的.首先,我们引入一组c-数外场*K_n(x)*,并定义一个新的有效作用量

$$\Gamma[\chi, K] \equiv W[J_{\chi, K}, K] - \int d^4 x \, \chi^n(x) \, J_{\chi, K \, n}(x) \,, \qquad (17.1.3)$$

其中连通真空持续振幅W在这里要用规范固定作用量^{*} $I + \int d^4x \Delta^n K_n$ 计算:

$$e^{iW[J,K]} \equiv \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right] \exp\left(iI + i \int d^4x \,\Delta^n K_n + i \int d^4x \,\chi^n J_n\right)$$
(17.1.4)

而流*J*_{χ,K}要求在有外场K时赋予场期望值χ:

$$\frac{\delta_R W[J,K]}{\delta J_n(x)}\Big|_{J=J_{\chi,K}} \equiv \chi^n(x) .$$
(17.1.5)

 $(K_n \omega \sqrt[3]{5} 4 \pi$ 相同的费米统计或玻色统计,而这正好与 χ^n 的统计是相反的.)既然BRST变换是 幂零的, $\Delta^n(x)$ 是BRST-不变的,所以我们用16.4节的方法可以证明新的有效作用量满足BRST-不 变条件:

$$\int d^4x \, \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K},K} \, \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0 \,, \qquad (17.1.6)$$

^{*}这里的*I*是15.7节所描述的修正作用量 I_{NEW} ,它依赖于鬼场和反鬼场 ω_{α} 和 ω_{α}^{*} 以及辅助场 h_{α} ,从现在起省略下标"NEW".

其中(···)_{J,K}是指真空期望值是在有流J和外场K的情况下计算的:

$$\langle \mathcal{O}[\chi] \rangle_{J,K} = \frac{\int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x) \right] \mathcal{O}[\chi] \exp\left(\mathrm{i}I + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \,\Delta^n K_n + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x, \chi^n J_n\right)}{\int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x) \right] \exp\left(\mathrm{i}I + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \,\Delta^n K_n + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \,\chi^n J_n\right)} \,. \tag{17.1.7}$$

将 Δ^n 的期望值表示成有效作用量的变分导数是方便的. 取方程(17.1.3)对K的右变分导数, 这 给出

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} &= \left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \right|_{J=J_{\chi,K}} + \int \mathrm{d}^4 y \left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_m(y)} \right|_{J=J_{\chi,K}} \frac{\delta_R J_{\chi,K\,m}(y)}{\delta K_n(x)} \\ &- \int \mathrm{d}^4 y \, \chi^m(y) \frac{\delta_R J_{\chi,K\,m}(y)}{\delta K_n(x)} \; . \end{aligned}$$

利用方程(17.1.5),我们看到后两项抵消,然后再使用定义(17.1.4)和(17.1.7)就给出了我们希望的 结果:

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \right|_{J=J_{\chi,K}} = \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K},K} .$$
(17.1.8)

BRST对称变换(17.1.6)现在可以写成仅包含有效作用量的简单条件, Zinn-Justin方程:

$$\int d^4x \, \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \, \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0 \, . \tag{17.1.9}$$

根据方程(15.9.3)后面的评述,场和反场的交换(或者这一情况下 χ^n 和 K_n)的结果就是方程(17.1.9)的 左边和右边有一个符号变化,所以这可以写成

$$(\Gamma, \Gamma) = 0$$
, (17.1.10)

其中,在计算这里的反括号时用*K*_n替换了χⁿ的反场:

$$(F,G) \equiv \int d^4x \, \frac{\delta_R F[\chi,K]}{\delta\chi^n(x)} \, \frac{\delta_L G[\chi,K]}{\delta K_n(x)} - \int d^4x \, \frac{\delta_R F[\chi,K]}{\delta K_n(x)} \, \frac{\delta_L G[\chi,K]}{\delta\chi^n(x)} \, . \tag{17.1.11}$$

这在形式上与15.9节讨论的Batalin-Vilkovisky"主方程"相同,但在这里它是作为对量子有效作用量而非基础作用量 $S[\chi, \chi^{\dagger}]$ 的约束出现的.在接下来的两节中,Zinn-Justin方程(17.1.10)将用来说明如何重整化规范理论,并在22.6节中用来研究这些理论中的反常.

17.2 重整化: 直接分析

在"Dyson"的意义下,即拉格朗日密度中所有算符的量纲(按质量幂次计)均不超过4,最简单的非阿贝尔规范理论是可重整的.正如我们在第12章所看到的,这保证了量子有效作用量中出现 无限大的项可以被量纲不超过4的相互作用中的抵消项所抵消.但是可重整性不仅仅是这些.拉格 朗日密度被规范不变性以及其它对称性所约束.对于一个可重整化的理论,除去场的一个可能的 重整化之外,量子有效作用量中的无限大也必须服从相同的约束.^[2]

有效作用量 $\Gamma[\chi, K]$ 是 χ 和K的复杂泛函,它的对称条件(17.1.9)给出的结果也很复杂,所幸的是,对于Γ中的无限大项,事情要简单得多.我们会将作用量 $S[\chi, K] \equiv I[\chi] + \int d^4x \Delta^n K_n$ 写成 $S_R[\chi, K]$ 与修正 $S_\infty[\chi, K]$ 的和,其中前者的质量与耦合常数设置为它们的重整化值,而后者

包含我们打算用来抵消来自圈图中的无限大的抵消项. $S_R 和 S_{\infty}$ 所取的形式都必须有原始作用 量 $S[\chi, K]$ 的对称性,所以问题变成,在对 Γ 的高阶修正中,无限大部分是否分享了相同的对称性, 使得这些无限大可以被 S_{∞} 中的抵消项所抵消.

我们可以将Γ展成Γ_N的级数, Γ_N既来自于那些只有N个圈的图, 也来自于有N – M个圈的 图(其中1 $\leq M \leq N$), 后者包含 $S_{\infty}[\chi, K]$ 中的抵消项, 这些抵消项将用来抵消总圈数为M的图中 的无限大:

$$\Gamma[\chi, K] = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma_N[\chi, K] . \qquad (17.2.1)$$

那么,对于每一个N,对称性条件(17.1.10)变成,*

$$\sum_{N'=0}^{N} (\Gamma_{N'}, \Gamma_{N-N'}) = 0 . \qquad (17.2.2)$$

在求和(17.2.1)中,领头项就是 $\Gamma_0[\chi, K] = S_R[\chi, K]$,这当然是有限的. 假定,对于所有的 $M \leq N - 1$,所有产生于M圈图的无限大都被 S_∞ 中的抵消项所抵消. 那么,无限大仅能出现在N' = 0的 项和N' = N的项,它们是相等的,并且这个条件的无限大部分告诉我们 Γ_N 的无限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ 服 从于条件

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. (17.2.3)$$

正像方程(15.9.16)和(15.8.17)所描述的那样,这是由 S_R 生成的对称性原理.特别地,注意到变换 $X \mapsto (S_R, X)$ 既作用在外场 K_n 上,也作用在场 χ^n 上.

直到现在, 我们还未曾使用过可重整Yang-Mills理论的任何特殊性质. 现在, 注意到, 根据可重整理论普遍的幂次计数规则, 再加上 Γ_N 子图中的无限大全部抵消这一前提, $\Gamma_N[\chi, K]$ 的无限大部 $\beta\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 只能是场(包括K)以及场导数量纲(按质量幂次计)不超过4的乘积的和. 最后, 16.4节的讨论表明对于任何可实现的线性对称变换, (正如下面所描述的, 它们是: Lorentz变换, 整体规范变换, 反鬼变换, 以及鬼相位变换和其所附带的鬼数守恒. 当然, 在这些对称变换下, 也必须赋予给辅助场 K_n 合适的变换性质.) 若作用量在该变换下不变, 那么 $\Gamma[\chi, K]$ 以及随之的 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 也在该对称变换下不变. 这些条件连同方程(17.2.3)就足以告诉我们关于 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 我们所需要知道的一切.

我们现在可以使用鬼数守恒证明 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 实际上不包含 K_n 的任何二阶项. 对于这个目的, 我们同样需要知道 K_n 的鬼数. 如果 χ^n 的鬼数是 γ_n ,那么 Δ_n 的鬼数就是 $\gamma_n + 1$,所以必须要赋 予 K_n 鬼数 $-\gamma_n - 1$.场 $A^{\alpha\mu}, \psi^{\ell}, \omega^{\alpha} \pi \omega^{\alpha*}$ 的鬼数分别是0,0,+1和-1,所以相应外场 K_n 分别必须有 鬼数-1,-1,-2和0. 除了一个可能的例外,这排除了 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 中所有 K_n 的二阶项,这个例外就 是与 $\omega^{\alpha*}$ 相联系的外场 K_{α}^* 的二阶项(不包含其它场). 然而,最后的这些项由于一个不同的原因也 被禁止了. $\omega^{\alpha*}$ 的BRST变换关于场是线性的,并有

$$\Delta^{\alpha*} = -h^{\alpha} , \qquad (17.2.4)$$

^{*}通过重复使用16.1节的推理,这种逐阶关系可以形式上地导出:当作用量 S_R 被替换成 $g^{-1}S_R$ 后,有I条内线以及V个顶点的连通L圈图的贡献要乘以因子 $g^{V-I} = g^{L-1}$.如果 S_{∞} 中与N圈图相联系的抵消项也被赋予了因子 g^N ,那么 Γ_L 就是 Γ 中 g^{L-1} 阶项在g = 1时的值.然后,通过要求方程(17.1.10)在g的每一节都成立就得出了方程(17.2.2).在cgs单位值中,作用量的量纲与 \hbar 相同,因而当作用量在路径积分中出现时会乘以因子 $1/\hbar$,所以,取代g,我们可以用 \hbar 作为圈计数的参量.

所以这时

$$\frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, K]}{\delta K^*_{\alpha}} = \langle \Delta^{\alpha *} \rangle_{J_{\chi}, K} = -h^{\alpha}$$

是独立于 K^*_{α} . 由此得出 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 关于 $K^{\alpha*}$ 是线性的,并且仅通过项 $-\int d^4x K^*_{\alpha}h^{\alpha} = K^{\alpha*}$ 相关. $(K^*_{\alpha} nh^{\alpha} 都$ 是玻色的,所以它们的顺序是无关紧要的.) 特别地,对于N > 0, $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 独立于 $K^{\alpha*}$.

我们已经看到 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 关于所有的 K_n 最多是线性的. 我们将它写成

$$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K] = \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] + \int \mathrm{d}^4 x \, \mathscr{D}_N^n[\chi; x] \, K_n(x) \,. \tag{17.2.5}$$

我们同时回忆起S_R与K的关系:

$$S_R[\chi, K] = S_R[\chi] + \int \mathrm{d}^4 x \, \Delta^n[\chi; x] K_n(x) \; .$$

因此, 方程(17.2.3)中K的零阶项和一阶项分别给出**

$$\int d^4x \left[\Delta^n[\chi;x] \frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi,0]}{\delta\chi^n(x)} + \mathscr{D}_N^n[\chi;x] \frac{\delta_L S_R[\chi]}{\delta\chi^n(x)} \right] = 0$$
(17.2.6)

和

$$\int \mathrm{d}^4x \left[\Delta^n(\chi; x) \frac{\delta_L \mathscr{D}_N^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} + \mathscr{D}_N^n(\chi; x) \frac{\delta_L \Delta^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0 .$$
(17.2.7)

通过引入

$$\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi] \equiv S_R[\chi] + \epsilon \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0]$$
(17.2.8)

和

$$\Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \equiv \Delta^n(x) + \epsilon \mathscr{D}_N^n(x) , \qquad (17.2.9)$$

其中 ϵ 是无限小量,上述关系可以变得更加清晰.这样,(17.2.6)(连同 S_R 的BRST不变性)就告诉我 们 $\Gamma_N[\chi]$ 在变换

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \theta \Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \tag{17.2.10}$$

下不变,而方程(17.2.7)(连同原始BRST变换的的幂零性)则告诉我们这一变换是幂零的.

我们现在必须考察这一幂零变换可以采取什么形式. 正如已经提及的, $\Gamma_{N,\infty}$ 只由量纲不超过4的项构成, 所以 \mathcal{D}_N^n 以及随之的 $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$ 最多有原始BRST变换函数 $\Delta^n(x)$ 的量纲. 另外, \mathcal{D}_N^n 以及随之的 $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$ 的Lorentz变换性质和鬼量子数必须与 $\Delta^n(x)$ 相同. 因此, 变换(17.2.10)的最普遍形式是

$$\begin{split} \psi &\to \psi + \mathrm{i}\theta\omega^{\alpha}T_{\alpha}\psi \ ,\\ A_{\alpha\mu} &\to A_{\alpha\mu} + \theta[B_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\omega_{\beta} + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma}] \ ,\\ \omega_{\alpha} &\to \omega_{\alpha} - \frac{1}{2}\theta E_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\omega_{\gamma} \ , \end{split}$$

^{**}回忆,由于 χ^n 和 K_n 有相反的统计,所以对于任意的玻色泛函A和B,

$$\frac{\delta_R A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L B}{\delta K_n} = -\frac{\delta_L A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R B}{\delta K_n} = -\frac{\delta_R B}{\delta K_n} \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n},$$

这样,方程(17.2.6)和(17.2.7)中的第二项就变成这里所表现出的形式.

其中 T_{α} 是作用在旋量场上的某个矩阵, 而 $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 是常数, 其中 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 β 和 γ 是反对称的. 另外, ω_{α}^* 和 h_{α} 的变换是线性的, 因而是不变的:

$$\omega_{\alpha}^* \to \omega_{\alpha}^* - \theta h_{\alpha} , \qquad h_{\alpha} \to h_{\alpha} .$$

接下来我们附加幂零性条件. 最关键的要求是 $E_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\omega_{\gamma}$ 应该是不变的. 这产生了 $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}\omega_{\delta}\omega_{\epsilon}\omega_{\gamma}$ 为零的要求, 使得 $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}$ 关于 δ , ϵ , γ 全反对称的部分为零:

 $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon} + E_{\alpha\beta\epsilon}E_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta}E_{\beta\epsilon\gamma} = 0 \; .$

但这仅告诉了我们 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 是某个Lie代数 \mathscr{E} 的结构常数.由于 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 在 $\epsilon \to 0$ 时趋于原始规范Lie代数 \mathscr{A} 的结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$,所以 \mathscr{E} 必须与 \mathscr{A} 相同,并且结构常数 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 与原始的 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 仅能相差一个乘数因子:[†]

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \mathscr{Z}C_{\alpha\beta\gamma}$$
.

(这是单纯规范群的情况;在一般情况下,对于每一个单子群,我们分别有一因子爱.)

接下来,我们转向条件:当变换(17.2.10)作用在规范场上时,它是幂零的. $B_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\omega_{\beta} + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma}$ 不变的要求告诉我们

$$D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta\delta\epsilon} - D_{\alpha\beta\epsilon}D_{\beta\delta\gamma} = E_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta} = \mathscr{Z}C_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta}$$

以及

$$B_{\alpha\beta}E_{\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\delta}B_{\beta\gamma} \; .$$

第一个条件有唯一解^{††}

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \mathscr{Z}C_{\alpha\beta\gamma}$$

第二个条件告诉我们矩阵*B_{αβ}*与规范群的伴随表示对易,因此必须正比于克罗内克-δ,我们将比例 系数记为*ℒN*:

$$B_{\alpha\beta} = \mathscr{ZN}\delta_{\alpha\beta}$$

最后,当变换(17.2.10)作用在费米场(若有的话)上时是幂零的,这一条件要求 $\omega^{\alpha}T_{\alpha}\psi$ 是不变的.这告诉我们

$$[T_{\beta}, T_{\gamma}] = \mathrm{i} E_{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha} ,$$

所以 T_{α} 与原始拉格朗日量中的生成元 t_{α} 仅相差因子 \mathscr{Z} :

$$T_{\alpha} = \mathscr{Z} t_{\alpha}$$
.

因此,我们看到了,除了出现新的常数2°和 N,变换(17.2.10)就是我们所出发的BRST变换:

$$\psi \to \psi + i \mathscr{Z} \theta \omega^{\alpha} t_{\alpha} \psi , \qquad (17.2.11)$$

$$A_{\alpha\mu} \to A_{\alpha\mu} + \mathscr{Z}\theta \left[\mathscr{N}\partial_{\mu}\omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma}\right] , \qquad (17.2.12)$$

$$\omega_{\alpha} \to \omega_{\alpha} - \frac{1}{2} \mathscr{D}\theta C_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\omega_{\gamma} , \qquad (17.2.13)$$

$$\omega_{\alpha}^* \to \omega_{\alpha}^* - \theta h_{\alpha} , \qquad (17.2.14)$$

$$h_{\alpha} \to h_{\alpha}$$
 . (17.2.15)

[†]整体规范不变的要求排除了 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 通过非平庸相似变换与 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 相关的所有可能性.

^{††}矩阵 $(D_{\gamma})_{\alpha\beta} \equiv D_{\gamma\alpha\beta}/\mathscr{Z}$ 满足规范Lie代数的对易关系, $[D_{\gamma}, D_{\epsilon}] = C_{\beta\epsilon\gamma}D_{\beta}$. 但是与《的伴随表示维数相同并且有 着相同的《变换性质的单Lie代数的唯一表示是伴随表示本身.

现在我们要用这一对称性约束修正作用量(17.2.8)的结构. 既然, 这仅包含了原始重整化作用量 与N-圈修正的无限大部分, 它必须是一个拉格朗日密度的积分

$$\Gamma_N^{(\epsilon)} = \int \mathrm{d}^4 x \,\mathscr{L}_N^{(\epsilon)} \,, \qquad (17.2.16)$$

其中 $\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 是场与场导数的定域函数,并且它的量纲(按质量幂次计)不超过4. 更进一步,正如 我们在16.4节所发现的,对于原始作用量的所有对称性,若该对称性以线性的方式作用在场 上,那么它也是 $\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 的对称性. 为了找出这些对称性,回忆在广义 ξ -规范下,方程(15.7.6)中 的"新"拉格朗日密度所采取的形式是通过用方程(15.7.6)中的 $h_{\alpha}f_{\alpha} + \frac{1}{2}\xi h_{\alpha}h_{\alpha}$ 替换方程(15.6.16)中 的 $-(\partial_{\mu}A_{\alpha}^{\mu})(\partial_{\nu}A_{\alpha}^{\nu})$ 项给出:

$$\mathscr{L}_{\text{NEW}} = \mathscr{L}_{\text{M}} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}_{\alpha} F_{\alpha\mu\nu} - \partial_{\mu} \omega^*_{\alpha} \partial^{\mu} \omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} \omega^*_{\alpha}) A^{\mu}_{\gamma} \omega_{\beta} + h_{\alpha} \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha} + \frac{1}{2} \xi h_{\alpha} h_{\alpha} .$$
(17.2.17)

对这一公式的检查揭示出了如下的线性对称性:

(1) Lorentz不变性.

(2) 整体规范不变性——即,在如下的变换下不变,

$$\delta\psi_{\ell}(x) = i\epsilon^{\alpha}(t_{\alpha})_{\ell}{}^{m}\psi_{m}(x) , \qquad (17.2.18)$$

$$\delta A^{\beta}{}_{\mu}(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^{\alpha} A^{\gamma}{}_{\mu}(x) , \qquad (17.2.19)$$

$$\delta\omega_{\beta}(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^{\alpha}\omega_{\gamma}(x) , \qquad (17.2.20)$$

$$\delta\omega_{\beta}^{*}(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^{\alpha}\omega_{\gamma}^{*}(x) , \qquad (17.2.21)$$

$$\delta h_{\beta}(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^{\alpha} h_{\gamma}(x) , \qquad (17.2.22)$$

其中 ϵ^{α} 是无限小常数参量.

(3) 反鬼平移不变性——即,在变换

$$\omega_{\alpha}^* \to \omega_{\alpha}^* + c_{\alpha} \tag{17.2.23}$$

下不变,其中c_α是无限小常数参量.

(4) **鬼数守恒**——即, ω_{α} 的鬼数始终为+1, ω_{α}^* 的鬼数始终为-1, 而其它所有场的鬼数始终为0.

现在,我们将继续解出最一般的可重整拉格朗日密度的结构,也就是说该拉格朗日密度有量 纲不超过4的项组成,它有那些线性作用的对称性,并且在修正BRST变换(17.2.11)—(17.2.15)下 不变.

从方程(17.2.17)中我们可以看出,场 A^{μ}_{α} , ω_{α} , ω^{*}_{α} 和 h_{α} 的量纲(按质量幂次计)给别是+1,+1,+1和+2.又注意到,鬼数守恒要求 ω 和 ω^{*} 成对出现,而反鬼平移不变性则使得 ω^{*} 总作为导数出现. 每对 ω 场和 $\partial_{\mu}\omega^{*}$ 场使得量纲+3,所以,若某项含有的这种对的个数超过1个,可重整性规则就排除了该项.有了一个这样的对后,我们最多还能有一个额外的导数或一个额外的规范场,而Lorentz不变性则要求我们必须在两者之中选一个.那么,唯一包含鬼场的可重整性允许的相互作用就是形式为 $\partial_{\mu}\omega^{*}_{\alpha}A^{\mu}_{\alpha}\omega_{\beta}$ 的项的线性组合.

接下来,我们来考察包含场 h_{α} 以及除了 ω 和 ω^* 的其它可能的场的项. h_{α} 的量纲为+2. 所以可 重整性与Lorentz不变性要求[‡]该场出现时要乘以 h_{β} 或 $\partial_{\mu}A^{\mu}_{\beta}$ 或 $A^{\mu}_{\beta}A_{\mu\gamma}$.

[‡]在含有标量场的理论中,可重整项还将包含 h_{α} 与一个或两个标量场相乘的项.这样的项不会引起任何麻烦,但为了简单起见,在这里不对它们进行考察.
最后, 拉格朗日量将包含只含有物质场和规范场的项. 我们称这些项的和为*L_{ψA}*. 将这些放在 一起并使用整体规范不变性, 假设对称性(除了BRST不变性)所允许的最一般的可重整相互作用 采取如下的形式

$$\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)} = \mathscr{L}_{\psi A} + \frac{1}{2} \xi' h_{\alpha} h_{\alpha} + c h_{\alpha} \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha} - e_{\alpha\beta\gamma} h_{\alpha} A^{\mu}_{\beta} A_{\gamma\mu} - Z_{\omega} (\partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha}) (\partial_{\mu} \omega_{\alpha}) - d_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha}) \omega_{\beta} A^{\mu}_{\gamma} , \qquad (17.2.24)$$

其中 $\xi', Z_{\omega}, c, d_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $e_{\alpha\beta\gamma}$ 是未知常数,除了整体规范不变性和 $e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta}$ 这样显然的对称性质之 外,对于这些常数没有约束.(正如之前所提及的,为简单起见,我们假定规范群是单纯的,但是可 以平庸地扩张到简单规范群与U(1)规范群的直和;例如,取代只有一个正比于 $h_{\alpha}h_{\alpha}$ 的项,我们可 以有这种项的和,而其中的每一项对应规范群的一个单纯子群.)

现在我们附加BRST不变性. 要使 $\delta \mathscr{L}_N^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta \partial_\mu h_\alpha \partial^\mu h_\alpha$ 的项相互抵消会要求

$$c = Z_{\omega} / \mathscr{ZN} . \tag{17.2.25}$$

要使 $\delta \mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta \partial_{\mu} h_{\alpha} \omega_{\beta} A^{\mu}_{\gamma} ({\rm g} \theta \partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha} \omega_{\beta} \partial^{\mu} \omega_{\gamma})$ 的项相互抵消会要求

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -(Z_{\omega}/\mathcal{N})C_{\alpha\beta\gamma} . \qquad (17.2.26)$$

由于结构常数满足Jacobi恒等式, $\delta \mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta \partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*} \omega_{\beta} \omega_{\gamma} A_{\delta}^{\mu}$ 的项会自动相互抵消.要使 $\delta \mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta h_{\alpha} \partial_{\mu} \omega_{\beta} A_{\gamma}^{\mu}$ (或 $\theta h_{\alpha} A_{\beta}^{\mu} A_{\gamma \mu} \omega_{\delta}$)的项相互抵消会给出

$$e_{\alpha\beta\gamma} = 0 \ . \tag{17.2.27}$$

最后,对于作用在物质场和规范场上的无限小变换(17.2.10)而言,它的效果等同于规范参量 $\epsilon_{\alpha} = \mathscr{L}\mathcal{N}\theta\omega_{\alpha}$ 且规范耦合被因子1/ \mathcal{N} 重整化后的定域规范变换(被因子1/ \mathcal{N} 重整化是指 t_{α} 和 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 分别 被替换成 $\tilde{t}_{\alpha} \equiv t_{\alpha}/\mathcal{N}$ 和 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$),所以,对于 $\delta \mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 中只含有一个 ω_{α} 因子但不含 h_{α} 和 ω_{α}^{*} 因 子的项,它们的相互抵消会告诉我们,若这些场的拉格朗日量 $\mathscr{L}_{\psi A}$ 所含的耦合常数是重整化后的,那么它是规范不变的.我们由此得出,我们所假设的对称性原理所允许的最一般的可重整拉格朗 日密度是

$$\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)} = -\frac{1}{4} Z_{A} \tilde{F}_{\alpha}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\mu\nu} - Z_{\psi} \bar{\psi} \gamma^{\mu} [\partial_{\mu} - \mathrm{i} \tilde{t}_{\alpha} A_{\alpha\mu}] \psi - \bar{\psi} m_{\psi} \psi + \frac{1}{2} \xi' h_{\alpha} h_{\alpha} + (Z_{\omega} / \mathscr{N} \mathscr{Z}) h_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^{\mu} - Z_{\omega} (\partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*}) (\partial_{\mu} \omega_{\alpha}) + Z_{\omega} \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*}) \omega_{\beta} A_{\gamma}^{\mu} , \qquad (17.2.28)$$

其中 $\tilde{F}_{\alpha}^{\mu\nu}$ 上的波浪符表明这个场强是使用重整化结构常数 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$ 计算的.然而,除却几 个新出现的常系数外,这与我们所出发的拉格朗日量是相同的.通过调整未重整化原始拉格朗日 量中相应常数的第*N*阶项,我们可以随意调节这一拉格朗日量中的新常数(包括规范耦合常数).特 别地,我们可以调整这些项使得 $\Gamma_N^{(\epsilon)} = S_R$,在这一情况下 $\Gamma_{N,\infty} = 0$,完成了证明.

在之上的证明中, 我们着重使用了规范固定拉格朗日量(17.2.17)在反鬼平移变换(17.2.23)下的偶然不变性. 对于除 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha}$ 以外的规范固定函数, 即不是时空导数的规范固定函数, 这一对称性不会体现出来. 经常引用的一个例子是 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha} + a_{\alpha\beta\gamma}A^{\mu}_{\beta}A_{\gamma\mu}$, 它保持了Lorentz不变性和整体规范不变性, 其中的 $a_{\alpha\beta\gamma}$ 是关于 β 和 γ 对称的常数矩阵, 它在整体规范变换下按照一个张量变

换. (这样的常数张量对于所有N > 3的SU(N)群是存在的.) 另一个重要例子是将在17.4节引入的 背景规范固定泛函.

 $\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 是场与场导数量纲不超过4的定域泛函,且 $\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 是Lorentz-不变以及整体规范不变,即在 重整化BRST变换(17.2.11)—(17.2.15)下不变,就这些结论而言,即使没有了反鬼平移不变性,得 出这些结论的讨论也不会受到影响.但是,如果没有了反鬼平移不变性, $\mathscr{L}_{N}^{(\epsilon)}$ 中就会有新的项,并 且满足上述条件.既然变换(17.2.11)—(17.2.15)是幂零的,我们可以将这样的项写成s'F,在这里变 换(17.2.11)—(17.2.15)被写成 $\chi^{n} \to \chi^{n} + \theta s' \chi^{n}$,而F是鬼数为—1的Lorentz-不变且整体规范不变 的函数.这种项的一种可能是

$$a_{\alpha\beta\gamma}s'\left(\omega_{\alpha}^{*}A_{\beta\mu}A_{\gamma}^{\mu}\right) = -a_{\alpha\beta\gamma}\left[h_{\alpha}A_{\beta\mu}A_{\gamma}^{\mu} + 2\mathscr{Z}\omega_{\alpha}^{*}(\mathscr{N}\partial_{\mu}\omega_{\beta} + C_{\beta\delta\epsilon}A_{\delta\mu}\omega_{\delta})A_{\gamma}^{\mu}\right]\,.$$

这不会引起任何问题: 它仅是规范固定函数 f_{α} 中的 $a_{\alpha\beta\gamma}A^{\mu}_{\beta}A_{\gamma\mu}$ 项所产生的通常的鬼场项和规范固定项的重整化版本. 但存在另一种可能的项, 它的形式是

$$b_{\alpha\beta\gamma}s'\left(\omega_{\alpha}^{*}\omega_{\beta}^{*}\omega_{\gamma}\right) = -b_{\alpha\beta\gamma}\left[2h_{\alpha}\omega_{\beta}^{*}\omega_{\gamma} + \frac{1}{2}\mathscr{Z}C_{\gamma\delta\epsilon}\omega_{\alpha}^{*}\omega_{\beta}^{*}\omega_{\delta}\omega_{\epsilon}\right],$$

其中 $b_{\alpha\beta\gamma}$ 是常数并关于 α 和 β 反对称,它在整体规范变换下按照张量变换.(对于任意的Lie群,这样的张量总是存在的;例如,我们可以令 $b_{\alpha\beta\gamma}$ 正比于 $C_{\alpha\beta\gamma}$.)但Faddeev-Popov-De Witt方法无法给出拉格朗日量中的4-鬼场相互作用,所以不存在可用的抵消项以吸收这一项中的紫外发散.这不仅仅是证明可重整性的技术性障碍;对于像 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha} + a_{\alpha\beta\gamma}A^{\mu}_{\beta}A_{\gamma\mu}$ 这样的规范固定函数,在4-鬼振幅中,一圈图确实产生了发散,并且这一发散无法被Faddeev-Popov-De Witt拉格朗日量中的抵消项抵消.

除了避开 $f_{\alpha} = \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha}$ 以外的规范固定函数, 解决这一问题的唯一方法似乎是在15.7节所提过 的一个方案. 我们必须放弃Faddeev-Popov-De Witt方法, 取而代之, 在一开始就将作为规范场, 物 质场, 鬼场和辅助场泛函的作用量取成在BRST对称性以及理论其它对称性不变的最一般的可重 整形式. 根据15.8节的讨论, 作用量可以写成 $I_0 + s\Psi$ 的形式, 其中 I_0 是无鬼的, 而S-矩阵与 Ψ 无关, 所以, 通过在鬼场退耦的轴向规范下量子化这一理论, 然后将 Ψ 取成我们所希望的形式, 我们可以 证明这一步骤的合理性. 特别地, 我们可以在作用量中引入 $s(\omega^*\omega^*\omega)$ 项以充当4-鬼顶点中发散的 抵消项.

17.3 重整化: 一般规范理论^{*}

在上一节,对于非阿贝尔规范理论的可重整性证明依赖于对作用量中量纲不超过4的可能项的"暴力"分析.但我们在第12章看到,附加在作用量中项的量纲上的限制至多是一个很好的近似. 用来描述强相互作用,弱相互作用以及电磁相互作用的成功可重整量子场论几乎肯定是有效场论,这些理论带有量纲d > 4的项;这些项一般不会被观测到,它们会被某些非常大的质量的4 - d次方所抑制,这些质量或许是10¹⁶-10¹⁸GeV阶的.引力也可以被一个有效场论描述,在这个理论中,拉格朗日密度不仅包含Einstein-Hilbert项- $\sqrt{g}R/16\pi G$,也包含由4个或者更多个引力场导数所构建的所有标量.我们需要证明这类规范理论,也就是在幂次计数意义下不可重整的规范理论,在现代意义下却是可重整的,即规范对称性会控制紫外发散使得总存在可用的抵消项以抵消每个无限大.^[3]

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

由于这个原因,我们回到15.9节所引入的作用量 $S[\chi, \chi^{\ddagger}]$,将作用量取成独立场 χ^{n} (包括规范场和物质场 ϕ^{r} ,鬼场 ω^{A} 以及非最小化场 ω^{A*} 和 h^{A})和反场 χ_{n}^{\ddagger} 的函数.在类似量子引力或Yang-Mills理论的理论中,这些理论基于结构常数为 f^{C}_{AB} 的闭规范代数,作用量被约束在如下的形式

$$S = I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi] \phi_r^{\ddagger} + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f^C{}_{AB}[\phi] \omega_C^{\ddagger} - h^A \omega_A^{\ast \ddagger} , \qquad (17.3.1)$$

其中 $I[\phi]$ 在无限小规范变换 $\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$ 下不变. (同15.9节一样,指标r, A等包含时空坐标, 在对这些指标的求和中要对时空坐标积分.)

在这里,我们不会将自己限制在这一形式的作用量下,但是我们会假定理论会被附加定域 对称性,而这些对称性是通过要求作用量在它的反场相关性上必须服从某些"结构约束"得到 的,方程(17.3.1)就提供了这样的一个例子.结构约束假定是线性的,也就是说,如果结构约束对 于 $S + \mathscr{S}_1$ 和 $S + \mathscr{S}_2$ 都是满足的,那么对于任意常数 α_1 和 α_2 , $S + \alpha_1 \mathscr{S}_1 + \alpha_2 \mathscr{S}_2$ 也满足结构约束.我 们同时附加量子主方程(15.9.35)

$$(S,S) - 2i\hbar\Delta S = 0 , \qquad (17.3.2)$$

其中ΔS通过方程(15.9.34)定义, 而按照上一节脚注所描述的含义, 因子ħ现在作为"圈计数"参量 显式地写出.

将作用量取成ħ的幂级数

$$S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \cdots , \qquad (17.3.3)$$

其中*S_R*是与*S*结构大体相同的作用量,但它的所有耦合参量被替换成了有限的重整化值,而*S_N*是一组无限大抵消项.假定作用量*S*对于ħ的所有阶均满足量子主方程(17.3.2),这样*S_R*就会满足经典主方程

$$(S_R, S_R) = 0 (17.3.4)$$

而抵消项满足

$$\left(S_R, S_N\right) = -\frac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} \left(S_M, S_{N-M}\right) + i\Delta S_{N-1} . \qquad (17.3.5)$$

抵消项 S_N 本身还不足以抵消掉圈图中的紫外发散. 作为传统场重整化的推广, 我们还得引入 一组重整化场和重整化反场, 它们通过一个任意的反正则变换以原始场和原始反场的形式定义. 无限小的反正则变换可以通过方程(15.9.26)以无限小生成泛函 δ F的形式定义, 所以连续的反正 则变换 $G(t) \rightarrow G(t + \delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))(其中G(t)是场和反场的任意泛函, F(t)是生成泛$ $函)会给出有限大的正则变换<math>G \rightarrow \tilde{G} \equiv G(1)$, 并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = (F(t), G(t)) , \qquad G(0) = G . \qquad (17.3.6)$$

如果F(t)给定为幂级数

$$F(t) = \hbar F_1 + \frac{1}{2}\hbar^2 t F_2 + \cdots , \qquad (17.3.7)$$

那么方程(17.3.3), (17.3.6)和(17.3.7)就产生了变换后的作用量

$$\tilde{S} = S_R + \hbar \Big[S_1 + (F_1, S_R) \Big] + \hbar^2 \Big[S_2 + (F_1, S_1) + (F_2, S_R) + \frac{1}{2} (F_1, (F_1, S_R)) \Big] + \cdots$$
(17.3.8)

现在,问题就在于我们是否可以用我们所拥有的自由度去选择*F_N*和*S_N*,进而使得圈图中产生的所 有无限大都被抵消掉. 如上文所述, 方程(17.3.3)中的第一项 S_R 自动是有限的. 假定对于M < N, 无限大通 过 S_M 和 F_M 被抵消掉了, 那么确实有可能消除量子有效作用量中M < N的 \hbar^M 阶项 Γ_M 中的所 有无限大. 正如我们在上一节所看到的, Zinn-Justin方程告诉我们, 量子有效作用量中 \hbar^N 阶项的 无限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ 满足条件

$$\left(S_R, \Gamma_{N,\infty}\right) = 0 . \tag{17.3.9}$$

场变量 χ^n 和反场变量 χ_n^{\ddagger} 通过反正则变换与变量 χ^n 和 K_n 相关,而反正则变换保护了所有的反括号, 所以,方程(17.3.9)中的反括号可以 χ^n 和 χ_n^{\ddagger} 的形式而非 χ^n 和 K_n 进行计算.

抵消项 S_N 所满足的条件(17.3.5)与 $\Gamma_{N,\infty}$ 所满足的条件(17.3.9)并不相同. 然而, 给定任意满足 方程(17.3.5)的 S_N^0 , 我们可以找到一类另外的解

$$S_N = S_N^0 + S_N',$$

其中 S'_N 除了要满足以下条件外是任意的, 即 $S_R + S'_N$ 要像 $S_R + S^0_N$ 那样满足与 S_R 相同的对称性条件, 并且, 为了不使方程(17.3.5)无效

$$(S_R, S'_N) = 0$$
 . (17.3.10)

因此,量子有效作用量中的第N阶项的无限大部分可以写成

$$\Gamma_{N,\infty} = S'_{N,\infty} + (F_{N,\infty}, S_R) + X_{N,\infty} , \qquad (17.3.11)$$

其中 X_N 由来自圈图的项,来自 S_N^0 中的项,以及 Γ 中包含M < N的 S_M 和 F_M 的各种项组成.例如, 对于N = 2,方程(17.3.8)给出

$$X_2 = S_2^0 + 2(F_1, S_1) + (F_1, (F_1, S_R)) + 仅包含S_R的两圈项 + 包含S_R, S_1和F_1的一圈项.$$

对于我们的目的,关于 X_N 我们唯一需要知道的是它确实不包含 S'_N 或 F_N ,并且它在 S_R 的任何可实现的线性整体变换下不变.

现在,因为 $(S_R, S_R) = 0$,操作 $F \mapsto (S_R, F)$ 是幂零的;对于所有的F,

$$\left(S_R, \left(S_R, F\right)\right) = 0.$$
(17.3.12)

因此,从方程(17.3.9)和(17.3.10)—(17.3.12)可以得出

$$(S_R, X_{N,\infty}) = 0$$
. (17.3.13)

通过选择 $F_{N,\infty}$ 使其等于 $Y, X_{N,\infty}$ 中任何形式为 (S_R, Y) 的项在方程(17.3.11)都可以被抵消掉.因此, $X_{N,\infty}$ 中需要被抵消项 $S'_{N,\infty}$ 抵消掉的可能的剩余无限大项的空间,由那些满足 $(S_R, X) = 0$ 的 泛函X组成,并且如果两个泛函相差的项形式为(S, X),则认为这两个泛函是等价的.换句话说, Γ_N 中需要被抵消项 S'_N 抵消掉的无限大属于映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调.

 $S_R + S'_N$ 必须满足附加在作用量S上的结构约束,这一要求会限制抵消项 S'_N 的可能形式.因此,如果我们能够证明映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调仅由那些满足这一结构约束的泛函组成,我们就完成了可重整性的证明.

在量子引力与半单规范对称性的Yang-Mills场论耦合的情况下,这一理论的对称性由结构约束(17.3.1)实现.在这一情况下会有一个定理^[4]:构成**映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调的泛函 $A[\phi]$ (映射所在的空间是鬼数为零的定域泛函的空间,而不是鬼数为零的时空相关函数的空间),在结构常数为 f^C_{AB} 的规范变换 $\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$ 下不变.任何这类的N阶无限大都可以被相同形式的抵消 项 S'_N 抵消掉,所以,尽管这些理论在传统的幂次计数意义下是不可重整的,但是,若可重整是指,通过对原始裸作用量 $I[\phi]$ 中的参量进行选择,并对场和反场做一个合适的重整化,所有无限大都可以被消除掉,那么在这一意义下,这些理论完全是可重整的.

在其它理论中, 映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调会包含额外的项.这并不会一定要求削弱结构约束, 这是因为上同调中的额外项可能不对应真实的紫外发散.例如, 在含有U(1)因子的规范理论中, 上同调中所包含的项中会有一项^[4]对应于U(1)规范对称性的作用量在该理论各种场上的重定义, 如果这一项是无限大的, 那么它将会要求我们削弱结构约束, 让方程(17.3.1)中的变换函数 $f_A^r[\phi]$ 保持任意.但是软光子定理告诉我们不同场的U(1)耦合的比值(就像量子电动力学中各种轻子电荷的比值)不会被辐射修正影响,(参看10.4节)这一定理会禁止这一无限大.如果上同调中的额外项确实包含紫外发散, 那么, 为了让每一可能的紫外发散都存在一个抵消项, 附加在S上的结构约束 就必须要被削弱.现在还不清楚这是否总是可能的; 如果不是, 某些理论可能会由于它们不可移除的紫外发散而不得不被丢弃掉.

17.4 背景场规范

接下来,我们转向一个显然保护一类规范对称性的计算方法,这个计算方法也因此证实是极 其方便,在一圈计算中尤其如此.我们视有效作用量 $\Gamma[A,\psi,\omega,\omega^*]$ 为经典外规范场 $A_{\alpha\mu}(x)$,经典外 物质场 $\psi_{\ell}(x)$,经典外鬼场 $\omega_{\alpha}(x)$ 和经典外反鬼场 $\omega^*_{\alpha}(x)$ 的泛函^{*}.尽管鬼场和反鬼场无法出现在初 态或末态中,为了处理有外鬼线或外反鬼线的那部分图,在考察背景规范场和背景物质场的同时, 我们也会考察背景鬼场和背景反鬼场.

正如16.1节中所描述的, $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 是真空-真空振幅的连通单粒子不可约图的和, 在计算 这些振幅的理论中, 我们要积掉的量子场 A', ψ', ω' 和 $\omega'*$ 被替换成了偏移场 $A + A', \psi + \psi', \omega + \omega'$ 和 $\omega^* + \omega'^*$, 路径积分的积分变量是加撇的场, 而不加撇的场保持不变. 我们几乎可以按照我们所 喜欢的任何方式自由选择规范固定函数 $f_{\alpha}(x)$; 取代我们之前的选择 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A'^{\mu}_{\alpha}(\mathrm{id}\partial_{\mu}[A'^{\mu}_{\alpha} + A^{\mu}_{\alpha}])$, 我们现在取^[5]

$$f_{\alpha} = \partial_{\mu} A_{\alpha}^{\prime \mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma}^{\prime \mu} . \qquad (17.4.1)$$

这一选择的原因是, 它使得规范固定项 $f_{\alpha}f_{\alpha}$ 在一个形式变换下不变, 在这个形式变换中, 背景 场 $A_{\alpha}^{\prime\prime}$ 按照规范场变换, 而量子场 $A_{\alpha}^{\prime\prime}$ 就像属于规范群伴随表示的普通物质场那样进行齐次变换

$$\delta A^{\mu}_{\alpha} = \partial^{\mu} \epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta} A^{\mu}_{\gamma} , \qquad (17.4.2)$$

$$\delta A_{\alpha}^{\prime \mu} = C_{\alpha\beta\gamma} \,\epsilon_{\beta} \,A_{\gamma}^{\prime \mu} \,. \tag{17.4.3}$$

看到f_a的变换性质的最好方法是将f_a写成一类新的协变导数

$$f_{\alpha} \equiv \bar{D}_{\mu} A_{\alpha}^{\prime \mu} , \qquad (17.4.4)$$

^{**}严格地讲,只有要求S中的耦合系数不会取某些会使得S会在更大的定域对称群下不变的值,这才是有效的.例如,这排除了S = 0的情况.

^{*}我们现在回到规范固定泛函B[f]的特殊选择——高斯型(15.7.4),并且我们会积掉辅助场 h_{α} ,使得修正拉格朗日量中的规范固定项就是 $-f_{\alpha}f_{\alpha}/2\xi$.

其中,对于伴随表示下的任何场 ϕ_{α}

$$\bar{D}_{\mu}\phi_{\alpha} \equiv \partial_{\mu}\phi_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\phi_{\gamma} . \qquad (17.4.5)$$

我们看到在变换(17.4.2)和(17.4.3)下,函数(17.4.1)就像A'_α那样变换:

$$\delta f_{\alpha} = -C_{\alpha\beta\gamma} \,\epsilon_{\beta} f_{\gamma} \,\,, \tag{17.4.6}$$

所以,修正拉格朗日量中的 $f_{\alpha}f_{\alpha}$ 项是不变的

$$\delta(f_{\alpha}f_{\alpha}) = -2C_{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha}\epsilon_{\beta}f_{\gamma} = 0. \qquad (17.4.7)$$

另外, 原始拉格朗日密度 *L* 仅通过和*A* + *A*′依赖于*A*和*A*′, 它在(17.4.2)和(17.4.3)的组合变换下经 历一个普通的规范变换

$$\delta(A^{\mu}_{\alpha} + A^{\prime \mu}_{\alpha}) = \partial^{\mu} \epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta} (A^{\mu}_{\gamma} + A^{\prime \mu}_{\gamma}) . \qquad (17.4.8)$$

如果我们对背景物质场和量子物质场的变换是

$$\delta \psi = i t_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \psi , \qquad (17.4.9)$$

$$\delta\psi' = i t_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \psi' , \qquad (17.4.10)$$

那么也有

$$\delta(\psi + \psi') = i t_{\alpha} \epsilon_{\alpha}(\psi + \psi') . \qquad (17.4.11)$$

原始拉格朗日密度 \mathscr{L} 在原始规范变换(17.4.8)和(17.4.11)下不变,并且仅依赖于 $A + A' \pi \psi + \psi'$,所以它在新的形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)下也是不变的.

将 \mathscr{L} 以背景协变导数 \bar{D}_{μ} 的形式写出会使得这一不变性更加明晰,而这将是有帮助的.一般而言,我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= -\frac{1}{4} \Big(\partial_{\mu} [A_{\alpha\nu} + A'_{\alpha\nu}] - \partial_{\nu} [A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}] + C_{\alpha\beta\gamma} [A_{\beta\mu} + A'_{\beta\mu}] [A_{\gamma\nu} + A'_{\gamma\nu}] \Big)^{2} \\ &+ \mathscr{L}_{M} \Big(\psi + \psi', \partial_{\mu} (\psi + \psi') - \mathrm{i}t_{\alpha} (A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}) (\psi + \psi') \Big) \\ &= -\frac{1}{4} \Big(F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_{\mu} A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_{\nu} A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \Big)^{2} \\ &+ \mathscr{L}_{M} \Big(\psi + \psi', \bar{D}_{\mu} (\psi + \psi') - \mathrm{i}t_{\alpha} A'_{\alpha\mu} (\psi + \psi') \Big) , \end{aligned}$$
(17.4.12)

其中,同方程(17.4.5)一样,

$$\bar{D}_{\mu}A'_{\alpha\nu} \equiv \partial_{\mu}A'_{\alpha\nu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu} , \qquad (17.4.13)$$

$$\bar{D}_{\mu}\psi \equiv \partial_{\mu}\psi - it_{\alpha}A_{\alpha\mu}\psi , \qquad (17.4.14)$$

而 $F_{\alpha\mu\nu}$ 是背景场强

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} . \qquad (17.4.15)$$

(*2*第一项中的平方用来暗示写出的指标要进行收缩.)因为*2*仅通过场强 $F_{\alpha\mu\nu}$ 以及"物质"场 $A'_{\alpha\mu}$, ψ' 和 ψ 的背景协变导数 \bar{D}_{μ} 牵扯到 $A_{\alpha\mu}$,所以它在新变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)下显然 是不变的. 这个新变换应该小心地与真实的规范变换区分开. 真实的规范变换在仅用来描述背景场的A和 ψ 上没有效应,并诱导出了A + A'和 $\psi + \psi'$ 上的普通规范变换,所以

$$\delta_{\text{TRUE}} A^{\mu}_{\alpha} = 0 , \qquad (17.4.16)$$

$$\delta_{\text{TRUE}} A^{\prime \mu}_{\alpha} = \partial^{\mu} \epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta} (A^{\mu}_{\gamma} + A^{\prime \mu}_{\gamma})$$

$$= \bar{D}^{\mu}\epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}A_{\gamma}^{\prime\mu} \tag{17.4.17}$$

以及

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi = 0 , \qquad (17.4.18)$$

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi' = \mathrm{i} t_{\alpha} \epsilon_{\alpha} (\psi + \psi') . \qquad (17.4.19)$$

当然,这与形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)在A + A'和 $\psi + \psi'$ 上的效应是相同的,因而也保持原始拉格朗日量*L*不变. 然而,对于 f_{α} 的新选择(17.4.1), $f_{\alpha}f_{\alpha}$ 项是不依赖于A + A'的,并且在(17.4.16)和(17.4.17)下也不是不变的. 取而代之,

$$\delta_{\text{TRUE}} f_{\alpha} = \bar{D}_{\mu} (\bar{D}^{\mu} \epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta} A_{\gamma}^{\prime \mu}) , \qquad (17.4.20)$$

其中D_µ由(17.4.5)给定.

最后,我们来考察这一新规范下的鬼场拉格朗日量.一般而言,将 $\delta_{\text{TRUE}} f_{\alpha}$ 中的 ϵ_{α} 替换成鬼场 $\omega_{\alpha} + \omega'_{\alpha}$ 就给出了鬼场作用量中的量(15.7.3):

$$\Delta_{\alpha} = \bar{D}_{\mu} \Big[\bar{D}^{\mu} (\omega_{\alpha} + \omega_{\alpha}') - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_{\beta} + \omega_{\beta}') A_{\gamma}'^{\mu} \Big] .$$
(17.4.21)

因此, 方程(15.6.2)中的鬼场拉格朗日量是

$$\mathscr{L}_{\rm GH} = (\omega_{\alpha}^* + \omega_{\alpha}^{\prime*}) \bar{D}_{\mu} \Big[\bar{D}^{\mu} (\omega_{\alpha} + \omega_{\alpha}^{\prime}) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_{\beta} + \omega_{\beta}^{\prime}) A_{\gamma}^{\prime\mu} \Big]$$
(17.4.22)

或者,进行分部积分,

$$\mathscr{L}_{\rm GH} = -\left(\bar{D}_{\mu}(\omega_{\alpha}^{*} + \omega_{\alpha}^{\prime*})\right) \left[\bar{D}^{\mu}(\omega_{\alpha} + \omega_{\alpha}^{\prime}) - C_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\beta} + \omega_{\beta}^{\prime})A_{\gamma}^{\prime\mu}\right].$$
(17.4.23)

为了使其在联合变换(17.4.2)和(17.4.3)下不变, 现在给ω和ω'补充变换:

$$\delta\omega_{\alpha} = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}\omega_{\gamma} , \qquad (17.4.24)$$

$$\delta\omega_{\alpha}' = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}\omega_{\gamma}' , \qquad (17.4.25)$$

以及

$$\delta\omega_{\alpha}^{*} = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}\omega_{\gamma}^{*} , \qquad (17.4.26)$$

$$\delta\omega_{\alpha}^{\prime*} = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}\omega_{\gamma}^{\prime*} . \qquad (17.4.27)$$

我们看到形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)的组合变换保持修正作用量(15.6.4)中的完整拉格朗日量不变:

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} = \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_{\alpha} f_{\alpha} + \mathscr{L}_{\text{GH}} . \qquad (17.4.28)$$

假定我们对A', ψ' , ω' 和 ω' *积分的积分测度在简单矩阵变换(17.4.3), (17.4.10), (17.4.25)和(17.4.27) 下不变,这样有效作用量 $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 在剩余的变换(17.4.2), (17.4.9), (17.4.24)和(17.4.26)下是不 变的. 换句话说,它与原始作用量 $I[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 在相同的意义下是规范不变的.

这一形式变换给有效作用量中能出现的无限大设置了强有力的限制. Γ中的紫外发散出 现在量纲[质量]^{*d*}满足*d* ≤ 4的项的系数中,但这里,这些项在背景规范变换(17.4.2), (17.4.9), (17.4.24)和(17.4.26)下是不变的. 例如,在基于单纯规范群的规范理论中,且自旋1/2费米子属于 该群的某个不可约表示,唯一这样的项形式如下

$$\Gamma_{\infty} = \int \mathrm{d}^4 x \,\mathscr{L}_{\infty} \,\,, \tag{17.4.29}$$

$$\mathscr{L}_{\infty} = -\frac{1}{4} L_A F_{\alpha\mu\nu} F^{\mu\nu}_{\alpha} - L_{\psi} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \bar{D}_{\mu} \psi$$
$$- m L_m \bar{\psi} \psi - L_{\omega} (\bar{D}_{\mu} \omega^*_{\alpha}) (\bar{D}^{\mu} \omega_{\alpha}) , \qquad (17.4.30)$$

其中,这里的 $F_{\alpha\mu\nu}, \bar{D}_{\mu}\psi, \bar{D}_{\mu}\omega_{\alpha}$ 和 $\bar{D}_{\mu}\omega_{\alpha}^{*}$ 完全是用背景场构建的:**

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} , \qquad (17.4.31)$$

$$D_{\mu}\psi \equiv \partial_{\mu}\psi - \mathrm{i}\,t_{\alpha}A_{\alpha\mu}\psi \,\,, \tag{17.4.32}$$

$$D_{\mu}\omega_{\alpha} \equiv \partial_{\mu}\omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma} , \qquad (17.4.33)$$

$$D_{\mu}\omega_{\alpha}^{*} \equiv \partial_{\mu}\omega_{\alpha}^{*} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma}^{*} . \qquad (17.4.34)$$

通过量纲分析,我们预期常数 L_A , L_{ψ} , $L_m 和 L_{\omega}$ 是对数发散的.

为了处理这些无限大,我们注意到拉格朗日量(17.4.12)包含一个纯经典部分

$$\mathscr{L}_{\text{CLASS}} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F^{\mu\nu}_{\alpha} - \bar{\psi} (\gamma^{\mu} \bar{D}_{\mu} + m) \psi - (\bar{D}_{\mu} \omega^*_{\alpha}) (\bar{D}^{\mu} \omega_{\alpha}) , \qquad (17.4.35)$$

这一项是通过扔掉 \mathscr{L}_{MOD} 中所有涉及量子场 A',ψ',ω',ω' *的项获得的. 我们定义重整化场

$$A^R_{\alpha\mu} \equiv \sqrt{1 + L_A} A_{\alpha\mu} , \qquad (17.4.36)$$

$$\psi_{\ell}^R \equiv \sqrt{1 + L_{\psi}} \psi_{\ell} , \qquad (17.4.37)$$

$$\omega_{\alpha}^{R} \equiv \sqrt{1 + L_{\omega}}\omega_{\alpha} , \qquad (17.4.38)$$

$$\omega_{\alpha}^{*R} \equiv \sqrt{1 + L_{\omega}} \omega_{\alpha}^{*} , \qquad (17.4.39)$$

这使得(17.4.30)与(17.4.35)的和采取如下的形式

$$\mathscr{L}_{\text{CLASS}} + \mathscr{L}_{\infty} = -\frac{1}{4} F^R_{\alpha\mu\nu} F^{R\mu\nu}_{\alpha} - \bar{\psi}^R \gamma^{\mu} D^R_{\mu} \psi^R - m^R \bar{\psi}^R \psi^R - (D^R_{\mu} \omega^{*R}_{\alpha}) (D^{\mu R} \omega^R_{\alpha}) , \qquad (17.4.40)$$

其中, m^R是重整化质量

$$m^R \equiv m(1+L_m) / (1+L_\psi) ,$$
 (17.4.41)

^{**}单纯规范群的条件确保了对于 $A \pi \omega$ 分别仅有一个动能项,这两个动能项分别正比于 $F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu}\pi D_{\mu}\omega_{\alpha}^{*}\bar{D}^{\mu}\omega_{\alpha}$, 而 ψ 的变换不可约这一条件确保了对于 ψ 仅有一个动能项和一个质量项.处理更加普遍的可能性也不是困难的,但代价 是符号上会稍微有些复杂.我们同时不言自明地使用了鬼数守恒.

以及

$$F^R_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^R_{\alpha\nu} - \partial_\nu A^R_{\alpha\mu} + C^R_{\alpha\beta\gamma} A^R_{\beta\mu} A^R_{\gamma\nu} , \qquad (17.4.42)$$

$$D^R_\mu \psi^R \equiv \partial_\mu \psi^R - i t^R_\alpha A^R_{\alpha\mu} \psi^R , \qquad (17.4.43)$$

$$D^R_\mu \omega^R_\alpha \equiv \partial_\mu \omega^R_\alpha + C^R_{\alpha\beta\gamma} A^R_{\beta\mu} \omega^R_\gamma , \qquad (17.4.44)$$

$$D^R_{\mu}\omega^{*R}_{\alpha} \equiv \partial_{\mu}\omega^{*R}_{\alpha} + C^R_{\alpha\beta\gamma}A^R_{\beta\mu}\omega^{*R}_{\gamma} . \qquad (17.4.45)$$

这里的重整化结构常数和群生成元则是

$$C^R_{\alpha\beta\gamma} \equiv (1+L_A)^{-1/2} C_{\alpha\beta\gamma} , \qquad (17.4.46)$$

$$t_{\alpha}^{R} \equiv (1 + L_{A})^{-1/2} t_{\alpha} . \qquad (17.4.47)$$

由于我们假定了这里的Lie代数是单纯的,所以,除却一个公共因子,即非重整化耦合常数g,结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 和群生成元 t_{α} 完全由群的结构所决定.因此,方程(17.4.46)和(17.4.47)告诉我们,对于 C^R 和 t^R 中的耦合常数 g^R ,它的重整化是

$$g^R = g(1+L_A)^{-1/2}$$
 (17.4.48)

这一结果体现出了背景场规范的特殊优点.在一般的规范下,对于规范场和规范耦合常数, 我们会遇到相互独立的重整化因子,并且为了把它们整理出来,我们将不得不计算两个不同的振 幅(例如,真空极化和3-规范场顶角函数).在背景场规范下,通过要求有效作用量中的无限大项以 场强的原始形式(17.4.31)将其包含在内,背景场规范不变性将这两个重整化绑在了一起,进而使得 我们可以通过仅研究一个规范场振幅就能计算出荷重整化因子.

17.5 背景场规范下的单圈计算

作为一个练习,我们将计算一般非阿贝尔规格理论下的规范耦合常数的一圈重整化因子.正 如我们将在下一章中看到的,这为高能处的物理过程的所谓"重整化"群计算提供了一个重要的输 入元素,我们在这里所获得的结果将在下一章用来例证非阿贝尔规范理论的渐进自由.

这里所采用的方法有些新奇.通常情况下,我们考察背景规范场与时空相关的有效作用量,并 计算这些场的二次项,抽取因子 $(q_{\mu}A_{\alpha\nu} - q_{\nu}A_{\alpha\nu})^2$,直到这时,通过令q = 0分离出这一因子系数中 的对数发散.在这里,我们转而采取一个简单得多的方法,从一开始就令规范场与时空不相关.在 这一情况下,有效作用量中规范场的二次项和三次项为零,但有一个紫外发散的四次项,它可以用 来计算耦合常数重整化因子 $(1 + L_A)^{-1/2}$.在这一方法中,我们的一圈计算就变成了简单的矩阵代 数问题.要注意的是,这个处理仅适用于背景场规范;在其它情况下,有效作用量中背景规范场的 二次项部分和四次项部分将会给出相互独立的对数发散.

在这一动机下,我们转向背景场下单圈有效作用量的计算,在我们所选的背景场中, Α_{αμ}是常

数, 而 $\psi = \omega = \omega^* = 0$. 对于这样的背景场, 完整的修正拉格朗日量是^{*}

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_{GH} , \qquad (17.5.1)$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} \Big(F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_{\mu}A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_{\nu}A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A'_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu} \Big)^2$$

$$-\psi'(\mathcal{D} - \mathrm{i}t_{\alpha}A'_{\alpha} + m)\psi' , \qquad (17.5.2)$$

$$\mathscr{L}_{f} \equiv -\frac{1}{2\xi} f_{\alpha} f_{\alpha} = -\frac{1}{2\xi} (\bar{D}_{\mu} A_{\alpha}^{\prime \mu})^{2} , \qquad (17.5.3)$$

$$\mathscr{L}_{GH} = -(\bar{D}_{\mu}\omega_{\alpha}^{\prime*})(\bar{D}^{\mu}\omega_{\alpha}^{\prime} - C_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}^{\prime}A_{\gamma}^{\prime\mu}) . \qquad (17.5.4)$$

真空-真空振幅的一圈图是从作用量中量子场的二次项部分中计算出来的,即要被积掉的A', ψ', ω', ω'*的二次项. 仅保留这样的二次项, 我们有

$$\mathscr{L}_{\text{QUAD}} = -\frac{1}{4} (\bar{D}_{\mu} A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_{\nu} A'_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} F^{\mu\nu}_{\alpha} C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} - \bar{\psi}' (\bar{D} + m) \psi' - \frac{1}{2\xi} (\bar{D}_{\mu} A'^{\mu}_{\alpha})^2 - (\bar{D}_{\mu} \omega'^{*}_{\alpha}) (\bar{D}^{\mu} \omega'_{\alpha}) .$$
(17.5.5)

相应的作用量可以写成一般的二次型形式:

$$I_{\text{QUAD}} \equiv \int d^4x \, \mathscr{L}_{\text{QUAD}}$$

= $-\frac{1}{2} \int d^4x \, d^4y \, A_{\alpha}^{\prime\mu}(x) A_{\beta}^{\prime\nu}(y) \mathscr{D}_{x\alpha\mu,y\beta\nu}^A - \int d^4x \, d^4y \, \bar{\psi}_k^{\prime}(x) \psi_\ell^{\prime}(y) \mathscr{D}_{xk,y\ell}^{\psi}$
 $- \int d^4x \, d^4y \, \omega_{\alpha}^{\prime*}(x) \omega_{\beta}^{\prime}(y) \mathscr{D}_{x\alpha,y\beta}^{\omega} , \qquad (17.5.6)$

其中

$$\mathcal{D}_{x\alpha\mu,y\beta\nu}^{A} \equiv \eta_{\mu\nu} \Big(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta}^{\lambda}(x) \Big) \Big(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\lambda}} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\lambda}(y) \Big) \delta^{4}(x-y) - \Big(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\nu}(x) \Big) \Big(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\mu}(y) \Big) \delta^{4}(x-y) + F_{\gamma\mu\nu}(x) C_{\gamma\alpha\beta} \delta^{4}(x-y) + \frac{1}{\xi} \Big(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\mu}(x) \Big) \Big(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\nu}(y) \Big) \delta^{4}(x-y) , \quad (17.5.7)$$

$$\mathscr{D}^{\psi}_{xk,y\ell} \equiv \left(-\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}} - i_{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha}(y) + m\right)_{k\ell} \delta^{4}(x-y) , \qquad (17.5.8)$$

$$\mathscr{D}^{\omega}_{x\alpha,y\beta} \equiv \left(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} + C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\lambda}(x)\right) \left(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} + C_{\gamma\epsilon\beta}A^{\lambda}_{\epsilon}(y)\right) \delta^{4}(x-y) .$$
(17.5.9)

(当我们分部积分时, $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$ 前面的负号要扔掉.)

有效作用量的单圈贡献(就像16.2节中那样)为

$$\exp\left(\mathrm{i}\Gamma^{1\,\mathrm{loop}}[A]\right) \propto \int_{1PI} (\prod \mathrm{d}A') (\prod \mathrm{d}\psi') (\prod \mathrm{d}\bar{\psi}') (\prod \mathrm{d}\omega') (\prod \mathrm{d}\omega') (\prod \mathrm{d}\omega'^*) \\ \times \exp\left(\mathrm{i}I_{\mathrm{QUAD}}[A',\psi',\bar{\psi}',\omega',\omega'^*;A]\right) \\ \propto (\mathrm{Det}\,\mathscr{D}^A)^{-1/2} (\mathrm{Det}\,\mathscr{D}^\psi)^{+1} (\mathrm{Det}\,\mathscr{D}^\omega)^{+1} .$$
(17.5.10)

^{*}参看方程(17.4.12), (17.4.4)和(17.4.23). 我们在这里特定为物质场构成自旋¹2费米子多重态的情况. \mathscr{L} 和 \mathscr{L}_f 中的平方包含指标收缩.

(出现指数-1/2和+1是因为A'是实玻色场, 而 $\psi', \bar{\psi}', \omega', \omega'^*$ 是不同的费米场.) 这种行列式的计算 一般而言并不简单. 然而, 在外场是常数的情况下, \mathcal{D} 可以经由动量空间对角化, 这时计算会变得 简单的多.

因此,我们现在来考察常数背景场*A*_{αμ}的情况.对于非阿贝尔规范理论,这样的常数场无法通 过规范变换移除,这一点可以从各种规范协变场

$$F_{\alpha\mu\nu} = C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} , \qquad (17.5.11)$$

$$D_{\lambda}F_{\delta\mu\nu} = C_{\delta\epsilon\alpha}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\epsilon\lambda}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} , \qquad (17.5.12)$$

等的非零值可以看到. Lorentz不变性和规范不变性告诉我们如何将 $\Gamma[A]$ 中量纲给定的部分表示成有限多个项的积分,而这些项是 $F_{\alpha\mu\nu}$, $D_{\lambda}F_{\alpha\mu\nu}$ 等的定域函数;通过比较它们对 $\Gamma[A]$ 的常数背景场 $A_{\alpha\mu}$ 所做的贡献与微扰展开的结果,就可以获得这一表达式中项的系数.

通过通常的归一化Fourier变换,我们将每个矩阵 \mathcal{D}^A , \mathcal{D}^{ψ} 和 \mathcal{D}^{ω} 变换至动量基下

$$\mathscr{D}_{q\cdots,p\cdots} = \int \frac{\mathrm{d}^4 x}{(2\pi)^2} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \int \frac{\mathrm{d}^4 y}{(2\pi)^2} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot y} \,\mathscr{D}_{x\cdots,y\cdots} \,. \tag{17.5.13}$$

当A是常数时,这给出

$$\mathscr{D}_{q\cdots,p\cdots} = \delta^4(p-q) \mathscr{M}_{\cdots,\cdots}(q) , \qquad (17.5.14)$$

其中···代表离散指标,而从是有限维q-相关矩阵

$$\mathcal{M}^{A}_{\alpha\mu,\beta\nu}(q) = \eta_{\mu\nu}(-\mathrm{i}q_{\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda}C_{\gamma\delta\alpha})(\mathrm{i}q^{\lambda}\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon}{}^{\lambda}C_{\gamma\epsilon\beta}) - (-\mathrm{i}q_{\nu}\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\nu}C_{\gamma\delta\alpha})(\mathrm{i}q_{\mu}\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\mu} + C_{\gamma\epsilon\beta}) + F_{\gamma\mu\nu}C_{\gamma\alpha\beta} + (-\mathrm{i}q_{\mu}\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\mu}C_{\gamma\delta\alpha})(\mathrm{i}q_{\nu}\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\nu}C_{\gamma\epsilon\beta})/\xi + \epsilon\mathfrak{M},$$
(17.5.15)

$$\mathscr{M}_{k\ell}^{\psi}(q) = (\mathrm{i} q - \mathrm{i} t_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} + m)_{k\ell} + \epsilon \mathfrak{Y}, \qquad (17.5.16)$$

$$\mathcal{M}^{\omega}_{\alpha\beta}(q) = (-\mathrm{i}q_{\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda}C_{\gamma\delta\alpha})(\mathrm{i}q^{\lambda}\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon}{}^{\lambda}C_{\gamma\epsilon\beta}) + \epsilon \mathfrak{M}, \qquad (17.5.17)$$

其中 $F_{\gamma\mu\nu}$ 由方程(17.5.11)给定. 那么,从方程(17.5.10)我们可以得出

$$\begin{split} \operatorname{i} \Gamma^{(1 \operatorname{loop})}[A] &= -\frac{1}{2} \operatorname{ln} \operatorname{Det} \mathscr{D}^{A} + \operatorname{ln} \operatorname{Det} \mathscr{D}^{\psi} + \operatorname{ln} \operatorname{Det} \mathscr{D}^{\omega} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \operatorname{ln} \mathscr{D}^{A} + \operatorname{Tr} \operatorname{ln} \mathscr{D}^{\psi} + \operatorname{Tr} \operatorname{ln} \mathscr{D}^{\omega} \\ &= \delta^{4}(p-q) \int \mathrm{d}^{4}q \left[-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ln} \mathscr{M}^{A}(q) + \operatorname{tr} \operatorname{ln} \mathscr{M}^{\psi}(q) \right. \\ &+ \operatorname{tr} \operatorname{ln} \mathscr{M}^{\omega}(q) \right] \,. \end{split}$$
(17.5.18)

在方程(15.7.18)的最后一行,我们用"tr"而非"Tr"标记迹(并且在本节的下面都将这样做),这样做的原因是为了表明它们是通常的有限维矩阵的迹而不是积分算符的迹.

既然我们这里的目标是计算有效作用量中与FF项相乘的无限大因子L_A,我们要将(17.5.18)中 背景场A的四阶项分离出来.对于这个目的,将*M*按照所含因子A的个数分成*M*_n将是方便的,其



图 17.1 量子有效作用量中常数背景规范场 A^{μ}_{α} 四次项的Feynman图. 这里的实线代表内部规范场线,内部 鬼线或内部物质线; 而虚线代表因子 A^{μ}_{α} . 这三个Feynman图对应于方程(17.5.20)中的三项.

中n = 0,1或2,代表因子A的个数:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 . \tag{17.5.19}$$

接下来,找到(17.5.18)中A的四阶项就是基本代数运算

$$\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}]_{A^4} = \operatorname{tr} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathscr{M}_0^{-1} \mathscr{M}_2]^2 + [\mathscr{M}_0^{-1} \mathscr{M}_1]^2 \mathscr{M}_0^{-1} \mathscr{M}_2 - \frac{1}{4} [\mathscr{M}_0^{-1} \mathscr{M}_1]^4 \right\}.$$
(17.5.20)

(为了看到这点, 给方程(17.5.19)中的 \mathcal{M}_1 和 \mathcal{M}_2 分别插入乘积因子 ϵ 和 ϵ^2 , 对tr ln \mathcal{M} 相对 ϵ 微分4次, 然后除以4!, 再令 $\epsilon = 0$.) 这里的 \mathcal{M}_0^{-1} 因子就是通常的传播子; 对于 $\xi = 1$, 它们是

$$[\mathscr{M}_{0}^{A}(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}(q^{2} - i\epsilon)^{-1} , \qquad (17.5.21)$$

$$[\mathscr{M}_0^{\psi}(q)]_{k\ell}^{-1} = [i\not\!\!q + m]_{k\ell}^{-1} , \qquad (17.5.22)$$

$$[\mathscr{M}_0^{\omega}(q)]_{\alpha,\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}(q^2 - i\epsilon)^{-1} .$$
(17.5.23)

确实, 方程(17.5.20)中的三项正好对应图17.1中的三个Feynman图; 现在的计算方法使我们免于考察符号与组合学因子.

对于A圈以及 $\xi = 1$, 方程(17.5.15)给出:

$$[\mathscr{M}_1^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = -2\eta_{\mu\nu}q^{\lambda}[\mathscr{A}_{\lambda}]_{\alpha\beta} , [\mathscr{M}_2^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = + \left[\eta_{\mu\nu}\mathscr{A}_{\lambda}\mathscr{A}^{\lambda} - \mathscr{A}_{\nu}\mathscr{A}_{\mu} - \mathscr{A}_{\mu}\mathscr{A}_{\nu}\right]_{\alpha\beta} + F_{\gamma\mu\nu}C_{\gamma\alpha\beta} ,$$

其中《是矩阵

$$[\mathscr{A}_{\lambda}]_{\alpha\beta} \equiv -\mathrm{i} \, C_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma\lambda}$$

这使得

$$\begin{split} [\mathscr{A}_{\lambda}, \mathscr{A}_{\rho}]_{\alpha\beta} &= -C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon}(A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} - A_{\gamma\rho}A_{\epsilon\lambda}) \\ &= -(C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon} + C_{\alpha\delta\epsilon}C_{\delta\beta\gamma})A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} \\ &= +C_{\alpha\delta\beta}C_{\delta\epsilon\gamma}A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} = C_{\alpha\delta\beta}F_{\delta\rho\lambda} \; . \end{split}$$

积分有如下的结构

$$\int d^4q \, q^{\mu}q^{\nu}f(q^2) = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} \int d^4q \, q^2f(q^2) ,$$

$$\int d^4q \, q^{\mu}q^{\nu}q^{\rho}q^{\sigma}f(q^2) = \frac{1}{24}[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}] \int d^4q \, (q^2)^2f(q^2) .$$

那么, 对于 $\xi = 1$, 我们发现

$$\begin{split} \int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^A(q)^{-1} \mathscr{M}_2^A(q) \right]^2 \right\} &= 4 \mathscr{I} \, \mathrm{tr} \left[\mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\eta \right] \\ &+ 4 \mathscr{I} C_{\gamma \alpha \beta} C_{\delta \alpha \beta} F_{\gamma \mu \nu} F_{\delta}^{\mu \nu} , \\ \int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^A(q)^{-1} \mathscr{M}_1^A(q) \right]^2 \mathscr{M}_0^A(q)^{-1} \mathscr{M}_2^A(q) \right\} &= 4 \mathscr{I} \, \mathrm{tr} \left[\mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\eta \right] , \\ \int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^A(q)^{-1} \mathscr{M}_1^A(q) \right]^4 \right\} &= \frac{8}{3} \mathscr{I} \, \mathrm{tr} \left[2 \mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\eta + \mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\eta \right] , \end{split}$$

其中《是发散积分

$$\mathscr{I} \equiv \int d^4 q \, [q^2 - i\epsilon]^{-2} \,, \qquad (17.5.24)$$

它的意义会在下面讨论. 将这些全部代入方程(17.5.20), 我们就有

$$\int d^4q \left[\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}^A(q) \right]_{A^4} = \frac{2}{3} \mathscr{I} \operatorname{tr} \left[\mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\eta - \mathscr{A}^\lambda \mathscr{A}^\eta \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\eta \right] - 2 \mathscr{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu} .$$

这两项实际上形式是相同的,合并后给出

$$\int d^4q \left[\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}^A(q) \right]_{A^4} = -\frac{5}{3} \mathscr{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu} \,. \tag{17.5.25}$$

现在跳到鬼圈,我们从方程(17.5.17)看到

$$[\mathscr{M}_{1}^{\omega}(q)]_{\alpha\beta} = -2[\mathscr{A}^{\lambda}]_{\alpha\beta} q_{\lambda} , \qquad (17.5.26)$$

$$[\mathscr{M}_2^{\omega}(q)]_{\alpha\beta} = [\mathscr{A}^{\lambda}\mathscr{A}_{\lambda}]_{\alpha\beta} \tag{17.5.27}$$

那么,我们发现

$$\begin{split} &\int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^{\omega}(q)^{-1} \mathscr{M}_2^{\omega}(q) \right]^2 \right\} = \mathscr{I} \, \mathrm{tr} [\mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\eta}] \,, \\ &\int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^{\omega}(q)^{-1} \mathscr{M}_1^{\omega}(q) \right]^2 \mathscr{M}_0^{\omega}(q)^{-1} \mathscr{M}_2^{\omega}(q) \right\} = \mathscr{I} \, \mathrm{tr} [\mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\eta}] \,, \\ &\int \mathrm{d}^4 q \, \mathrm{tr} \left\{ \left[\mathscr{M}_0^{\omega}(q)^{-1} \mathscr{M}_1^{\omega}(q) \right]^4 \right\} = \frac{2}{3} \mathscr{I} \, \mathrm{tr} [2 \mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\eta} + \mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}_{\eta}] \,. \end{split}$$

因此,对于鬼圈, (17.5.20)的积分是

$$\int d^4 q \, [\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}^{\omega}(q)]_{A^4} = \frac{1}{6} \mathscr{I} \operatorname{tr} [\mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\eta} - \mathscr{A}^{\lambda} \mathscr{A}^{\eta} \mathscr{A}_{\lambda} \mathscr{A}_{\eta}] \\ = \frac{1}{12} \mathscr{I} C_{\gamma \alpha \beta} C_{\delta \alpha \beta} F_{\gamma \mu \nu} F_{\delta}^{\mu \nu} .$$
(17.5.28)

最后,物质圈中的顶角是

$$[\mathscr{M}_1^{\psi}(q)]_{k\ell} = -\mathrm{i}(t_{\alpha} A_{\alpha})_{k\ell} , \qquad [\mathscr{M}_2^{\psi}(q)]_{k\ell} = 0 ,$$

所以,这时方程(17.5.20)中仅有一项:

我们感兴趣的是这一积分的紫外发散部分,所以我们可以扔掉质量(相对于很大的q^v可忽略)并写成

$$\int d^{4}q \left[\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}^{\psi}(q) \right]_{A^{4}} = -\frac{1}{4} \operatorname{tr} \{ t_{\alpha} t_{\beta} t_{\gamma} t_{\delta} \} A_{\alpha \mu} A_{\beta \nu} A_{\gamma \rho} A_{\delta \sigma} \times \int d^{4}q \, \frac{\operatorname{tr} \{ \not{q} \gamma^{\mu} \not{q} \gamma^{\nu} \not{q} \gamma^{\rho} \not{q} \gamma^{\sigma} \}}{(q^{2} - \mathrm{i}\epsilon)^{4}} = -\frac{\mathscr{I}}{96} \operatorname{tr} \{ t_{\alpha} t_{\beta} t_{\gamma} t_{\delta} \} A_{\alpha \mu} A_{\beta \nu} A_{\gamma \rho} A_{\delta \sigma} \times \operatorname{tr} \left\{ 2\gamma_{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \gamma_{\eta} \gamma^{\rho} \gamma^{\eta} \gamma^{\sigma} + \gamma_{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma_{\eta} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho} \gamma^{\eta} \gamma^{\sigma} \right\}, \qquad (17.5.29)$$

其中《就是发散积分(17.5.24).为了计算Dirac矩阵的迹,我们使用这些矩阵的反对易关系

$$\operatorname{tr} \left\{ 2\gamma_{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma_{\eta}\gamma^{\rho}\gamma^{\eta}\gamma^{\sigma} + \gamma_{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\eta}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\gamma^{\eta}\gamma^{\sigma} \right\}$$

= $8\operatorname{tr} \{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\} - 4\operatorname{tr} \{\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\} - 4\operatorname{tr} \{\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\}$
= $-64\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 32\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + 32\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} .$

这样, 方程(17.5.29)就给出

$$\int d^4q \left[\operatorname{tr} \ln \mathscr{M}^{\psi}(q) \right]_{A^4} = \frac{1}{3} \mathscr{I} \operatorname{tr} \left\{ [t_{\alpha}, t_{\beta}] [t_{\gamma}, t_{\delta}] \right\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A^{\mu}_{\gamma} A^{\nu}_{\delta} = -\frac{1}{3} \mathscr{I} F_{\gamma\mu\nu} F^{\mu\nu}_{\delta} \operatorname{tr} \{ t_{\gamma} t_{\delta} \} .$$
(17.5.30)

在方程(17.5.18)中使用方程(17.5.25), (17.5.28)和(17.5.30), 这给出了

$$\Gamma_{A^4}^{(1\,\text{loop})} = \frac{-i\mathscr{I}}{(2\pi)^4} \int d^4x \, F_{\gamma\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu} \left[\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{12} \right) C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}\{t_{\gamma} t_{\delta}\} \right] \,, \tag{17.5.31}$$

其中,我们将(17.5.14)中的动量空间δ-函数表示成了

$$\delta^4(p-p) = (2\pi)^{-4} \int d^4x \, 1 \, . \tag{17.5.32}$$

这里的重点在于,结果仅通过场强(17.5.11)与A_{αµ}相关,这与背景规范不变性一致.

我们将(本节首次)使用之前假定的规范群的单纯性和物质场多重态的不可约性. 在这一情况下

$$C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta} = g^2 C_1 \delta_{\gamma\delta} , \qquad (17.5.33)$$

$$tr\{t_{\gamma}t_{\delta}\} = g^2 C_2 \delta_{\gamma\delta} , \qquad (17.5.34)$$

其中g是共用的耦合常数,它作为一个因子出现在 $C_{\gamma\alpha\beta}$ 和 t_{γ} 中,而 C_{1} 和 C_{2} 是数值常数,它们用来表征规范群和物质多重态所提供的群表示.例如,在原始的Yang-Mills理论中,规范群是SU(2)(或者等价的SO(3)),而结构常数是

$$C_{\gamma\alpha\beta} = g\epsilon_{\gamma\alpha\beta} \; ,$$

其中α, β和γ的取值范围是1, 2, 3. 与方程(17.5.33)相比较, 我们看到这里有

$$C_1 = 2$$
.

另外,在这个理论中,物质场构成构成二重态,而 t_{α} 是g/2乘以通常的Pauli矩阵 σ_{α} ,所以

 $C_2 = 1/2$.

更普遍地,对于群SU(n),若它的定义表示中有n_f个费米子,在通常约定的生成元的归一化下,我们有**

$$C_1 = N$$
, $C_2 = n_f/2$. (17.5.35)

现在回到这个普遍情况, 方程(17.5.33)和(17.5.34)给出

$$\Gamma_{A^4}^{(1\,\text{loop})} = \frac{-\mathrm{i}g^2\mathscr{I}}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 x \, F_{\gamma\mu\nu} F_{\gamma}^{\mu\nu} \left[\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right] \,. \tag{17.5.36}$$

这样, 方程(17.4.30)中的无限大常数LA就是

$$L_A = \frac{4ig^2\mathscr{I}}{(2\pi)^4} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) . \tag{17.5.37}$$

尚未谈及的是发散积分 \mathscr{I} 的解释. 首先,在我们试着积掉3-动量q之前,我们可以将方程(17.5.24)中 q^0 的积分围道旋转至虚轴;同往常一样,分母中的—i ϵ 项使得我们必须要逆时针旋转,这使得 $q^0 = iq^4$,其中 q^4 从— ∞ 取到+ ∞ . 那么积分就变成

$$\mathscr{I} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^3 dq}{q^4} , \qquad (17.5.38)$$

现在的q是欧几里得4-矢(q^1 , q^2 , q^3 , q^4)的长度.为了更进一步,我们显然需要一些正规化该积分的 方法.处理这一紫外发散的最简单方法就是给q的积分提供一个标度为 Λ 的上截断.然而,为了 处理红外发散我们还需要一个下截断.这由物理情况决定.如果4-矢粒子的动量不为零,那么在 图的内线中将会有动量流,这在这些动量的标度 μ 处提供了一个红外发散.类似地,如果我们计 算 $\Gamma[A]$ 相对A的四阶变分导数,并计算当A取不等于零的有限值时该变分导数的值,那么内线的传 播子不会在零动量处发散,并且我们在标度 $\mu \sim gA$ 处有了一个红外截断.无论以那种方法, \mathscr{I} 采 取如下的形式

$$\mathscr{I} = 2\pi^2 i \int_{\mu}^{\Lambda} \frac{\mathrm{d}q}{q} = 2\pi^2 i \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \tag{17.5.39}$$

因此,

$$L_A = -\frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g^4) . \qquad (17.5.40)$$

这样, 方程(17.4.48)就给出了重整化耦合

$$g_R = g \left[1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^4) \right] .$$
(17.5.41)

我们注意到,在量子电动力学中,11.2节所讨论的辐射修正相对裸耦合g会减小物理耦合 g_R ,在非阿贝尔规范理论中,若假定费米子多重态足够小使得 $C_2 < 11C_1/4$,那么辐射修正会在裸耦合之上 提高物理耦合.这一点的重要性将在第18章进行探索.

^{**}对于SU(3), t_{α} 将取为g/2乘以Gell-Mann矩阵 λ_{α} , Gell-Mann矩阵将在19.7节引入, 这使得 $C_{\alpha\beta\gamma} = (g/2)f_{\alpha\beta\gamma}$.

或者,我们也可使用11.2节所讨论的维度正规化方法处理这一紫外发散.这时,取代(17.5.39), 我们写成

$$\mathscr{I} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^{d-1} dq}{(q^2 + \mu^2)^2} , \qquad (17.5.42)$$

其中d是复维度, 在计算的末尾会让其趋于4, 而 μ 是红外截断, 再一次取成与外动量同阶的量(或者 取成背景场与g之积的同阶量). 只要d是Red < 0的复数且 $\mu^2 > 0$, 这一积分就有有限值

$$\mathscr{I} = -i\pi^2 \left(\frac{d}{2} - 1\right) \mu^{d-4} / \sin\left[\left(\frac{d}{2} - 2\right)\pi\right]$$

解析延拓至d→4,这变成

$$\mathscr{I} \to -2\mathrm{i}\pi^2 \left[\frac{1}{d-4} + \ln\mu + \cdots \right] , \qquad (17.5.43)$$

其中...代表与µ无关的有限大项. 这时我们有

$$L_A = \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln\mu + \cdots\right) + O(g^4) ,$$

因而

$$g_R = g \left[1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \cdots \right) + O(g^4) \right] .$$
(17.5.44)

注意到这里的紫外发散表现为一个不同的形式,但是与红外截断µ的相关性是相同的.在18.7节我 们对渐进自由的讨论中,方程(17.5.44)将提供一个重要的元素.

习题

- 1. 将基本标量场纳入到拉格朗日量中, 完成17.2节中的可重整性证明.
- 2. 利用17.2节末尾讨论的BRST量子化方法对背景场规范下的非阿贝尔规范理论进行量子化.

3. 若规范场依赖于时空, 计算Γ^(1 loop)中规范场的二次项, 并以此推导出重整化规范耦合和非重整 化耦合之间的关系.

4. 对于包含基本标量场的规范理论, 计算重整化耦合和非重整化耦合之间单圈关系.

参考文献

- [1] J. Zinn-Justin, in Trends in Elementary Particle Theory International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974 (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [2] 在BRST对称性出现之前,非阿贝尔规范场论的可重整性证明直接基于规范变换的Slavnov-Taylor恒等式;参看B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rey.* D5, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* D7, 1049 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* B50, 318 (1972); B. W. Lee, *Phys. Rev.* D9, 933 (1974). 最早基于BRST对称性的可重整性证明是, C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Commun. Math. Phys.* 42, 127 (1975); in *Renormalization Theory Proceedings of the International School of Mathematical Physics at Erice, Augest 1975,* G. Velo and A. S. Wightman编辑(D. Reidel, Dordrecht, 1976): pp. 269-97, 299-343. 这里给出的证明沿用了J. Zinn-Justin的大体框架, 见参考文献1; B. W. Lee, in *Methods in Field Theory*, R. Balian and J. Zinn-Justin编辑(North-Holland, Amsterdam, 1976): pp. 79-139

- [3] 这里的角度与论述基于J. Gomis and S. Weinberg, Nucl. Phys. B469, 475 (1996). 这些方法的早期应用,参看B. L. Voronov and I. V. Tyutin, Theor. Math. Phys. 50, 218 (1982);
 52, 628 (1928); B. L. Voronov, P. M. Lavrov, and I. V. Tyutin, Sov. J. Nucl. Phys. 36, 292 (1982); P. M. Lavrov, and I. V. Tyutin, Sov. J. Nucl. Phys. 41, 1049 (1985); D. Anselmi, Class. and Quant. Grav. 11, 2181 (1994); 12, 319 (1995); M. Harada, T. Kugo, and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. 91, 801 (1994).
- [4] G. Barnich and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Phys. Rev.* **51**, R143 (1995); *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995); *Nucl. Phys.* **B455**, 357 (1995).
- [5] 背景场规范是B. S. De Witt引入的, Phys. Rev. 162, 1195, 1239 (1967). 关于多圈效应的 处理的, 参看G 't Hooft, in Functional and Probabilistic Method in Quantum Field Theory: Proceedings of the 12th Karpacz Winter School of Theoretical Physics (Acta Universitatis Wratislavensis no. 38 1975); B. S. De Witt, in Quantum Gravity II, C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama编辑(Oxford University Press, Oxford, 1982); L. F. Abbott, Nucl. Phys. B185, 189 (1981).

第 18 章 重整化群方法

重整化群方法最初是由Gell-Mann和Low^[1]引入的,他们的目的是用其处理微扰论在高能量子 电动力学中的失效问题.对振幅的*n*-圈贡献,若它所涉及的动量是*q*阶的,例如真空极化 $\Pi_{\mu\nu}(q)$,那 么在该振幅中除了含有因子 α^n 外,还含有多达*n*个的因子ln(q^2/m_e^2),所以,即使精细结构常数 α 很 小,当 α |ln(q^2/m_e^2)|很大的时候,微扰论就会失效.即使在非阿贝尔规范理论这样的无质量理论中, 我们也必须要指定定义重整化耦合常数的重整化点,并且在这一情况下,我们会遇到对数ln(E/μ), 这使得即使耦合常数很小,但如果 $E \gg \mu$ 或 $E \ll \mu$,微扰论也会失效.

幸运的是, 在这种情况下通常能够使用微扰论的一个修正版本. 这一修正版本的主要思想在 于, 引入定义在滑动重整化标度 μ 处的耦合常数 g_{μ} , 其中的滑动重整化标度 μ 是指不以任何固定的 方式与粒子质量相关的标度. 然后将 μ 选成与问题中过程的特征能量E同一阶, 这样因子 $\ln(E/\mu)$ 就 表现不出任何问题了. 那么只要 g_{μ} 保持着比较小的值, 我们就可以做微扰论. 特别地, 给定定义在 标度 μ 处的耦合常数, 我们可以利用微扰论计算能量 $\mu + d\mu$ 处的物理振幅, 然后使用这些振幅计算 定义在重整化标度 $\mu + d\mu$ 处的耦合常数. 通过对相应的微分方程进行积分, 我们可以将我们感兴 趣标度处的耦合常数与通常定义的耦合常数关联起来. ("重整化群"这个名字起源是, 最初它被认 为是, 在重整化耦合常数的重定义下, 描述理论的表现形式如何改变的方程, 但实际上它和群论毫 无关系.) 关于极高能或(无质量理论中的)极低能时的渐进行为, 即便耦合常数在感兴趣的标度处 过大以至于不允许使用微扰论, 重整化群方法也可提供一个定性的指导.

尽管重整化群方法最初出现于重整化耦合常数定义方案中的变化与重整化群之间的联系,但 它更广泛的意义也随之而来.当我们将裸耦合和裸场替换成以矩阵元定义的重整化耦合和重整化 场时,若这些矩阵元是在某个特征能量标度µ处赋值的,那么对虚动量的积分实际上就在µ阶的能 量标度和动量标度处被截断了.因此,当我们改变µ时,我们实际上改变的是计算中所需考虑的自 由度范围.重整化群最初给予我们的指导是,为了避免大对数应该将µ取成与研究过程的特征能 量E的同阶量,但这一指导只不过是一个更广阔原理的一个特殊情况:为了在给定能量处做计算, 我们应该先去掉更高能处的自由度.

还有多种其它方法可以实现这点. 比如我们在12.4节中所看到的, 在Wilson^[2]所开辟的重整化 群方法中, 为了保持物理量不变, 在引入一个明显且有限的截断的同时, 理论的参量要发生变化. 这一方法要求, 凡是理论的对称性所允许的相互作用类型都要纳入在内, 这导致了要引入无限多 个相互作用类型, 因此在处理像量子电动力学这样实际上可重整的理论时, 这一方法并不是特别 方便.(尽管如此, 但现在对量子电动力学的看法有些许不同, 正如在12.3节中所讨论的, 现在的量 子电动力学被视为仅是某个不可重整理论的非常好的近似, 而这个理论中的高维相互作用被某个 非常大的质量的负幂次抑制了.) 若附加截断的手法是在一个有限大的时空晶格上对规范理论量 子化, 那么Wilson方法的优点是, 在计算的同时会保持显然的规范不变性(规范群的体积等于整体 对称群的体积乘以格点的总数), 但它的缺点是, 无法保持显然的Lorentz不变性和旋转不变性. 在 任何情况下, 无论采用何种方法, 就在消去高能自由度这点上, 大多数重整化群体系是一致的.

18.1 大对数来自何处?

我们先来考察在高能处大对数能够以何种方式出现.考察一个物理振幅,或者截面,或者其它的速率参量,将其记为 $\Gamma(E, x, g, m)$,其中*E*是总的能量标度,*x*是各种角度以及各种能量比值,*g*是各种耦合常数,而*m*是各种质量.如果Γ的量纲是*D*(例如,截面就会有*D* = -2),那么量纲分析告诉我们

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma\left(1, x, g, \frac{m}{E}\right) .$$
(18.1.1)

在极限 $E \to \infty$ 下,我们本预期这样的振幅会有一个简单的幂次行为

$$\Gamma(E, x, g, m) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0)$$
.

但事实并非如此. 实际上, 在微扰论计算中会发现, 因子E^D会伴随着ln(E/m)的幂函数, 这破坏了简单的幂次率行为.

显然, 仅当固定能量*E*处的振幅 Γ 在 $m \to 0$ 时出现奇异, $\ln(E/m)$ 的幂次才能在 $E \to \infty$ 时进入m固定的振幅. 这种质量奇异性有两类, 一类可以通过计算正确的振幅或速率常数得以消除, 而 另一类则要求在我们的重整化方案中做出一些改变.

第一类零质量奇异性的起源是,传播子在相对应粒子质量壳上的极点的效应.例如,假定一个Feynman图有一个总动量为 p^{μ} 的入线,这条线通过一个顶角与质量为 m_1, m_2, \dots, m_n 的内线相连.根据第10章的讨论,相对应的Feynman图在负的实 p^2 轴上有一个截断,这个截断 $Mp^2 = -(m_1 + \dots + m_n)^2$ 延伸至 $-\infty$.如果外线是一个稳定粒子,且它的质量 $M < m_1 + \dots + m_n$,那么,由于 $p^2 = -M^2$ 不在截断上,所以它并不会给出奇异性.然而,当 M, m_1, \dots, m_n 全部趋于零时, $-p^2$ 在质量壳上的值以及截断顶部的分支点会汇聚到 $p^2 = 0$ 这一点,这产生了奇异性.

这表明我们可以通过远离质量壳的方法来避免m = 0处的红外发散,例如,让所有外线的 p^2 连同所有能量变量趋于+∞. 然后,采用色散关系或者其它解析延拓技巧,我们就可以利用Feynman振幅行为在这一极限下的结果给出S-矩阵元的一切. 通常情况下,我们感兴趣的不是在壳S-矩阵元而是流的矩阵元,这里的流会携带与任何质量不相关的动量q,所以延拓通常是不必须的. 这样的一个例子是10.5节中定义的真空极化函数 $\pi(q^2)$,除了当 $q^2 < 0$ 时,它是没有第一类零质量奇异性的.

如果我们尝试计算的截面在极限 $m \to 0$ 下变得不可测,那么零质量奇异性一般都会出现,这 一特性给出了消除了零质量奇异性的另一方法.例如,在量子电动力学中,对于任何包含有限个电 子和光子的过程而言,即使我们对无限个软光子求和,由于当 $m_e \to 0$ 时,无法区分一个电子和电 子,正电子和光子组成的总电荷为—e的喷注,其中的喷注(jet)是指所有粒子以相同速度沿同一方 向运动的粒子体系,这使得截面在极限 $m_e \to 0$ 下也会红外发散.我们在第13章看到,通过仅考察 合适的被积截面,即在 $m_e \to 0$ 下可测的截面,我们就可以解决这样的红外发散.例如,取代计算特 定的Compton散射过程的截面,我们可以计算总电荷为—e的喷注与总电荷为零的喷注散射到另外 两个这样的喷注和软光子的散射截面.这种内含反应速率或者截面在所有质量为零时也是有限的, 它们被称作是"红外安全"的.

我们的麻烦还没有完.即便我们通过积掉截面或者远离质量壳的方法避免了红外发散,相应地,能量为E的被积截面以及不在壳振幅将会包含第二类质量奇异性,这会导致因子ln(*E/m*),进而使得量纲分析给出的单纯的幂次率行为无效.原因可以追溯到重整化耦合的如下性质:当所有

质量为零时,按照惯例以振幅定义的重整化耦合会红外发散.例如,考察一个实标量场的理论,其 拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}g\phi^4 . \qquad (18.1.2)$$

到一圈阶, 对于初态4-动量为 p_1, p_2 而末态4-动量为 p'_1, p'_2 的散射过程, 不变弹性散射振幅由方程(12.2.24)给出

$$A = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)}\right) - 3 \right\} + O(g^3) , \qquad (18.1.3)$$

其中s,t以及u是Mandelstam变量

$$s = -(p_1 + p_2)^2$$
, $t = -(p_1 - p'_1)^2$, $u = -(p_1 - p'_2)^2$

而 Λ 是紫外截断.只要我们让s,t和u远离正实轴,特别地,如果它们全都趋于— ∞ (这违反了质量壳 条件 $s + t + u = 4m^2$),那么它就没有零质量奇异性.当然,这些振幅同时依赖于截断 Λ 和m,所以 即使没有零质量奇异性,在s,t和u趋于— ∞ 的极限下,我们也没有发现 $A \rightarrow$ 常数这一根据单纯的标 度讨论得到的结果.与截断的相关性可以通过重整化隐藏起来;我们将裸耦合g替换成重整化耦 合 g_R ,它的定义是A在某些约定重整化点的值.例如,我们可以取

$$g_R \equiv A(s = t = u = 0)$$

= $g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right\} + O(g^3) .$ (18.1.4)

这样, (18.1.3)就变成

$$A = g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{tx(1-x)}{m^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{ux(1-x)}{m^2}\right) \right\} + O(g_R^3) .$$
(18.1.5)

(我们可以毫无顾忌地将第二项中的 g^2 替换成 g_R^2 ,这是因为二者的差是 g^3 阶.)这一振幅没有紫 外发散,但它现在在m = 0处有一奇异性,即使s,t和u全部为负,这一奇异性也依旧存在.因此, 当s,t和u全部趋于— ∞ 时,我们发现

$$A \to g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-t}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-u}{m^2}\right) - 6 \right\} , \qquad (18.1.6)$$

这一渐进行为与基于单纯的标度讨论预期得到的结果并不一致. (使用任何其它"自然的"重整化耦 合定义会出现几乎相同的结果;例如,我们可以将 g_R 定义为A在在壳对称点 $s = t = u = 4m^2/3$ 的 值,除了-6要被换成其它某个数值因子外,(18.1.6)中的其它渐进行为都会复现出来.) 很显然, 当A以 g_R 的形式表示时所出现的零质量极限完全是因为公式(18.1.4)中的 $\ln m^2$ 项,即用裸耦合g表 示重整化耦合 g_R 时出现的 $\ln m^2$ 项.



图 18.1 基本标量场 $\phi(x)$ 的理论中,算符 $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$ 的矩阵元的动量空间Feynman图. 阴影圆 盘代表外线与上图相同的所有图的和. 除了那对相交在 ϕ^2 顶点的外线外,其它外线代表所要计算矩阵元的 初态和末态中的粒子.

当我们计算算符的矩阵元(例如不在壳的Feynman振幅)而非截面的积分时,我们还会遇到其 它的零质量奇异性.这是因为同耦合常数一样,这些算符也必须进行重整化.例如,假定在拉格朗 日量为(18.1.2)的标量场论中,我们希望计算算符

$$\mathcal{O}(p) \equiv \int \mathrm{d}^4 x \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x} \phi^2(x) \tag{18.1.7}$$

的矩阵元 $\langle\beta|\mathcal{O}(p)|\alpha\rangle$. 以Feynman图的形式, 这对应于在跃迁 $\alpha \to \beta$ 的图中, 在两条 ϕ -内线汇集的地方插入一顶角, 而流经顶角的总4-动量为p. (参看图18.1.) 紫外发散源于这些图中的一类, 在这类图中, 图被分成了两部分, 新顶角是其中一个子图的一部分, 而该子图通过两条 ϕ 线与图的其它部分相连. (参看图18.2.) 由于相互作用 ϕ^2 的量纲为+2, 若这一顶角通过n > 2条外线与图的剩余部分相连, 那么顶角所在的子图就有量纲4 – 2 – n < 0, 因此通过量纲分析可知, 如果用来连接两个子图的 ϕ 线数目多于两条, 那么含有顶角的子图就是收敛的. 这个子图的发散部分仅是一个对数发散的常数, 所以给 ϕ^2 乘以合适的发散常数 Z_{ϕ^2} 可以使得 ϕ^2 的矩阵元是有限的.* 到 g^2 阶, 相关的子图由图18.3中的图给出, 因此会给 $\mathcal{O}(p)$ 的矩阵元贡献发散因子

$$F(p) = 1 + \frac{1}{2} \left[-i(2\pi)^4 g \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 \int \frac{d^4k}{[k^2 + m^2 - i\epsilon] \left[(p-k)^2 - m^2 - i\epsilon \right]} .$$
 (18.1.8)

组合分母,旋转 k^0 积分围道,并附加紫外截断 Λ ,当 $\Lambda \to \infty$ 时,这给出结果

$$F(p) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2 x(1-x)}\right) - 1 \right] + O(g^2) . \tag{18.1.9}$$

(只要我们保持 p^2 为正) 这一结果没有零质量奇异性, 但它理所应当地与截断相关. 通过定义重整 $\ell \phi^2$ 算符

$$(\phi^2)_R = N^{(\phi^2)} \phi^2 ,$$
 (18.1.10)

这一紫外发散可以被消除掉,其中的 $N^{(\phi^2)}$ 会使得 $N^{(\phi^2)}F(p)$ 在某个明确的重整化点有明确的有限 值.例如,我们可以定义重整化 ϕ^2 算符使得

$$N^{(\phi^2)}F(0) = 1 , \qquad (18.1.11)$$

^{*}在这一讨论中我们假定,对于那些与图的剩余部分仅通过两条 \phi 线相连并含有顶角的子图,只要发散是由它们引起 的,那么这些发散就以同样的方式消除.



图 18.2 上面的Feynman图所代表的算符 $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$ 的矩阵元会呈现出紫外发散. 它的记号与图18.1中的记号相同



图 18.3 图18.2中直到一圈发散的图.

在这一情况下,

$$N^{(\phi^2)} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^2) .$$
 (18.1.12)

这样, 重整化算符(ϕ^2)_R的矩阵元就会包含因子

$$F_R(p) \equiv N^{(\phi^2)} F(p) = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \ln\left(1 + \frac{p^2 x(1-x)}{m^2}\right) + O(g^2) \ . \tag{18.1.13}$$

这对于所有的 $p^2 > 0$ 和 $m^2 > 0$ 都是有限的,但它现在包含 $m \to 0$ 的红外发散,相对于 $p^2 \to +\infty$ 时的渐进行为,这一红外发散对应于其中的大对数.当然,为了消除高阶计算中的截断,我们将不得不同时引入重整化耦合常数和重整化 ϕ^2 算符,并且我们会遇到这两者引起的大对数.

不仅仅是φ²(*x*), 任何类型的算符都需要类似的重整化因子. 特别地, 取理论中的一个基本 场ψ的矩阵元, 它所引入的紫外发散就源于对相对应传播子的辐射修正. 正如我们在第12章中看到 的, 这些无限大可以通过引入重整化场ψ_R消除掉:

$$\psi_R = N^{(\psi)}\psi$$
, (18.1.14)

其中的N^(ψ)会使得ψ_R在单粒子态和真空之间的矩阵元,与没有相互作用时,按传统归一化的场的 矩阵元是相同的. 它与重整化理论中通常的Z因子的关系是

$$Z^{(\psi)} = |N^{(\psi)}|^{-2} . (18.1.15)$$

例如,我们来回忆一下早先我们对旋量量子电动力学中光子场重整化的结果.** 在这一情况

^{**}在上面作为例子的标量场论中,相互作用为 ϕ^4 ,对于这样的理论, $N^{(\phi)}$ 的最低阶项源于两圈图,所以用这一理论例 证N因子的计算将是不方便的.

中,重整化电磁场A^µ_B一般写成裸场A^µ_B的形式

$$A_R^{\mu} = Z_3^{-1/2} A_B^{\mu}$$

其中Z3由方程(11.2.21)给定

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O(e^4) . \qquad (18.1.16)$$

它有一个零质量奇点,而这将会影响到重整化光子场矩阵元的渐进行为.特别地,方程(11.2.22)给出了重整化电磁场的自能函数

$$\pi(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x(1-x) \ln\left[1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2}\right] + O(e_R^4) \,. \tag{18.1.17}$$

它在m = 0处有奇点,所以在它的渐进行为中就会有大对数:对于 $q^2 \rightarrow +\infty$

$$\pi(q^2) \longrightarrow \frac{e_R^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{18} \right] + O(e_R^4) .$$
 (18.1.18)

电动力学有如下的特征,出现在电磁场重整化中的常数Z3同时出现在电荷重整化中:

$$e_R = Z_3^{-1/2} e_{\text{BARE}} ,$$
 (18.1.19)

但这并非普遍情况. 重整化群技巧首先是在量子电动力学中得以使用的, 但对于这里讨论的标量场论而言, 由于场和耦合的重整化的是分开的, 所以这给出了这些方法一个更加典型的例证.

18.2 滑动标度

在上一节我们看到, 合适的被积截面或者不在壳Feynman振幅在高能处会出现大对数, 而这些大对数可以追溯到用来定义重整化耦合常数和重整化算符的方案. 重整化群方法的核心思想就 是改变这一方案.

假定我们发现了某种定义一类新的重整化耦合常数 $g(\mu)$ 的方法,使得它依赖于滑动能量标 度 μ ,但是(至少当 $\mu \gg m$ 时)与理论的质量标度无关.这样,合适的被积截面或者其它的红外安全 速率参量就可以表示成 g_{μ} 和 μ 而不是 g_R 的函数.通过量纲分析,这样的函数可以写成

$$\Gamma(E, x, g_{\mu}, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_{\mu}, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right) . \qquad (18.2.1)$$

(我们的记号与18.1节是相同的; 特别地, *x*代表Γ所依赖的所有无量纲的角, 能量比值等.) 既然 μ 是 完全任意的重整化标度, 我们可以令 $\mu = E$, 在这一情况下, 方程(18.2.1)变成

$$\Gamma(E, x, g_{\mu}, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right) .$$
(18.2.2)

现在,由于 g_E 在 $m \ll E$ 时不依赖于m,这里没有零质量奇点,因而也没有大对数,并且只要 g_E 本身保持足够小,我们就能以 g_E 的形式用微扰论计算 Γ .特别地,在微扰论的任意有限阶, Γ 有如下的渐进行为,对于 $E \gg m$,

$$\Gamma(E, x, g_{\mu}, m, \mu) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1) .$$
(18.2.3)

(非微扰修正将在18.4节进行考察.)

尚需计算的是 g_E ,我们举一个例子进行说明,在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中,我们可以将 g_μ 定义成散射振幅在重整化点 $s = t = u = -\mu^2$ 的值:

$$g_{\mu} \equiv A(s = t = u = -\mu^{2})$$

= $g - \frac{3g^{2}}{32\pi^{2}} \int_{0}^{1} dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^{2}}{m^{2} + \mu^{2}x(1-x)} - 1 \right) \right\} + O(g^{3}) ,$ (18.2.4)

或者,将其写成传统的重整化耦合(18.2.5)的形式,

$$g_{\mu} = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \,\ln\left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2}\right) + O(g_R^3) \,. \tag{18.2.5}$$

然而, 仅当修正项远小于 g_R 时, 这一公式才是可靠的; 即, 仅当 $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$ 时, 这一公式才是可靠的. 如果是 $\mu \simeq E$ 的情况, 我们不需要使用重整化群方法; 普通的微扰论就已经足够好了.

当 μ 很大时,取代直接使用(18.2.5)这样的公式,我们必须以阶段的方式进行:只要 μ/m 不是远大于1,我们就可以用 g_R 计算 g_μ ;这样,只要 μ'/μ 不远大于1,我们就可以用 g_μ 计算 $g_{\mu'}$;以此类推,直到 g_E .取代用离散的步骤到达 g_E ,我们也可以连续地到达 g_E .量纲分析告诉我们, $g_{\mu'}$ 和 g_{μ} 之间的关系采取形式

$$g_{\mu'} = G(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu)$$
 (18.2.6)

 $对\mu'$ 微分然后取 $\mu' = \mu$,这给出微分方程

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_{\mu} = \beta \left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu} \right) , \qquad (18.2.7)$$

其中

$$\beta\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z}G(g_{\mu}, z, m/\mu)\right]_{z=1} .$$
(18.2.8)

这里没有零质量奇点,所以当µ≫m时,这一微分方程就变成

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_{\mu} = \beta(g_{\mu}, 0) \equiv \beta(g_{\mu}) , \qquad (18.2.9)$$

这通常被称作*Callan-Symanzik*方程.^[1] 我们将通过对微分方程(18.2.9)积分来计算 g_E ,其中的初始值 g_M 处在标度 $\mu = M$,对该标度的选择要比较小心,一方面要足够大,使得当 $\mu \ge M$ 时,相比于 μ 我们可以忽略掉m,一方面要足够小,使得我们在用微扰论计算 g_M 时,大对数 $\ln(E/m)$ 不会妨碍我们用 g_R 去计算 g_M .只要 $\beta(g)$ 在 g_M 和 g_E 之间不为零,那么这个解就可以形式地写成

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} \mathrm{d}g/\beta(g) \ . \tag{18.2.10}$$

上一段的结果不依赖微扰论,但是我们通常需要用微扰论计算 $G和\beta$.例如,假定我们在相互作用为 $g\phi^4/24$ 的标量场论中计算 $g_{\mu'}$,通过将g表示成 g_{μ} 而非 g_R 进行重整化.沿用导出方程(18.2.5)的步骤,这给出

$$g_{\mu'} = g_{\mu} - \frac{3g_{\mu}^2}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \ln\left(\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}\right) + O(g_{\mu}^3) \, .$$

那么方程(18.2.8)给出

$$\beta\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) = +\frac{3g_{\mu}^2}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(g_{\mu}^3) \,. \tag{18.2.11}$$

当 $\mu \gg m$ 时,这变成

$$\beta(g_{\mu}) = \frac{3g_{\mu}^2}{16\pi^2} + O(g_{\mu}^3) . \qquad (18.2.12)$$

到下一阶, $\mu \gg m$ 的 β -函数是^[3]

$$\beta(g_{\mu}) = g_{\mu} \left[3 \left(\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \right) - \frac{17}{3} \left(\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \right)^2 + \cdots \right] \; .$$

如果我们只满足单圈近似, $\beta(g)$ 的计算有更加简单的方法.为了避免矩阵元在 μ 阶能量处有很大的辐射修正,我们必须将裸耦合g写成有限的重整化耦合 g_{μ} ,就像

$$g = g_{\mu} + B(g_{\mu}) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \cdots$$
 (18.2.13)

例如,从方程(18.1.3)中,我们可以立刻读出g中ln Λ项的系数

$$B(g) = -\frac{3}{2} \left[-i(2\pi)^4 g^2 \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 2\pi^2 i = \frac{3g^2}{16\pi^2} .$$
(18.2.14)

非重整化耦合显然独立于μ,所以到最低阶

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_{\mu} - B(g_{\mu}) = 0$$

因此在最低阶

$$\beta(g) = B(g) . (18.2.15)$$

这里的B(g)由方程(18.2.14)给定,这与我们之前 $\beta(g)$ 在 ϕ^4 标量场论中的结果(18.2.14)一致.

简单的紫外截断会妨碍规范不变性,所以用维数正规化来处理紫外发散通常是方便的.对于时空维数d < 4,我们发现 $\ln(\Lambda/\mu)$ 会被替换成收敛积分

$$\int_{\mu}^{\infty} k^{d-4} \frac{\mathrm{d}k}{k} = \frac{\mu^{d-4}}{4-d} \underset{d \to 4}{\longrightarrow} \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right] \; .$$

因此,不像之前通过将非重整化耦合写成(18.2.13)那样来消除截断相关性,我们转而写成

$$g = g_{\mu} + B(g_{\mu}) \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right] , \qquad (18.2.16)$$

其中的函数 $B(g_{\mu})$ 与上面相同.因此,为了计算 $\beta(g_{\mu})$,我们需要做的就是将重整化耦合中奇异因 子1/(4 - d)的系数挑出来.这一讨论将在18.6节扩展至所有阶.

在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中,只要 g_{μ} 足够小,方程(18.2.9)和(18.2.12)可以很好地近似为

$$g_{\mu} = -\frac{16\pi^2}{3\ln(\mu/M)} , \qquad (18.2.17)$$

其中M是一个积分常数.这一表达式例证了重整化群运算的一个普遍特征,即像 g_R 这样的无量 纲耦合会被M这样量纲为质量的参量替代.若 μ 的值足够大,使得我们可以使用基于 $\mu \gg m$ 的 近似,并且又足够小,使得 $|g_R \ln(\mu/M)| \ll 1$,通过比较解(18.2.17)与此时耦合的行为,我们可以 将M与 g_R 关联起来,在 μ 满足上述条件时,(18.2.5)给出

$$g_{\mu} \simeq g_R + \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right)$$
 (18.2.18)

以这种方式,我们发现

$$M \simeq m \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_R}\right) , \qquad (18.2.19)$$

这使得方程(18.2.17)可以变成更加常见的形式

$$g_{\mu} = g_R \left[1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m} \right]^{-1} .$$
 (18.2.20)

再重申一次,即使 $|g_R \ln(\mu/m)|$ 量级为1,只要 g_μ 是小量,上式就是成立的,所以它代表的是对微扰 结果(18.2.18)的重要提升.当然,当 $|g_R \ln(\mu/m)|$ 充分接近于临界值 $16\pi^2/3$ 时, g_μ 是小量这个条件 就会被破坏.但是,方程(18.2.20)至少做出了如下的明确预测:在临界值(18.2.19)之下的某个能 量*E*处, g_E 变得足够大使得微扰论无法使用.

如果我们计算的不是被积截面而是算符的不在壳矩阵元,我们还需要把出现在重整化算符 定义中的N因子考虑在内,它会使得重整化算符的矩阵元是有限的.在上一节我们看到,如果这 些N因子以传统的方式定义(即,当算符携带的4-动量为零或者算符是处在质量壳上的场时,发散 子图所产生的修正因子被抵消了),那么N因子的公式就会像方程(18.1.12)或(18.1.16)中那样包含 零质量奇点,而这又会在 $E \gg m$ 处产生大对数.解决方法是在滑动标度 μ 处定义重整化常数 $N^{(O)}_{\mu}$, 使得在重整化算符

$$\mathcal{O}_{\mu} = N_{\mu}^{(\mathcal{O})} \mathcal{O} \tag{18.2.21}$$

的矩阵元中,包含算符*O*的发散子图所产生的修正因子在μ阶4-动量所表征的重整化点处被抵消了.如果*M*_R是按传统方式重整化的算符的矩阵,而*M*是算符按照方程(18.2.21)重整化后的矩阵元,那么对于任意的μ

$$M_R = \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(N^{(\mathcal{O})} \middle/ N^{(\mathcal{O})}_{\mu} \right) \right] M(E, x, g_{\mu}, m, \mu) .$$
 (18.2.22)

我们可以再次使用量纲分析(假定M的量纲为D)并令 $\mu = E$,将其写成

$$M_R = E^D \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(N^{(\mathcal{O})} / N_E^{(\mathcal{O})} \right) \right] M \left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1 \right) .$$
 (18.2.23)

因此,为了发现不在壳振幅 M_R 的高能行为,我们需要知道当重整化标度 μ 变化时, N_μ 是如何变化的.

对于任意两个重整化标度 μ 和 μ' ,重整化算符 $N^{(O)}_{\mu}$ O和 $N^{(O)}_{\mu'}$ O的矩阵元都是有限的,所以比值 $N^{(O)}_{\mu'}/N^{(O)}_{\mu}$ 必须是截断无关的.基于量纲分析,这一比值必须采取如下的形式

$$N_{\mu'}^{(\mathcal{O})} / N_{\mu}^{(\mathcal{O})} = G^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu) . \qquad (18.2.24)$$

相对 μ' 微分并令 $\mu' = \mu$,这给出

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} N_{\mu}^{(\mathcal{O})} = \gamma^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, m/\mu) N_{\mu}^{(\mathcal{O})} , \qquad (18.2.25)$$

其中

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, m/\mu) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, z, m/\mu)\right]_{z=1} .$$
(18.2.26)

这一方程的解是

$$N_E^{(\mathcal{O})} \propto \exp\left[\int^E \gamma^{(\mathcal{O})} \left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right] \,. \tag{18.2.27}$$

由于引入了滑动标度, $N^{(\mathcal{O})}_{\mu} \pi N^{(\mathcal{O})}_{\mu'}$ 中不再有零质量奇点, $G^{(\mathcal{O})} \pi \gamma^{(\mathcal{O})}$ 也因此不再含有零质量奇点, 所以这一结果是相当有用的.因此, 只要 g_{μ} 是一小量, 就不会有大对数妨碍用微扰论计算 $\gamma^{(\mathcal{O})}$.另 外, 当 $\mu \gg m$ 时, $\gamma^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, m/\mu)$ 有一光滑极限

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}) \equiv \gamma^{(\mathcal{O})}(g_{\mu}, 0) .$$
 (18.2.28)

作为一个例子,考察标量场论中的算符 $\mathcal{O} = \phi^2$,其中的相互作用是 $g\phi^4/24$.这时的重整化不 会使得修正因子(18.1.9)在 $p^2 = 0$ 处被抵消掉,而是在滑动标度 $p^2 = \mu^2$ 处抵消它,方法是引入新的 重整化 ϕ^2 算符 $N_{\mu}^{(\phi^2)}\phi^2$,其中

$$\begin{split} N_{\mu}^{(\phi^2)} &\equiv F^{(\phi^2)}(\mu^2)^{-1} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \left[\ln \left[\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x (1-x)} \right] - 1 \right] \\ &+ O(g^2) \; . \end{split}$$

那么,对于这一算符,函数(18.2.24)就是

$$\begin{split} G^{(\phi^2)}\left(g_{\mu},\frac{\mu'}{\mu},\frac{m}{\mu}\right) &\equiv \frac{N_{\mu'}^{(\phi^2)}}{N_{\mu}^{(\phi^2)}} = 1 + \frac{g_{\mu}}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \,\ln\left[\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}\right] \\ &+ O(g_{\mu}^2) \;. \end{split}$$

(由于 g_{μ} 和g的差或者 g_{μ} 和 $g_{\mu'}$ 的差仅影响 g_{μ}^{2} 阶的项或者更高阶的项,所以在这里我们可以用 g_{μ} 替代g或 $g_{\mu'}$.) 那么,从方程(18.2.26)中我们就有

$$\gamma^{(\phi^2)}\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) = -\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \,\mathrm{d}x + O(g_{\mu}^2)$$

或者, 当 $\mu \gg m$ 时,

$$\gamma^{(\phi^2)}(g_\mu) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2) . \qquad (18.2.29)$$

另一个比较好的例子是量子电动力学中与电磁场重整化相联系的N因子.回忆,通过用重整化电磁场来计算光子传播子,我们可以使其对于所有的动量都是有限的,这一方法可以等效为给非重整化场的传播子乘以Z₃⁻¹:

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = Z_3^{-1} \Delta_{\rho\sigma}(q) . \qquad (18.2.30)$$

方程(10.5.17)表明这一重整化传播子可以写成

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = \frac{\eta_{\rho\sigma}}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]} + q_\rho q_\sigma \mathfrak{I}.$$
(18.2.31)

假定我们转而定义重整化场 $N^{(A)}_{\mu}A^{\rho}$,它的传播子中有一项正比于 $\eta_{\rho\sigma}/[q^2 - i\epsilon]$,并且比例系数在滑动标度 $q^2 = \mu^2$ 处等于1.由于这个原因,显然我们必须要取

$$N_{\mu}^{(A)} = Z_3^{-1/2} [1 - \pi(\mu^2)]^{1/2} . \qquad (18.2.32)$$

利用方程(11.2.22), 函数(18.2.24)就是

$$G^{(A)}(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu) = \left[\frac{1 - \pi(\mu'^2)}{1 - \pi(\mu^2)}\right]^{1/2}$$

= $1 - \frac{e_{\mu}^2}{4\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x(1 - x) \ln\left[\frac{m^2 + \mu'^2 x(1 - x)}{m^2 + \mu^2 x(1 - x)}\right]$
+ $O(e_{\mu}^4)$, (18.2.33)

因此, 方程(18.2.26)给出

$$\gamma^{(A)}(e_{\mu}, m/\mu) = -\frac{e_{\mu}^2}{2\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{x^2(1-x)^2\mu^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(e_{\mu}^4) \,. \tag{18.2.34}$$

正如所承诺的,它在 $\mu \gg m$ 时的极限是光滑的

$$\gamma^{(A)}(e_{\mu}) \equiv \gamma^{(A)}(e_{\mu}, 0) = -\frac{e_{\mu}^2}{12\pi^2} + O(e_{\mu}^4) . \qquad (18.2.35)$$

正如之前提到过的,由于出现在重整化电磁场中的重整化常数 $Z_3^{-1/2}$ 与定义电子的重整化电荷的常数互为倒数: $e_R = Z_3$. 那么,滑动标度 μ 处的重整化电荷的自然定义就是

$$e_{\mu} = N_{\mu}^{(A)-1} e = Z_3^{-1/2} N_{\mu}^{(A)-1} e_R , \qquad (18.2.36)$$

这使得 e_{μ} 与在标度 μ 处重整化的场 $N_{\mu}^{(A)}A^{\rho}$ 相乘后与 μ 无关,从方程(18.2.25)中,我们看到,对于给 出 e_{μ} 对 μ 的相关性的函数 $\beta(e)$,根据方程(18.2.9),它在 $\mu \gg m$ 时的值为

$$\beta(e) = -e\gamma^{(A)}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5) . \qquad (18.2.37)$$

更早的计算^[3a]给出了真空极化函数 $\pi(q^2)$ 的第四阶项. 借此, Gell-Mann和Low给出了 $\beta(e)$ 中e的下一阶项.

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) . \qquad (18.2.38)$$

换句话说,活动标度µ处的电荷满足重整化群方程

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} e_{\mu} = \frac{e_{\mu}^3}{12\pi^2} + \frac{e_{\mu}^5}{64\pi^2} + O(e_{\mu}^7) . \qquad (18.2.39)$$

这表明,对于比较小的e_µ, e_µ随着µ的增大而增大.

我们还需要初始条件.这由电荷著名的传统重整化值 $e_R = Z_3^{1/2} e$ 提供,对于这个值 $\alpha \equiv e_R^2/4\pi = 1/137.036\cdots$ 方程(18.2.32)和(18.2.36)给出

$$e_R/e_\mu = Z_3^{1/2} N_\mu^{(A)} = \sqrt{1 - \pi(\mu^2)}$$

= $1 - \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x(1-x) \ln\left[1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m_e^2}\right] + O(e_R^4) \,.$ (18.2.40)

我们需要匹配这一公式与方程(18.2.39)的解, 在匹配时, μ 的值要足够大以使得方程(18.2.39)中的 近似 $\mu \gg m_e$ 是合理的, 但又足够小使得方程(18.2.40)中的对数与 $4\pi^2/e_R^2$ 相比依然是个小量, 进而 使得微扰论是成立的. (例如, 我们可以取 μ 的量级为100 MeV.) 对于这样的 μ 值, 方程(18.2.40)给出

$$e_{\mu} \simeq e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \left[\ln \frac{\mu}{m_e} - \frac{5}{6} \right]$$
 (18.2.41)

另一方面, 当e_µ比较小的时候, 方程(18.2.39)(仅保留右边第一项)的解是

$$e_{\mu} = \left[\ddot{\mathbb{R}} \underbrace{\&}{\&} - \frac{\ln \mu}{6\pi^2} \right]^{-1/2} .$$
 (18.2.42)

比较方程(18.2.41)和(18.2.42),这给出解

$$e_{\mu} = e_R \left[1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2} \left(\ln \left(\frac{\mu}{m_e} \right) - \frac{5}{6} \right) \right]^{-1/2} .$$
 (18.2.43)

不像方程(18.2.41), 不管($e_R^2/6\pi^2$) ln(μ/m_e)是不是小量, 只要 $e_\mu^2/6\pi^2$ 是小量, 方程(18.2.43) 就是适用的.

例如,我们在11.3节就已经看到,通过对 μ 子磁矩的二阶(Schwinger)项(11.3.16)乘以 $k^2 \approx m_{\mu}^2$ 处的真空极化函数 $\pi_e(k^2)$,我们就可以获得对 μ 子磁矩的领头4阶修正,根据方程(18.2.40),这与将Schwinger项中的 α 替换成 $e_{m_{\mu}}^2/4\pi$ 的结果(到这一阶)是相同的.

另一个例子: 在高能电子-正电子对撞实验中,诸如CERN上的LEP或者SLAC上的SLC^d,它们 所研究的物理过程所处的能量量级大约是 Z^0 粒子的质量,或者说91 GeV. 方程(18.2.43)表明,在能 量达到这个量级时,计算纯量子电动力学中的辐射修正所用的精细结构常数不是 $\alpha = 1/137.036$, 而是

$$\frac{e^2(91\,\text{GeV})}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - 2(11.25)\alpha/3\pi} = \frac{1}{134.6} \ . \tag{18.2.44}$$

在这一结果所针对的理论中,质量小于 m_Z 的带电粒子只有电子.而在真实情况中,这种粒子有很多,相应地, m_Z 处的精细结构常数^[4]是(128.87±0.12)⁻¹.

计算理论的耦合参数所在的滑动标度可以不是外线动量而是外场的值. 在重整化群方法的一个早期应用中, Coleman和E. Weinbergz^[4a]考察了时空无关的外标量场 ϕ 的有效势 $V(\phi)$. 在这一简单情况中,场只与自身作用,它们的圈结果由方程(16.2.15)给出. 在重整化质量 m_R 为零的情况下考察有效势是特别有趣的,这时,到一圈阶我们可以令最后一项中的 $\mu^2(\phi)$ 等于 $g_R\phi^2/2$,这使得方程(16.2.15)在这里变成(其中的g是重定义耦合,与之前稍有不同):

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g}{24}\phi^4 + \frac{g^2\phi^4 \ln \phi^2}{256\pi^2} . \qquad (18.2.45)$$

第一眼看上去, 当g > 0时, 对于比较小的 ϕ , 有效势好像要小于 λ_R , 这使得 $\phi = 0$ 这一点是局域极大 点而非极小点, 但对于这样小的 ϕ , 第三项要远大于第二项, 微扰论显然是靠不住的. 另外, 为了使

^dCERN是欧洲核子研究组织(European Organization for Nuclear Research)的缩写, LEP是大型正负电子对撞机(Large Electron-Positron Collider)的缩写, 在2000年末的时候, LEP被关停并拆解, 以给在建的新的大型强子对撞机(LHC)腾出轨道空间, SLAC是斯坦福直线加速器中心(Stanford Linear Accelerator Center)的缩写, 而SLC是斯坦福直线对撞机(Stanford Linear Collider)的缩写. ——译者注

势对于比较大的场有下界,我们能够论证g必将是正的,但是方程(18.2.45)表明,无论g多小,总存 在足够大的场使得微扰论不在成立.因而方程(18.2.45)也就无法告诉我们势是否在场比较大时有 下界.

通过使用定义在场强的滑动标度μ处的耦合常数,我们可以做的更好.假定我们通过条件

$$V(\mu) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24} \mu^4$$
 (18.2.46)

来定义耦合 g_{μ} .如果我们在开头就用 g_{μ} 作为耦合参量,那么,取代方程(18.2.45),我们将获得

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24}\phi^4 + \frac{g_\mu^2 \phi^4}{256\pi^2} \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu^2}\right) , \qquad (18.2.47)$$

它显然满足方程(18.2.46).* 从有效势独立于µ这一条件可以获得gµ的重整化群方程,**

$$\mu \frac{\mathrm{d}g_{\mu}}{\mathrm{d}\mu} = \frac{3g_{\mu}^2}{16\pi^2} \ . \tag{18.2.48}$$

(包含 g^2_μ 的导数的项被扔掉了,这是因为它们是 g_μ 的高阶项,因此只要 g_μ 足够小,它们就可以被忽略.)与重整化群方程(18.2.9)和(18.2.13)相比,上式所采取的形式与它们一样,尽管 μ 在那里是重整化动量,这并非巧合,我们将在下一节看到,重整化群方程中的前两项与我们定义滑动标度的方式总是无关的.这一方程的解由方程(18.2.17)给出,一般而言所不同的是积分常数*M*.因此,通过令方程(18.2.17)中的 $\mu = \phi$,我们现在有

$$V(\phi) = \lambda_R - \frac{32\pi^2 \phi^4}{3\ln(\phi^2/M^2)} , \qquad (18.2.49)$$

$$g_{\phi} = -\frac{32\pi^2}{3\ln(\phi^2/M^2)} \ . \tag{18.2.50}$$

使用这一结果要小心,因为它仅在耦合常数 g_{ϕ} 比较小的情况下才是有效的.这里的问题 不仅是方程(18.2.49)在 ϕ 接近于M时失去了它的有效性;我们对重整化群方程的积分也不能穿 过 $\phi = M$ 处的奇点,所以 g_{ϕ} 在奇点一边的信息无法告诉我们它在奇点另一边的行为.

如果 g_{ϕ} 对于某个 ϕ_0 有很小的正值,那么我们从方程(18.2.50)中可以知道 $M > |\phi_0|$,所以对 于 $|\phi| < |\phi_0|$, g_{ϕ} 会保持一个比较小的值并且方程(18.2.49)是有效的. 这表明 $\phi = 0$ 这一点是 $V(\phi)$ 的 局域极小点,与方程(18.2.45)所给予我们的预期相反. 这意味着对于在对称变换 $\phi \to -\phi$ 下 不变的真空,除开可能的量子力学势垒穿透效应,这一真空是稳定的. 另一方面,我们知道 当 $|\phi|$ 与M相比足够大时,方程(18.2.49)会失效. 即使这一耦合对于某些 $|\phi| > M$ 会变得比较 小,但它仍然太大以至于对所有的 $|\phi| > M$ 都无法使用微扰论,对于这样的 ϕ ,势可能由重整 化标度 $M' > \phi$ 的方程(18.2.49)给出,这会产生第二个奇点. 因此在这一情况下,我们无法看到 在 $|\phi| \to \infty$ 时 $V(\phi) \to -\infty$.

^{*}通过在方程(18.2.45)中使用方程(18.2.46)进而将g表示成 g_{μ} ,我们也可以得到 $V(\phi)$,但这一结果与方程(18.2.47)不同.它们的差是g的高阶项,但是如果计算 $V(\phi)$ 所在的 ϕ 与 μ 相差很大,这时大对数就能够补偿耦合的幂次方,这一差异就会变得显著.如果我们从一开始就用 g_{μ} 作为耦合参量,并取 μ 为 ϕ 阶的,那么这样的大对数就不会产生,并且只要 g_{μ} 依旧是个小量,近似方程(18.2.47)就是有效的.

^{**}为了消除所有的截断相关性, ϕ 应该写成重整化场 $\phi_{\mu} = N^{\phi}_{\mu}\phi$ 的形式, 它给 $V(\phi_{\mu})$ 赋予的 μ 相关性源于重整化常数 N^{ϕ}_{μ} 的 μ 相关性. 这一点在这里被忽略了, 这是因为在相互作用 $\propto \phi^4$ 的标量场论中, 对 N^{ϕ}_{μ} 的 μ 相关性有贡献的最低阶 图有两个圈, 这使得到我们现在计算的这一阶, 我们可以取 $N^{\phi}_{\mu} = 1$.

类似地,如果 g_{ϕ} 对于某个 ϕ_0 有很小的负值,那么我们就可以得知 $M < |\phi_0|$,所以对于 $|\phi| > |\phi_0|$, g_{ϕ} 会保持一个比较小的值并且方程(18.2.49)是有效的.在这一情况下,当 $|\phi| < M$ 时,对于势的行 为我们无法得出任何结论,但这时我们可以用方程(18.2.49)看到 $|\phi| \to \infty$ 时 $V(\phi) \to -\infty$,这排除 了任何稳定真空的可能性.由于我们在这里考察的是极限 $|\phi| \to \infty$,因此,假定 $m \ll |\phi_0|$,那么这 一结论对于质量m > 0的标量场同样是成立的.这正是我们为什么必须要假定(在任何远大于该标 量质量的标度处重整化的) ϕ^4 耦合为正的原因.

18.3 各种渐进行为

即使在跑动耦合 g_{μ} 不够小以至于无法使用微扰论的情况下,对于量子场论中所遇到的可能的 渐进行为类型,重整化群方法提供了非常有用的洞察.我们将区分 g_{μ} 在 $\mu \to \infty$ 时的4种不同行为方 式,这4中不同的行为分别对应于函数 $\beta(g)$ 的4种不同形状,这是理论中只有一个耦合常数的情况. 在下一节,我们将考察有多个相互独立耦合的理论.

我们先来回忆一下从上一节所考察的两个例子中所获得的 $\beta(g)$. 其中的一个是相互作用 为 $g\phi^4/24$ 的标量场论,对于比较小的g, β -函数是

$$\beta(g) = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{18}{3} \frac{g^3}{(16\pi^2)^2} + O(g^4) . \qquad (18.3.1)$$

另一个是量子电动力学.取代在这里将β-函数写成(18.2.38)的形式,为了突出这一理论与标量场论 之间的相似性,定义

$$g \equiv e^2 , \qquad (18.3.2)$$

并将 $\beta(g_{\mu})$ 理解成 $\mu dg_{\mu}/d\mu$,这使得对于比较小的g

$$\beta(g) = 2e \left[\frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) \right]$$
$$= \frac{g^2}{6\pi^2} + \frac{g^3}{32\pi^2} + O(g^4) .$$
(18.3.3)

注意到, 在这两种情况中, 物理允许的耦合都落在 $g \ge 0$ 的范围内, 在这个范围内, 对于比较小的g, 我们有 $\beta(g) \ge 0$. 在电动力学中, 这是因为拉格朗日量为实会要求e是实的. 而在标量场论中, 正如我们在上一节末尾所看到的, 为了有稳定的真空我们必须要有g > 0. 然而, 我们可以考察相互作用哈密顿量为 $-g\phi^4/24$ 的标量场论, 其中的g是一正数. 这或许不是物理的, 但只要我们只专注于微扰论, 那么稳定性稳定就不会困扰我们. 方程(18.2.9)表明, 如果我们重定义 $g \to -g$, 那么 β -函数的变化就是 $\beta(g) \to -\beta(-g)$, 所以之前针对于相互作用 $g\phi^4/24$ 的结果 $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3)$, 它现在对于相互作用哈密顿密度 $-g\phi^4/24$ 就会给出

$$\beta(g) = -3g^2/16\pi^2 + O(g^3) . \tag{18.3.4}$$

它与物理的相关性更大,我们将在18.7节看到,对于旋量场不太多非阿贝尔规范场论,对于某些小的正耦合常数会有 $\beta \leq 0$.在下文中,我们对g的定义总使得 $g \geq 0$,但对于g比较小的 $\beta(g)$,我们既会考虑它为正的情况也会考虑它为负的情况.

现在我们将所有的可能性一一列举出来. (参看图18.4.)



图 18.4 $\beta(g)$ 函数四种可能形式的图形表示. 对于 $\beta(g)$ 的这些形式, 跑动耦合 g_{μ} 将会: (a)在 μ 的有限值处趋于无限大; (b)随着 μ 的增长而持续增长; (c)在 $\mu \to \infty$ 时趋于一个有限的极限值 g_* ; (d)在 $\mu \to \infty$ 时趋于零.

(a) 有限能量处的奇点

假定对于小的正*g*,我们有 $\beta(g) > 0$ (例如方程(18.3.1)和(18.3.3)的情况),并且随着*g*的增大, $\beta(g)$ 保持正值并且以足够快的速度持续上升,这使得积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dg/\beta(g)$ 收敛:

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}g}{\beta(g)} < \infty \ . \tag{18.3.5}$$

 g_{μ} 将会稳定地远离 $g_{\mu} = 0$,并且方程(18.2.10)表明 g_E 必须在E的有限值处变成无限大:

$$E_{\infty} = \mu \, \exp\left(\int_{g_{\mu}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}g}{\beta(g)}\right) \,, \qquad (18.3.6)$$

其中 μ 是满足 $\mu \gg m$ 的任意重整化标度. 我们在上一节看到过这种想象的一个例子; 在标量场论中, 如果我们认为 β -函数的最低阶公式 $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2$ 是对所有g都成立的精确值, 那么跑动耦合就会在能量(18.2.19)处变成无限大.类似地, 在旋量量子电动力学中, 如果我们认为最低阶公式 $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ (其中 $g \equiv e^2$)是对所有g都成立的精确值, 那么在 g_E 和 e_E 都变成无限大的那一点, 能量(18.3.6)是

$$E_{\infty} = \mu \, \exp(6\pi^2/g_{\mu}) \,. \tag{18.3.7}$$

利用方程(18.2.43), 我们可以将其表示成传统的重整化电荷:

$$E_{\infty} \simeq m_e \exp\left(\frac{6\pi^2}{e_R^2} + \frac{5}{6} + O(e_R^2)\right) = e^{646.6}m_e \;.$$
 (18.3.8)

当然,在到达这一能量之前,近似 $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ 就会失效,所以我们能够断言的只是: $e_E \alpha E_\infty$ 之下的某个能量E处会变得非常大以至于微扰论失效.

(b) 持续增长

现在, 假定在某个理论中 $\beta(g)$ 在 $g \to \infty$ 时保持正定, 但又增长(或减小)得非常缓慢以至于 $\int^{\infty} dg/\beta(g)$ 是发散的. 那么耦合常数 g_E 就会随着 $E \to \infty$ 持续增长, 但仅当 $E = \infty$ 时才会变

成无限大. 更进一步, g_E 渐进行为中的领头项在 $E \to \infty$ 时独立于传统的重整化耦合. 例如, 如 果 $\beta(g)$ 在g很大时的行为类似于 bg^k , 并且b < 0而k < 1, 那么方程(18.2.9)的解是

$$g_E = \left[1 + (1-k)b \, g_{\mu}^{k-1} \ln \frac{E}{\mu}\right]^{1/(1-k)} g_{\mu}.$$
(18.3.9)

如果 g_{μ} 对于某些 μ (例如m阶的 μ)是小量,那么仅当能量与这一 μ 相比是一指数级大数时,我们才能 看到 g_E 的增长.然而,在极高的高能极限下,耦合的增长遵循

$$g_E \to [(1-k)b\ln E]^{1/(1-k)}$$
, (18.3.10)

这是一个独立于gµ的极限行为!

(c) 有限耦合处的不动点

接下来, 假定 $\beta(g)$ 对于 $0 < g < g_*$ 保持正定, 但在 $g = g_*$ 这一点跌落为零, 并且对于 g_* 之后的值 是负的. 那么方程(18.2.9)表明, 随着 μ 的增长, 若 $g_\mu < g_*$, g_μ 会增长, 若 $g_\mu > g_*$, g_μ 会降低, 但无论 是那一种情况, g_μ 都会在 $\mu \to \infty$ 时趋于 g_* . 如果 $\beta(g)$ 是 g_* 这一点是单零点, 那么在这一点的邻域内 我们有

其中a > 0. 那么方程(18.2.9)的解是

$$g_* - g \propto \mu^{-a}$$
 . (18.3.12)

(前面描述的(b)型行为可以视为不动点 g_* 在无限远处的特殊情况.) 另外,我们可以预期任意算 符O的 $\gamma(g)$ 在 g_* 附近的行为是光滑的:

$$\gamma(g) = \gamma(g_*) + c(g_* - g) + O\left((g_* - g)^2\right) .$$
(18.3.13)

(我们在这里扔掉了γ和*c*上的指标*O*.)因此,在这一算符(可能还有其它算符)的矩阵元中,我们遇到因子(参看方程(18.2.27))

$$N_E^{-1} \propto \exp\left[-\int^E \gamma(g_\mu) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right] \propto E^{-\gamma(g_*)} [1 + O(E^{-a})] . \tag{18.3.14}$$

因子 $E^{-\gamma(g_*)}$ 的乘积可以与方程(18.2.23)中的因子 E^D 聚集在一起,有了这一结果,整个矩阵元就会趋于

$$M_R \propto E^{D_*} , \qquad (18.3.15)$$

其中的量纲 D_* 相当于给出现在该矩阵元中的每一算符的实际量纲加上了一个"反常量纲" – $\gamma(g_*)$. (d) **渐进自由**

在迄今为止所讨论的例子中, $\beta(g)$ 对于小的正g都是正的, 这使得 g_{μ} 会随着 μ 的增长远离g = 0. 假定在某个其它理论中, $\beta(g)$ 对于小的正g是负的. 那么

$$\beta(g) \to -b \, g^n \,, \tag{18.3.16}$$

其中b > 0. 这里的n是对 $\beta(g)$ 有贡献的最低阶图的阶数,因而n总是大于1的. (在这里用作例子的 理论中,n = 2.) 这时,方程(18.2.9)的解是

$$g_E = g_\mu \left[1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{-1/(n-1)} .$$
 (18.3.17)

当 $E \to \infty$ 时, 它有一个独立于 g_{μ} 的极限

$$g_E \to [b(n-1)\ln E]^{-1/(n-1)}$$
 (18.3.18)

既然这在 $E \to \infty$ 时给出一个为零的 g_E ,只需假定当 $g \pi \beta(g)$ 有相反的符号时,对于某个有限的E, g_E 处在g = 0附近的区域内.我们在这一极限下就可以相信微扰论.不同算符O的方程量纲 $\gamma^{(O)}$ 预期会有弱耦合行为(扔掉指标O)

$$\gamma(g) \to c \, g^m \,, \tag{18.3.19}$$

其中*m*是对这一算符的重整化有贡献的最低阶图的阶数, 而*c*是既可以为正又可以为负的实数. 那 么由这一算符的重整化给矩阵元引入的因子, 它在高能处的渐进行为是

$$N_E^{-1} \propto \exp\left[-\int^E \gamma(g_{\mu}) \frac{d\mu}{\mu}\right] \to \exp\left[-c \int^E [b(n-1)\ln\mu]^{-m/(n-1)} \frac{d\mu}{\mu}\right] \propto \exp\left[-\frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{(1-m/(n-1))} (\ln E)^{1-m/(n-1)}\right]$$
(18.3.20)

有一个例外m = n - 1,这时,

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{-c/b(n-1)}$$
 (18.3.21)

在渐进自由的情况中,我们看到:若有效量纲决定的是出现在矩阵元渐进行为中的能量幂次,那么对它就没有修正,但是这一渐进行为反而被ln *E*的幂函数修正了.

我们可以用相互作用哈密顿量密度为 $-g\phi^4/24$ 的标量场论作为展现渐进自由的一个玩具模型,其中的g是一个正数.这时,方程(18.3.4)所给出的方程(18.3.16)的参量是:

$$b = 3/16\pi^2$$
, $n = 2$, (18.3.22)

所以, 方程(18.3.17)在 $E \rightarrow \infty$ 时给出

$$g_E \to \left[\frac{3\ln E}{16\pi^2}\right]^{-1}$$
 (18.3.23)

另外,算符 ϕ^2 在这一理论中的反常量纲由方程(18.2.29)给出

$$\gamma(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2) . \qquad (18.3.24)$$

因此, 方程(18.3.19)这时会有

$$c = -1/16\pi^2$$
, $m = 1$. (18.3.25)

根据方程(18.3.21), 矩阵元中的每个φ²算符会贡献因子

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{1/3}$$
 (18.3.26)

标量场 ϕ 自身在这一理论中有 $\gamma(g) \propto g^2$,因而m = 2,根据方程(18.3.20),矩阵元中的每个 ϕ 算符会 贡献因子

$$N_E^{-1} \propto 1 + O\left(\frac{1}{\ln E}\right)$$
 (18.3.27)

在18.7节研究量子色动力学时,我们会看到另一个关于渐进自由的更见物理的例子.

在所有 g_E 可以扩展至无限大能量处的例子中, g_E 在这一极限下表现出与重整化耦合 g_R 相独立的行为. 然而, 这并不必然意味着这一理论不包含自由的无量纲参量. 在所有这些情形中, 为了描述 g_E 在 $E \to \infty$ 时是如何趋于它的极限的, 我们需要指定一个量纲为能量的自由参量 λ . 对于情况(b), 方程(18.3.10)可以写成

$$g_E \rightarrow [(1-k)b\ln(E/\lambda)]^{1/(1-k)}$$

对于情况(c), 方程(18.3.12)可以写成

$$g_E \to g_* \left[1 - \left(\frac{\lambda}{E} \right)^b \right] \; .$$

最后,对于情况(d),方程(18.3.18)可以写成

$$g_E \to [b(n-1)\ln(E/\lambda)]^{-1/(n-1)}$$
.

一般而言,这样的理论确实拥有自由的无量纲参量: λ与质量m的比值.像e_R这样的耦合常数,它在与m相联系的标度处重整化,因此可以表示为m/λ的函数.仅当一个理论中的所有质量都为零时,我们才能说这一理论不包含自由的无量纲参量.

在这里所描述的四种渐进行为中, (a)类和(b)类显然给出了不物理的行为, 即跑动耦合 g_E 在有限能量处(情况(a))或在 $E \to \infty$ 时(情况(b))变成了无穷大. 这本身并不意味着灾难: 我们必须要注意耦合是如何定义的. 例如, 如果 g_μ 随着 $\mu \to \infty$ 从 $\mu = m$ 处的有限值 g_m 光滑地衰落到零, 我们可以定义一个新耦合 $\tilde{g}_\mu \equiv g_\mu/[1 - g_\mu/g_{2m}]$, 这样 \tilde{g}_μ 就会在 $\mu = 2m$ 处变成无限大, 但是这仅是对该耦合参量进行特殊选择的人工产品. 然而, 无论是在 ϕ^4 标量场论中还是在量子电动力学中, 传统的重整化耦合 g_μ 在那里都是以 μ 阶能量处的矩阵元值定义的. 特别地, g_μ 在 ϕ^4 标量场论中被定义成标量-标量散射在 $s = t = u = \mu^2$ 处的不变Feynman振幅A, 而A在那里被认为是解析的. 另外, 在旋量量子电动力学中, $g_\mu = e_\mu^2$ 给定为

$$e_{\mu}^{2}/e_{R}^{2} = Z_{3} / N_{\mu}^{(A)2} = \left[1 - \pi(\mu^{2})\right]^{-1}$$
 (18.3.28)

因此, e_{μ}^2 在某一点 μ_{∞} 处的无限大会在重整化光子传播子中产生一个极点或者其它奇点, 传播子中 奇点处在 p^2 的一个正值处, 即 $p^2 = \mu_{\infty}^2$ 处, 在这里传播子被认为是解析的.因此, 随着 g_{μ} 定义在这 里, (a)中描述的渐进行为也就被物理地排除了.

那么我们的各种量子场论的行为到底是什么样的?数年前, Landau^[4b]认为:在量子电动力学中,每一阶微扰论都会遇到且幂次逐渐上升的因子ln(*E/M*)在加起来后在*E*的有限值处会给出奇点(所谓的"Landau鬼").用现代观点来看,可以说Landau发现了上面的可能性(a),但是他没有给出任何反对情况(b)和(c)的讨论.

然而,现今普遍接受的观点是,不是渐进自由的相互作用量子场论,例如量子电动力学或者相 互作用为φ⁴的标量场论,这样的理论在数学上是不自洽的.在量子电动力学中,存在一些反对情况(c)的证据,即反对存在有限的不动点e_{*}的证据.如果第20章将要讨论的算符积展开的定性性质 被非微扰效应改变了,或者第22章将要讨论的三角反常有了非微扰重整化,那么这样的不动点才
是可能的.^[4c] 但是,即使情况(c)真的在量子电动力学中被排除了,在无限大耦合处有不动点的情况(b)仍然是可能的.

相互作用非渐进自由的量子场论不自洽的大部分证据来源于对一个特殊标量场论的研究, 即4维中相互作用为φ⁴的标量场在有限时空晶格上量子化的理论.有一些严格的定理^[4d]表明,除 非该理论是渐进自由的,否则,在晶格间距趋于零的极限下,这一理论(该理论的参量对晶格间距 的依赖性是任意的)的极限不可能是有相互作用的连续理论,显然这与微扰论中所发现的截然相 反.这一讨论同时看起来也不是决定性的.如果有一个非渐进自由的自洽连续标量场论,那么通过 积掉一个时空晶格以外的所有点上的标量场,我们确实有可能构建一个晶格理论.但这个理论不 会是那些定理中所考察的理论.它将拥有对称性允许的所有相互作用——不仅仅是正比于φ⁴的项, 也会有正比于φ⁶, φ³□φ等的项,而这些项的系数会与截断(晶格间距的倒数)相关,它们之间的相关 性将由12.4节讨论的Wilson重整化群方程给出,关于这种理论的连续极限还没有人证明过任何事 情.

如果在零晶格间距极限下真的不存在有相互作用的连续标量场论,那么当我们试图 解Wilson重整化群方程时必会遇到一些障碍,在非常小的晶格间距处对于弱的重整化耦合则 必然是这样.这样的理论除非在非常小的间距处被检验过,否则它会像相互作用标量场论那样出 现.在这一近似连续场论中,可以推测重整化耦合常数在有限能量处会有奇点,就像情况(a)一样, 这使得它在小间距处也崩溃掉了.(但对于强耦合,Wilson重整化群方程与Gell-Mann-Low重整化 群方程在形式上没有直接联系,所以裸耦合在有限晶格间距处有一个奇点并不一定暗示了重整化 耦合在有限重整化标度处存在奇点.)

这类理论有时被称为是平庸的,这样称呼它有时是因为,对于在晶格上量子化的理论,在对它的裸耦合附加几个假定条件后,它的连续极限表现为自由场论,有时是因为,使得(a)类连续理论在所有能量处都符合物理要求的唯一方法是将重整化群方程(18.2.9)的解取为 $g_{\mu} = 0$.即使一个场论在这两种意义下都是平庸的,也没有任何理由排除它是物理现象的实际理论的某个部分.对于晶格间距很小的一个理论,如果真实世界中在间距变得这样小时存在必须要考虑在内的其它场,那么解该理论的重整化群方程存在障碍就是不重要的.类似地,一个给定的理论即使在某个很大的能量 E_{∞} 处有不物理的奇点,如果这个理论在问题中只是一个更大理论的低能近似,一个只在能量远低于 E_{∞} 时才成立的近似,那么上述问题就不是一个物理问题.特别地,远在我们接近能量(18.3.8)之前,即量子电动力学的行为预期会变得奇异的能量值处,那怕是引力也必须要考虑在内,但没有人知道如何计算这种能量下的强引力效应.

尽管这些论述让人安心,但为了避免非物理的奇点,存在这样的可能性:我们所有分立的量子 场论,例如旋量量子电动力学,到最后都必须要被整合进一个渐进自由的理论中.幸运的是,对于 耦合常数的某个有限范围,一个理论是否渐进自由可以被微扰计算确定:如果 $\beta(g)$ 在 $g \to 0_+$ 是负 的,那么对于所有在零和 $\beta(g)$ 的第一个零点之间的重整化耦合常数 g_{μ} ,该理论是渐进自由的.

* * *

在这里有一件值得注意的事: 尽管 $\beta(g)$ 的详尽形式依赖于规范并精确依赖于跑动耦合的定义 方式, 但是 $\beta(g)$ 幂级数的前两项却与它们无关. 假定我们有两种跑动耦合常数的定义方式 g_{μ} 和 \tilde{g}_{μ} , 它们有可能采用的重整化标度 μ 的不同定义, 也有可能采用了不同规范. 既然 g_{μ} 和 \tilde{g}_{μ} 都是无量纲的 且与截断无关, 那么当 $\mu \gg m$ 时, \tilde{g}_{μ} 只可能依赖于 g_{μ} :

$$\tilde{g}_{\mu} = \tilde{g}(g_{\mu})$$
.

那么我们就有

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}_{\mu}) \equiv \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \tilde{g}_{\mu} = \frac{\mathrm{d}\tilde{g}(g_{\mu})}{\mathrm{d}g_{\mu}} \beta(g_{\mu})$$

因此

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \frac{\mathrm{d}\tilde{g}(g)}{\mathrm{d}g}\beta(g) \ . \tag{18.3.29}$$

只要我们坚持非重整化耦合的定义是相同的,那么所有的重整化耦合在最低阶是相等的,所以, 将*g*表示成*g*的幂级数,它可以写成

$$\tilde{g}(g) = g + a g^2 + O(g^3)$$

或者,等价的

$$g = \tilde{g} - a\,\tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3) \;.$$

导数是

$$\frac{{\rm d} \tilde{g}}{{\rm d} g} = 1 + 2\,a\,g + O(g^2) = 1 + 2\,a\,\tilde{g} + O(\tilde{g}^2) \ . \label{eq:generalized}$$

另外,对于我们在这里已经考虑过的耦合(包括 $g = e^2$), $\beta(g)$ 的幂级数应该采取形式

$$\beta(g) = b g^2 + b' g^3 + O(g^4)$$

或者, 以*ĝ*的形式

$$\beta(\tilde{g}) = b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4) .$$

那么,从方程(18.3.29)中我们就有

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \left[1 + 2a\tilde{g} + O(\tilde{g}^2)\right] \left[b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)\right] = b\tilde{g}^2 + b'\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4) .$$
(18.3.30)

我们看到, 在 β 的g幂级数展开中和 β 的g幂级数展开中, 前两项的系数是相同的. 然而, 对于高阶项 却绝不是这种情况. 事实上, 我们总可以选择函数 $\tilde{g}(g)$ 使得 $\beta(\tilde{g})$ 中所有比 \tilde{g} 的三阶项更高的高阶项 全部为零, 所以, 通过观察 $\beta(g)$ 微扰展开中的前两项, 我们就可以描述 \tilde{g}_E 在 $E \to \infty$ 时的渐进行为. 但是它的意义并不大, 这是因为为了确定g如何依赖于 \tilde{g} , 我们需要计算至所有阶, 并且如果没有这 些信息, 我们就不能用 \tilde{g} 的渐进行为讨论g的渐进行为, 或是物理量的渐进行为.

给出方程(18.3.30)的讨论同时表明, 在耦合很小时, 晶格间距远大于粒子质量的Wilson重整 化群方程与重整化标度远大于粒子质量的Gell-Mann—Low重整化群方程是相同的, 其中前者是 关于裸耦合的方程, 而裸耦合是晶格间距的函数, 后者是关于重整化耦合的方程, 而重整化耦合是 重整化标度的函数. 因此, 如果一个连续理论是渐进自由的, 那么在过渡到在晶格上量子化的该理 论的连续极限中不存在障碍.

18.4 多耦合与质量效应

直到现在,我们所考察的理论中只有一个无量纲参数g.很容易将这一形式体系拓广使其包含 多个这样的耦合 g^{ℓ} :对于每个 g^{ℓ} ,我们都有一个重整化群方程,这一方程在 $\mu \gg m$ 时的形式为

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g^{\ell}(\mu) = \beta^{\ell}(g(\mu)) , \qquad (18.4.1)$$

其中的每个 β^{ℓ} 一般会依赖所有的g. 现在, 在 $\mu \to \infty$ 时 $g^{\ell}(\mu)$ 的渐进行为有更多的可能性; 在一给定理论的g-空间中, 有些轨道会在 μ 的有限值或无限值处趋于无穷, 有些轨道会趋于不动点, 还有些轨道会趋于被称为"极限环(limit cycles)"的闭合曲线. 为了领略其中的一些性质, 我们来考察 $g^{\ell}(\mu)$ 在不动点附近的行为.

如果

$$\beta^{\ell}(g_*) = 0 , \qquad (18.4.2)$$

那么方程(18.4.1)有不动点解 $g^{\ell}(\mu) = g_*^{\ell}$. 在这一点的邻域, 方程(18.4.1)变成

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[g^{\ell}(\mu) - g_*^{\ell} \right] = \sum_k M_k^{\ell} \left[g^k(\mu) - g_*^k \right] , \qquad (18.4.3)$$

其中M是矩阵

$$M^{\ell}_{k} \equiv \left[\frac{\partial \beta^{\ell}(g)}{\partial g^{k}}\right]_{g=g_{*}} .$$
(18.4.4)

方程的解可以用该矩阵的本征矢量展开

$$g^{\ell}(\mu) = g^{\ell}_{*} + \sum_{m} c_{m} V^{\ell}_{m} \mu^{\lambda_{m}} , \qquad (18.4.5)$$

其中V_m是M本征值为λ_m的本征矢量(按任何方便的方式归一化):

$$\sum_{k} M_{k}^{\ell} V_{m}^{k} = \lambda_{m} V_{m}^{\ell} , \qquad (18.4.6)$$

cm则是一组展开系数.* (本节不使用求和约定.)

方程(18.4.5)表明, 当且仅当所有 $\lambda_m > 0$ 的本征矢的 $c_m = 0$ 时, 耦合常数才会在 $\mu \to \infty$ 时趋于不动点. (简单起见, 我们在这里假定所有本征值均不为零.)因此, 若M的负本征值个数为 N_- , 那么与不动点相连的轨道一般会处在一个 N_- 维的面上; 与这个面在 g_* 点相切的是本征值为负的本征 矢. 不在这个面上的轨道可以靠近不动点, 但最终将远离它, 而这些轨道主要朝向正本征值最大的本征矢的方向上. 当然, 如果所有的本征值是负的, 那么在不动点附加就会有一个小区域, 使得在这个区域内的所有轨道都收敛到这个点上.

在考察趋于不动点的轨道的渐进行为时,由于本征值λ_m是非常重要的,注意到这些本征值实 质上独立于耦合的定义是非常有用的. 假使我们引入一组新耦合*g*^ℓ,定义为*g*的函数. 它们满足重 整化群方程

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \tilde{g}^{\ell}(\mu) = \sum_{m} \left. \frac{\partial \tilde{g}^{\ell}(g)}{\partial g^{m}} \right|_{g=g(\mu)} \beta^{m}(g(\mu)) \equiv \tilde{\beta}^{\ell}(\tilde{g}(\mu)) ,$$

所以

$$\tilde{\beta}^{\ell}(\tilde{g}) = \sum_{m} \frac{\partial \tilde{g}^{\ell}(g)}{\partial g^{m}} \beta^{m}(g) .$$
(18.4.7)

(即, β像耦合常数空间中的矢量那样进行变换.) 对其微分, 我们有

$$\sum_{m} \frac{\partial \tilde{g}^{\ell}(g)}{\partial \tilde{g}^{m}} \frac{\partial \tilde{g}^{m}}{\partial g^{k}} = \sum_{m} \frac{\partial^{2} \tilde{g}^{\ell}}{\partial g^{m} \partial g^{k}} \beta^{m}(g) + \sum_{m} \frac{\partial \tilde{g}^{\ell}}{\partial g^{m}} \frac{\partial \beta^{m}(g)}{\partial g^{k}} \beta^{m}(g)$$

^{*}我们在这里假定 V_m 构成完备基. 虽然不总是这种情况, 但这是一种普遍情况; 对于有限维矩阵M, 如果久期方程 $Det(M - \lambda 1) = 0$ 的所有根都不相同, 那么M的本征矢构成完备基. 如果本征矢没有构成完备基, 那么这个矩阵可以 视为本征矢构成完备基的矩阵的某些本征值变成简并的极限情况.

在不动点 g_* ,右边第一项为零,所以这给出矩阵方程

$$\tilde{M}S = SM , \qquad (18.4.8)$$

其中

$$\tilde{M}^{\ell}_{\ k} \equiv \left[\frac{\partial \tilde{\beta}^{\ell}}{\partial \tilde{g}^{k}} \right]_{\tilde{g} = \tilde{g}(g_{*})} , \qquad (18.4.9)$$

$$S^{\ell}_{\ k} \equiv \left[\frac{\partial \tilde{g}^{\ell}}{\partial g^{k}}\right]_{g=g_{*}}.$$
(18.4.10)

只要变换 $g \to \tilde{g}$ 是非奇异的,方程(18.4.8)就是一个相似变换,因此M和 \tilde{M} 就会有相同的本征值 λ_m .

和可重整理论一样, 重整化群形式理论也可以扩展至不可重整理论. 正如在12.3节中所解释的 那样, 就像可重整理论那样, 不可重整理论中的无限大可以通过对耦合常数和质量合适的重整化 被消除掉; 唯一的不同是, 在不可重整理论中, 拉格朗日量必须要包含该理论对称性所允许的所有 可能的相互作用. 如果 g_B^ℓ 是拉格朗日量中与量纲为 D_ℓ 的算符(即, 场与场的时空导数的乘积, 且它 的量纲按质量或能量的幂次计是 D_ℓ)相乘的未重整耦合常数, 那么 g_B^ℓ 的量纲则是 $\Delta_\ell = 4 - D_\ell$. 这 样, 我们可以用一组无量纲的耦合 $g^\ell(\mu)$ 和一个截断 Λ 重新表示这个裸耦合, 它们之间关系的一般 形式为

$$g_{B}^{\ell} \equiv \mu^{\Delta_{\ell}} \left[g^{\ell}(\mu) + \sum_{k,m} b^{\ell}_{km} g^{k}(\mu) g^{m}(\mu) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g(\mu)^{3}) \right] , \qquad (18.4.11)$$

其中b^ℓ_{km}是无量纲的数值系数, 在高阶项中有类似的系数, 对它们的选择要抵消掉物理量的截断相关性. (在某些理论中, 领头项可能是耦合的三线性项甚至还要更高; 这时所需要的修正是显然的.) 从g_B与截断无关这个要求中, 我们可以获得重整化群方程, 其中

$$\beta^{\ell}(g) = -\Delta_{\ell}g^{\ell} - \sum_{k,m} b^{\ell}_{km}g^{k}g^{m} + O(g^{3}) . \qquad (18.4.12)$$

不可重整的相互作用是那些 $D_{\ell} > 4或\Delta_{\ell} < 0$ 的相互作用,所以只有所有的 g^{ℓ} 都保持足够小,我们可以预期对于不可重整耦合将有正的 β^{ℓ} ,因此它们会随着 μ 增长,但是当耦合变得足够大以至于微扰论无效时,没有人知道这时会发生什么.

然而,正如我们将要在下一节所解释的那样,即使是有无限多个独立参量的理论,在矩阵(18.4.6)的负本征值个数 N_{-} 有限的地方,它通常会有不动点 g_{*} ,就好像它在零耦合处.(特别地,通常的情况是 $N_{-} = 1$.) 当 $N_{-} \neq 0$ 时,不动点处在一个 N_{-} 维的曲面上,这一曲面由 $\mu \to \infty$ 时与这一不动点相连的轨道组成.若一个不可重整理论的耦合参量处在这样的临界曲面上,尽管不一定是渐进自由的,但由于重整化耦合对于比较大的 μ 值保持有限,它被称作渐进安全的.^[5]在这种理论中,渐进安全的条件将起到联系可重整性原理的作用,即,除了有限个自由参量外,所有参量都被消除掉了,而那有限个参量即是临界面的坐标.

在可重整理论中,通过调整有限个裸耦合的截断相关性,我们可以使得所有的物理量独立于 截断.这些裸耦合可以表示成相同数目个与μ相关的重整化耦合,而裸耦合与μ无关这个条件会给 出仅与这些重整化耦合相关的重整化群方程.从一个广泛的观点来看,假定我们既允许可重整耦 合又允许不可重整耦合,那么对于所有可重整理论和不可重整理论所构成的无限维空间而言,一 个可重整理论就对应于其中一个有限维的不变曲面;即,该曲面上任意一点*g*的β^ℓ(*g*)与该曲面相切于这一点.

迄今为止,我们在这一节默认假定 $\mu \gg m$,这使得我们可以忽略 β^{ℓ} 对 m/μ 的依赖性.然而,这不是必须的;只要我们愿意,我们就可以把质量当成另一个耦合参量进行处理.^[6]即,像之前一样,所有的重整化耦合都可以用 μ 阶不在壳动量处的Green函数定义,只不过这时Green函数中的裸质量取零值.Dirac场 ψ 或标量场 ϕ 的无量纲参量可以定义为

$$m_{\psi}(\mu) \equiv N^{(\psi\psi)} (\Lambda/\mu)^{-1} m_{\psi,\text{BARE}}(\Lambda)/\mu , \qquad (18.4.13)$$

$$m_{\phi}^2(\mu) \equiv N^{(\phi^2)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\phi,\text{BARE}}^2(\Lambda)/\mu^2 ,$$
 (18.4.14)

其中N^(O)(Λ/μ)是无量纲参量,当其被乘进相应算符O的矩阵元中时,它会抵消掉这些算符矩阵元 中的无限大,并且在计算它时裸质量也取零(参看18.1节.)这些新的重整化耦合和重整化质量没有 直接的物理含义,但是真实的物理质量以及所有的物理矩阵元都可以表示成它们.这些矩阵元所 采取的形式为,在裸质量为零的矩阵元中插入了任意个重整化质量算符N^(φ²)φ²和N^(ψψ)ψψ, 然后 乘以相应的重整化质量参量,最后求和.

在这一重整化方案中,各种耦合的β-函数显然与质量无关,并且质量参量的β-函数正比于这 些参量,其中的系数则依赖于所有耦合;利用方程(18.2.25),我们有

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} m_{\psi}(\mu) = \left[-1 - \gamma_{\bar{\psi}\psi}(g_{\mu}) \right] m_{\psi}(\mu) , \qquad (18.4.15)$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} m_{\phi}^2(\mu) = \left[-2 - \gamma_{\phi^2}(g_{\mu})\right] m_{\phi}^2(\mu) \ . \tag{18.4.16}$$

例如,我们在18.2节注意到,在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中,质量算符 ϕ^2 在m = 0时有反常量纲(18.2.29),所以这里有

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} m_{\phi}^2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_{\mu}}{16\pi^2} + O(g_{\mu}^2) \right] m_{\phi}^2(\mu) . \qquad (18.4.17)$$

另外,方程(11.4.3)表明,对电子传播子的高阶修正相当于将电子质量替换成 $m_e - \Sigma^*(p, m_e)$,所以对于算符 $\bar{\psi}_e \psi_e \epsilon 4$ -动量为 p^μ 的单电子态之间的矩阵元而言,这个修正的效果就是给它们乘以因子

$$F(p) = 1 - \left(\frac{\partial \Sigma^*(p, m_e)}{\partial m_e}\right)_{m_e = 0}$$

因此, 算符 $\bar{\psi}_e\psi_e$ 的重整化常数 $N^{\bar{\psi}\psi}$ 就等于 $F^{-1}(p)$, 且它所在的p点满足 p^2 等于某个重整化标度, 例 如+ μ^2 . 根据方程(11.4.8), 到一圈阶, 这是

$$N^{(\bar{\psi}\psi)} = 1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{1 \text{ loop}}^{*}(p, m_{e})}{\partial m_{e}}\right)_{m_{e}=0, p^{2}=\mu^{2}}$$
$$= 1 - \frac{4\pi^{2}}{(2\pi)^{4}} \int_{0}^{1} dx \ln\left[1 + \left(\frac{\Lambda^{2}}{\mu^{2}}\right)(1-x)\right]$$
$$\to 1 - \frac{e^{2}}{4\pi^{2}} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^{2}}{\mu^{2}}\right) - 1\right] , \qquad (18.4.18)$$

其中 Λ 是紫外截断,^{**}并且我们取了 $\Lambda \gg \mu$ 的极限.因此,方程(18.2.25)所给出的算符 $\bar{\psi}_e \psi_e$ 的反常量纲是

$$\gamma^{(\bar{\psi}\psi)} = \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln N^{(\bar{\psi}\psi)} = \frac{e_{\mu}^2}{2\pi^2} + O(e_{\mu}^4) , \qquad (18.4.19)$$

所以, 方程(18.4.15)在这里变成

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} m_e(\mu) = \left[-1 - \frac{e_{\mu}^2}{2\pi^2} + O(e_{\mu}^4) \right] m_e(\mu) . \qquad (18.4.20)$$

对于一般的规范理论有相同的公式,只不过这时 e^2 要换成所考察问题中特定种类费米子的 $\sum_{\alpha} (t_{\alpha})^2$.

与理论的其它重整化参量相比, $m(\mu)$ 与它们的重要差别显然是裸质量的量纲为正, 所以, 只要 耦合保持一个很小的值, $m(\mu)$ 在量级上总是减少的. 如果 $m(\mu)$ 确实在 $\mu \to \infty$ 时为零, 那么我们之 前假定质量在 $\mu \to \infty$ 时可以忽略掉就是合理的. 然而, 唯一已知的是, 在渐进自由理论中才是这 种情况, 在这种理论中所有耦合在 $\mu \to \infty$ 时会保持一个很小的值; 在所有其它情况中, 这一假定只 是有根据的推测.

18.5 临界现象*

对于某些情况,我们感兴趣的可能是能量或波数非常低的极限而不是非常高的极限.我们可 以重复18.2节的讨论来研究这一极限,不过这里我们必须检查 $\mu \rightarrow 0$ 的情况而不是 $\mu \rightarrow \infty$ 的情况. 如果这一理论中没有质量,例如在手征变换 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 下有对称性的量子电动力学,这个手征变换 的对称性会禁止电子的质量,那么这时这一极限显然是最简单的.在这一特殊情况下,对于足够小 的耦合,唯一的可重整耦合 $eA^{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ 以及所有的不可重整耦合都有 $\beta^{\ell} > 0$,所以,至少在原点附近 的一个有限区域内,所有的轨道在 $\mu \rightarrow 0$ 时趋于点 $g^{\ell} = 0$.

即使对于质量不为零的理论,若理论中的质量非常小并且我们将这些质量计入理论的耦合参量中,就像上一节所描述的那样,那么同样可以对这一理论进行相同的讨论.方程(18.4.12)中的系数 Δ 对于质量参量是正的,所以这一情况下的轨道无法达到g = 0这一点,但是,如果质量非常小,它们可能会闭合.

当然,即便我们可以认为某些自由度质量为零或者非常小,例如电子场,但是在真实世界中存 在着许多质量不小的自由度.重整化群的正确运用针对的不是包含所有重自由度的真实理论,而 是"有效理论",在这种理论中,明显出现的仅是无质量或者近无质量的自由度,以及将重粒子内线 的效应包含在内的相互作用.(在第19章,我们会对有效场论进行进一步讨论.)

在临界现象的研究中,例如对二阶相变(一种光滑的相变,没有潜热)点或其附近的长程关联的研究,这时低波数极限是尤其有趣的.因为我们感兴趣的是 $\mu \rightarrow 0$ 的极限,矩阵(18.4.4)的本征矢中重要的是那些本征值 $\lambda < 0$ 的本征矢,它们被称为相关的.而本征值 $\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的本征矢分别被称作临界的和不相关的.

假定存在一个非平庸的固定点 g_* ,且它的本征值中只有一个为负,记为 λ_0 ,该本征值可能近似 对应于一个质量算符.这样,与这一固定点相连的轨道集 $g^\ell(\mu)$ 在 $\mu \to 0$ 时会构成余维数为1的临界

^{**}这里记号与方程(11.4.8)的记号不同,在那里紫外截断记成了µ.

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

面;即,由耦合上的一个条件所定义的曲面,该条件是: 当 $g \to g_*$ 时,切线 $g^\ell - g_*^\ell$ 在本征值为负的本征矢方向上没有分量. 当耦合在任一标度上的物理值趋于这一曲面时,就会有相变.由于临界面的余维数为1,通过调整耦合所依赖的任何一个参量,例如压强或温度,我们就可以达到相变.有一大类物质确实拥有这样的相变,正如上一节已经讨论过的,这一事实表明对于只有一个本征值为负的矩阵(18.4.4),遇到不动点是非常普遍的.

确切些, 当温度T趋于它的临界值 T_c 时, 我们期望方程(18.4.5)中增长项的系数 c_0 正比于 $T - T_c$, 这是因为没有什么原因使它奇异或使它趋于零的速度更快.因此, 对于 $\mu \to 0$ 以及随之的 $T \to T_c$, 耦合趋于

$$g^{\ell}(\mu) \to (T - T_c) V_0^{\ell} \mu^{\lambda_0} ,$$
 (18.5.1)

其中 $\lambda_0 \ge g_*$ 处唯一为负的本征值, 而 V_0^{ℓ} 是相应的本征矢.^{**} 对波数而非能量应用我们的重整化群 讨论, 在一个小的特征波数标度 κ 处, *N*-点函数(有效作用量对场 ϕ 的*N*阶导数, 其中 ϕ 的量纲是[波数]^{D_{ϕ}})采取形式[†]

$$\Gamma_N(\kappa) \to \kappa^{d-N(D_\phi + \gamma_\phi(g_*))} F_N((T - T_c)\kappa^{\lambda_0}) , \qquad (18.5.2)$$

其中 $\gamma_{\phi}(g)$ 是场 ϕ 的反常量纲,而d是时空维数,或者是经典统计力学中的空间维数.将其改写成如下的等价形式将是方便的

$$\Gamma_N(\kappa) \to (T - T_c)^{-[d - N(D_\phi + \gamma_\phi(g_*))]/\lambda_0} G_N(\kappa (T - T_0)^{1/\lambda_0}) .$$
(18.5.3)

这说明了一件事: 当T在Tc附近时, 随着T的增长, 关联长度ξ的增长方式为

$$\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}$$
, (18.5.4)

其中ν习惯上定义成正"临界指数",由方程(18.5.3)给定,

$$\nu = -1/\lambda_0 \ . \tag{18.5.5}$$

另外,由于零场有效作用量 Γ_0 (或者统计力学中的自由能)对应没有外线的图,它必须与 κ 无关.由此得出,在 $T \rightarrow T_c$ 时,方程(18.5.3)在这里变成:

$$\Gamma_0 - F_0 \propto (T - T_c)^{\nu d}$$
, (18.5.6)

其中常数 F_0 是积掉重自由度给出的有效作用量或自由能.因此,在 $T \rightarrow T_c$ 时,自由能中对温度不解析的那部分也由 ν 控制.

在1972年, Wilson和Fisher^[7]用d - 4的幂级数展开证明了单个标量场的理论满足上面的描述,并且他们还进行了临界指数的近似计算,例如 ν 的计算.考察只有一个"轻"自由度的理论,即单个标量场 ϕ 的理论,例如铁磁体中的磁化强度,并且该理论含有 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性,这排除了 ϕ 的奇次相互作用.除了"质量"项 $-g_2\phi^2/2$ 外,有效场论的拉格朗日密度还会有相互作用 $-g_4\phi^4/4!$, $-g_6\phi^6/6!$ 等.场 ϕ 的量纲按波数的幂次计是 $(d-2)/2(这使得\int d^d x (\nabla \phi)^2$ 是无量纲的),所以耦合 g_2, g_4 等的量纲在d维中是+2, 4 - d, 6 - 2d,等等.对于三维中零耦合处的不动点,

^{**}对耦合的其它贡献将趋于 $(T - T_0)^0 \mu^{\lambda_1}$,其中 $\lambda_1 > 0$.因此,若假定 $T - T_0$ 趋于零的速度没有 $\mu^{\lambda_1 - \lambda_0}$ 那么快,方程(18.5.1)在这里就是成立的.

[†]函数 F_N 也依赖于无量纲角和波数比值. 注意到, 由于 $\delta^d(\sum \kappa)$ Г必须是无量纲的, 所以 Γ_N 有一个"天然"的量 纲 $d - ND_{\phi}$.

存在两个相关耦合, $g_2 和 g_4$, 但是非平庸不动点处的相互作用改变了这一结论. 我们在仅 $g_2 \pi g_4$ 非零的耦合常数空间中检查这一曲面, 并要求 g_4 取一个很小的值.^{††} 方程(18.2.12)对于d = 4给 出 $\beta(g_4) = 3g_4^2/16\pi^2 + O(g_4^3)$, 而方程(18.4.12)告诉我们, 对于 $d = 4 - \epsilon$ 维, 我们还必须增加一 项- ϵg_4 , 所以

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_4(\mu) = -\epsilon \, g_4(\mu) + \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^3(\mu)) \,. \tag{18.5.7}$$

另外, 方程(18.4.17)给出

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_4(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^2(\mu)) \right] g_2(\mu) \ . \tag{18.5.8}$$

因此,对于较小的 ϵ 存在不动点

$$g_{4*} = \frac{16\pi^2 \epsilon}{3} , \qquad g_{2*} = 0 .$$
 (18.5.9)

矩阵(18.4.4)处在这一不动点时是对角的,它的本征值是

$$\lambda_4 = M_4^4 = -\epsilon + \frac{3g_{4*}}{8\pi^2} + O(g_{4*}^2) = +\epsilon + O(\epsilon^2) , \qquad (18.5.10)$$

$$\lambda_2 = M_2^2 = -2 + \frac{g_{4*}}{16\pi^2} + O(g_{4*}^2) = -2 + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2) . \qquad (18.5.11)$$

从方程(18.5.10)中我们看到, 耦合g4实际上是不相关的, 这使得这里只有一个相关耦合, 标志着二阶相变的出现. 从方程(18.5.11)中我们看到反常指数(18.5.5)是

$$\nu = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) . \qquad (18.5.12)$$

对于物理值 $\epsilon = 1$,前两项给出 $\nu \simeq 0.58$. 三圈计算^[8a]给出了到 ϵ^3 阶的临界指数

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} - 0.01904\epsilon^3 , \qquad (18.5.13)$$

这一结果对于 $\epsilon = 1$ 给出 $\nu = 0.61$.

在这里所呈现的计算中,对于所研究的系统,我们只假定了它有二阶相变,且在此附近唯一的 长波长自由度是一个标量场,除此之外,我们并没有假定任何事情.有很多其它系统也满足这个描述,例如在铁磁材料和反铁磁材料中自发出现的磁化强度(这里由 ϕ 表示),以及二元流体中气体和 液体之间的二阶相变.因此,我们会期望所有这些系统有相同的 ν 值.这被实验证实了,实验给出 的值^[8]是 $\nu = 0.63 \pm 0.04$,与三圈结果(18.5.13)符合得相当好,即便是单圈结果(18.5.12),也基本吻 合.尽管有些不可思议,但是1的幂级数展开竟有如此威力是十分幸运的.

更一般地,若系统在它们的二阶相变附近由一组相同的长波长自由度描述,则称它们属于同一个普适类(universality class).对于给定普适类中的所有系统,所有的临界面都是相同的.

^{††}在3 $\leq d \leq 4$ 时,它们是唯一的可重整耦合,所以,对于这样的*d*,这是一个不变曲面.注意到,我们并没有 将($\nabla \phi$)²的系数纳入到耦合中,这是因为,按照7.7节所描述的观点看,这是一个冗余耦合.

18.6 最小减除

在11.2节,我们看到维度正规化为量子电动力学中的辐射修正计算提供了特别方便的方法,这 主要是因为它保护了与规范不变性相联系的守恒律.由于相同的原因,维度正规化也为一般规范 理论中重整化群的滑动标度提供了另一种非常方便的定义.^[9]

在使用维度正规化的计算中,当时空维度d趋于它的物理值时,紫外发散就会作为物理振幅中的极点出现. (例子可参看(11.2.13).)为了抵消这些极点,裸耦合常数 $g_B^\ell(d)$ (包括质量)自身也必须有这样的极点,而在 $d \rightarrow 4$ 时物理振幅是正则的这一条件确定了极点的留数. 这些裸耦合一般会有不为零的量纲 $\Delta_\ell(d)$, $\Delta_\ell(d)$ 依赖于时空维度d,所以考察无量纲量 $g_B^\ell(d)\mu^{-\Delta_\ell(d)}$ 是比较方便的,这里的 μ 是量纲为能量或质量的滑动标度. 这一重新标度的裸耦合可以表示为正比于1/(d - 4)的 ν 次方的项的和,其中 ν 是正定的,物理振幅在 $d \rightarrow 4$ 时的极点被抵消这一要求则确定了系数 b_ν ,还有一些残余项,它们在d = 4时关于d解析. 这一残余项被认定为无量纲重整化耦合常数 $g^\ell(\mu, d)$,所以

$$g_B^{\ell}(d)\mu^{-\Delta_{\ell}(d)} = g^{\ell}(\mu, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_{\nu}^{\ell}(g(\mu, d)) .$$
(18.6.1)

只要物理振幅在d = 4处的奇点被抵消了,我们就可以让裸耦合以任意的方式依赖于d;通过要 求 $g^{\ell}(\mu, d)$ 不仅在d = 4时对d解析,并且对于所有的d都解析,我们可以移除这一不确定性.

为了计算g^ℓ(µ,d)所满足的重整化群方程,首先做方程(18.6.1)对µ的导数:

$$-\Delta_{\ell}(d)\left[g^{\ell} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_{\nu}^{\ell}(g)\right] = \beta^{\ell}(g,d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{m} b_{\nu m}^{\ell}(g)\beta^{m}(g,d)(d-4)^{-\nu}$$
(18.6.2)

其中

$$b_{\nu m}^{\ell}(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_{\nu}^{\ell}(g) \tag{18.6.3}$$

并且,像之前一样,

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g^{\ell}(\mu, d) = \beta^{\ell}(g(\mu, d), d) .$$
(18.6.4)

注意到 β^{ℓ} 是所有 $g^{m}(\mu, d)$ 以及d的函数,但由于重新标度的质量也被纳入到无量纲的耦合参量中, 这样除了 μ 以外就没有别的带有量纲的参量,所以 β^{ℓ} 不能仅靠自身依赖于 μ .

我们已经看到, 量纲 $\Delta_{\ell}(d)$ 总是d的线性函数, 所以我们现在将其写成

$$\Delta_{\ell}(d) = \Delta_{\ell} + \rho_{\ell}(d-4) .$$
(18.6.5)

我们将方程(18.6.2)的左边重写成

$$-\rho_{\ell}g^{\ell}(d-4) - \left[\Delta_{\ell}g^{\ell} + b_{1}^{\ell}(g)\rho^{\ell}\right] - \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} \left[\rho_{\ell}b_{\nu+1}^{\ell}(g) + \Delta_{\ell}b_{\nu}^{\ell}(g)\right] \;.$$

这时,解析部分中*d*的最高幂次是一阶的,所以对于方程(18.6.2)的右边也必须同样如此,因 此β(*g*,*d*)关于*d*必必须是线性的:

$$\beta^{\ell}(g,d) = \beta^{\ell}(g) + (d-4)\alpha^{\ell}(g) .$$
(18.6.6)

那么, 方程(18.6.2)两边零阶项和一阶项相等就给出

$$\alpha^{\ell}(g) = -\rho_{\ell} g^{\ell} \tag{18.6.7}$$

以及更加重要的

$$\beta^{\ell}(g) = -\Delta_{\ell}g^{\ell} - b_{1}^{\ell}(g)\rho_{\ell} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{m}b_{1m}^{\ell}(g)\rho_{m}g^{m}. \qquad (18.6.8)$$

值得注意的是β函数只依赖裸耦合中单极点的系数.事实上,这些系数也决定了所有高阶极点的系数;将方程(18.6.2)两边的极点项等同起来就给出了递推关系

$$\rho_{\ell}b^{\ell}_{\nu+1}(g) - \sum_{m} \rho_{m}g^{m}b^{\ell}_{\nu+1m}(g) = -\Delta_{\ell}b^{\ell}_{\nu}(g) - \sum_{m} b^{\ell}_{\nu m}(g)\beta^{m}(g) .$$
(18.6.9)

例如,为了使 $\int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 是无量纲的,任意规范场 A^{μ} 必须有量纲(按质量幂次计)(d-2)/2, 而既然 $g_B A^{\mu}$ 必须要有与 $\partial/\partial x^{\mu}$ 相同的量纲,那么 g_B 必须要有量纲(4-d)/2,这使得对于规范耦合 有 $\Delta = 0$ 和 $\rho = -1/2$.那么,对于仅有一个耦合常数的规范理论,方程(18.6.8)给出:

$$\beta(g) = \frac{1}{2} [b_1(g) - gb'_1(g)] . \qquad (18.6.10)$$

特别地, 方程(11.2.20)表明, 在量子电动力学中, 到一圈阶, 裸电荷在d → 4处有极点, 确切些

$$e_B = Z_3^{-1/2} e \to e - \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{d-4}$$
 (18.6.11)

那么,在方程(18.6.10)中令 $b_1(e) = -e^3/12\pi^2$ 就会给出

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} , \qquad (18.6.12)$$

这与之前的结果(18.2.37)一致.

这一节所引入的耦合常数 $g^{\ell}(\mu)$ 被称作是通过最小剪除定义的. 这与另一个更加方便的方案 稍有不同. 单极点 $(d-4)^{-1}$ 一般来自于函数 $(4\pi)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)(就像方程(11.2.13)$ 中那样), 它对 于 $d \rightarrow 4$ 有极限

$$(4\pi)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \to \frac{1}{2-d/2} - \gamma + \ln 4\pi ,$$
 (18.6.13)

其中 γ 是欧拉常数, $\gamma = 0.5772157.^{\circ}$ 因此, 在方程(18.6.1)中的所有地方做如下的替换将是方便的:

$$\frac{1}{d-4} \to \frac{1}{d-4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln 4\pi .$$
 (18.6.14)

有了这一处理,就称这一耦合常数是通过修正最小减除定义的.

通过最小减除所定义的耦合的显著特征之一是,既然在任何计算中连一个紫外截断的因子都 没有出现过,圈图在*d* = 4处所拥有的极点仅对应于对数紫外发散,而非线性发散,二次发散等.因

^e欧拉常数的定义是:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

到现在为止还无法证明它是有理数还是无理数. ——译者注

此,要使留数函数 $b_1^\ell(g)$ 能够包含阶为 $g^a g^b g^c \cdots$ 的项, $g_B^\ell \overline{c} d = 4$ 处的量纲要等于耦合 g_B^a, g_B^b, g_B^c 等的总量纲:

$$\Delta_{\ell} = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \cdots , \qquad (18.6.15)$$

并且,从(18.6.8)可以得出这对于 $\beta^{\ell}(g)$ 同样成立.特别地,在没有超重整耦合的理论中(像含有无质量旋量且不含标量的规范理论,例如电子质量为零的量子电动力学),所有耦合都有 $\Delta_{\ell} \leq 0$,所以出现任何不可重整相互作用都不会影响可重整耦合($\Delta_{\ell} = 0$)的重整化群方程.^[5]另外,在这样的理论中,不可重整耦合的 β -函数是不可重整耦合的有限阶多项式,而每个多项式中的每个系数都由可重整耦合的一个无穷幂级数给定.例如,在光子和无质量电子的理论中(假定了 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 以及P下的不变性),不存在量纲为+5的不可重整相互作用,但有几个量纲为+6的相互作用(四费米子相互作用以及纯光子相互作用 $F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}$),这些相互作用有量纲为–2的耦合常数 f_i . f_i 的 β -函数形式为 $\sum_i b_{ij}(e)f_j$,而其中的系数 $b_{ij}(e)$ 由e的幂级数给定.

18.7 量子色动力学

量子色动力学是强相互作用的现代理论. 它是基于规范群SU(3)的非阿贝尔规范理论. 除了规范场外,量子色动力学还包含自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的场,这些粒子被称作夸克. 有六种或者说六"味"夸克, u夸克, c夸克和t夸克的电荷为2e/3,而d夸克, s夸克和b夸克的电荷为-e/3. 每一味夸克都拥有三种"颜色",而这些色构成了SU(3)规范群的定义表示3.*像质子和中子这样的重子可以近似的看成三个夸克的色中性束缚态,它们关于夸克的色全反对称,而像 ρ 介子这样的介子,它的行为可以近似为夸克和反夸克的色中性束缚态.^[11]

若夸克质量与感兴趣的能量区域相比可以忽略,那么在这一近似下,方程(17.5.44)的逆方程表明,一般规范理论中的裸耦合会在时空维度*d* → 4时有一个极点,而其留数给定为

$$g_B \to \left[\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5)\right] \frac{1}{d-4} ,$$

其中C₁和C₂由方程(17.5.33)和(17.5.34)定义.而按照上一节的记法,

$$b_1(g) = \frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5) .$$
(18.7.1)

在方程(18.6.10)中使用这一结果给出

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5) . \qquad (18.7.2)$$

对于SU(3)理论,若它有 n_f 个无质量夸克,且这些夸克处在SU(3)的定义表示**3**下,那么方程(17.5.35) 就会给出

$$C_1 = 3$$
, $C_2 = n_f/2$. (18.7.3)

由于我们在这里将夸克取成了无质量的粒子,这一理论可能仅适用于有效场论,而有效场论是通 过积掉所有比特征能量E重的夸克获得的,这使得n_f就是质量远小于E的夸克味的数目.在这一理

^{*}在量子色动力学的最终形式确定下来之前,就有数位学者推测出每一味夸克或许有三种,^[10]这一方面是为了解释 $(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma z k)$ 这一方面是为了引入额外的自由度,使得可以解释重子中费米型夸克的波函数在自旋,坐标和味空间中为什么能够是对称的.

解下, 方程(18.7.2)和(18.7.3)给出

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f\right) + O(g^5) . \qquad (18.7.4)$$

我们看到,只要质量小于感兴趣的能量标度的夸克不超过16味,那么这一理论就是渐进自由的.由于实际中任何质量的夸克只有六味,基于规范群*SU*(3)的强相互作用理论就是渐进自由的.

这种非阿贝尔规范理论中的渐进自由是由Gross, Wilczek^[12]和Politzer^[13]在1973年发现的, 这 使得理论物理学家相信这一理论就是正确的强相互作用理论. 它们的计算立即就解释了1968年 在SLAC上一个著名且令人迷惑的实验结果,^[14] 深度非弹性的电子-核子散射, 这表明强相互作用 在高能处反而表现的更弱.^{**} (这一实验将在20.6节进行进一步讨论.) 然而, 在Yang-Mills理论中发 现渐进自由的历史意义不仅在于它解释了旧有的实验结果; 至少是在高能情况下, 它还第一次展 示了对强相互作用做可信赖微扰计算的前景.

不久之后就发现渐进自由还有另一个重要的作用.起初,在发现渐进自由之后,广泛假定在强相互作用的真实Yang-Mills理论中规范玻色子非常重,这用来解释为什么在此之前一直没有发现这些强相互作用玻色子.跟随弱相互作用和电磁相互作用的先例(将在第21章进行讨论),大家认为规范玻色子的质量应该来自于色SU(3)规范群的自发破缺,由该群非平庸表示下标量场的真空期望值引发.但这些强相互作用的标量将会给β(g)贡献正项,这会毁掉渐进自由.更糟的是,若一个理论含有强相互作用的标量场,包含弱相互作用的辐射修正将会对各种对称性造成极大的破坏,比如荷共轭不变性和味守恒,但是,正如我们将看到的,如果没有标量,它们就不会被破坏.^[17]由此认为应该扔掉强相互作用标量,并接受这样做所带来的结果,SU(3)规范玻色子,即胶子,没有质量.^[18]强耦合常数在高能或短程处衰减暗示着在低能或长程时增加,由此可以认为这或许解释了为什么无质量胶子和夸克为什么没有被观测到.根据这一假设,只有像重子和介子这样的色中性粒子才能独立出现.^[19]不幸的是,这依旧是个假设而不是定理,但是,二十年之后,对于它是正确这一点似乎已没有疑问.

即使夸克无法实现为自由粒子,它们在某种程度上可以视为在高能碰撞过程中产生的喷注.例如,在电子-正电子湮灭的很多事件中,末态由两个狭窄的平行强子喷注组成,它们所成的分布为1 + sin² θ ,其中 θ 是(质心系下)对撞轻子动量与喷注方向所呈的角度,这正是电子-正电子湮灭到夸克-反夸克末态的树图所预期的.^[20]可利用13.4节中对红外发散的一般分析理解^[21]这些.在极高能下,假定物理过程"红外安全"的,即当所有质量趋于零时不会红外发散,那么我们将预期物理过程的速率有最低阶微扰论给出.在我们对所有的强子末态求和后,电子-正电子湮灭到强子的总速率是红外安全的.(这里我们忽视了高阶电磁效应.)因此我们可以使用微扰论,而微扰论会立即告诉我们这一速率与 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 的速率比值 $R \ge 3 \sum_q Q_q^2$,其中的求和取遍所有的夸克味,而 Q_q 是这些夸克以e为单位的电荷量,因子3是色的数目.(例如,在 $m_b \approx 4.5 \text{GeV到} m_t \approx 180 \text{GeV这个宽广的能量范围内}, R \simeq 3(2(2/3)^2 + 3(-1/3)^2) = 11/3.)另一方面,电子-正电子湮灭成确定的夸克和胶子态不是红外安全的,因此它的速率完全无法用微扰论计算;事实上,它是零.在这个极端之间是电子-正电子湮灭到数量确定的喷注的速率,每个喷注$

^{**}Zee^[15],可能还有一些理论家,在此之前就知道若有一个理论它的 β -函数对于小的正定耦合为负,那么这一实验结果就可以在这一理论下被理解,但除了非阿贝尔规范理论以外,在其它所有可重整理论中对 $\beta(g)$ 的计算均给出 $\beta(g) > 0$.另一方面,'t Hooft在1972年就发展出了在Yang-Mills理论中计算 β -函数的技巧,并且同年在马赛关于规范理论的一个会议上,^[16]他宣称 $\beta(g) < 0$,但他在等待他的文章被发表并解出它的隐含意义,在此期间,他忙于其它事,所以他的结果并没有引起太多的注意.

携带确定的总动量以及电荷, 在喷注之外还有一些未观测到的强子, 它们带有有限的总能量. 正 如13.4节所讨论的, 这一速率时红外安全的. 因此在高能时, 将喷注(在微扰论的树阶)等同为出射的夸克, 反夸克和胶子, 就可以用微扰论的树阶近似进行计算. 我们甚至可以计算3-喷注事件的速率, 在产生这一事件的树图中, 胶子从出射的夸克或反夸克中发射, 并用这一结果与实验结果相比较进而测量 $\alpha_s(\mu)$ 的值.^[22] 但是对于喷注内的动量分布, 由于这种微分速率不是红外安全的, 我们无法用微扰论进行预测. 类似结果适用于深度非弹轻子-强子碰撞中喷注的产生, 这将在20.6节进行讨论, 但是在初态中出现强子使得分析更加复杂.

沿用12.5节中的论证, 当没有标量场时, 最一般的可重整量子色动力学拉格朗日量可以变成如 下的形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_{\alpha} F_{\alpha\mu\nu} - \sum_{n} \overline{\psi}_{n} [\partial - ig \mathcal{A}_{\alpha} t_{\alpha} + m_{n}] \psi_{n} , \qquad (18.7.5)$$

其中 A_{α}^{\prime} 是色规范矢势; $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ 是色规范协变场强张量; g是强耦合常数; t_{α} 是色SU(3)在3表示下的一组完备生成元, t_{α} 的归一化使得 $Tr(t_{\alpha}t_{\beta}) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$; 而下标n标记的是夸克味, 夸克色指标隐去不写. 正如在12.5节针对电动力学所发现的, 这一拉格朗日量有一个重要的偶然对称性: 它有空间字称 守恒[†], 荷共轭字称守恒, 以及每一味的夸克数(夸克的数目减去相应的反夸克的数目), 其中包括历 史长久的"奇异"量子数, 即对"s"夸克的计数.因此量子色动力学立即解释了这样的奇怪事实: 强 相互作用表现出的对称性中有几个不是全部相互作用的对称性.同时, 正如前面所提及的, 这一讨 论也解释清楚了为什么在这一理论中弱相互作用没有造成对字称, 荷共轭, 奇异数等的大范围破 坏. 既然夸克和胶子之间所有可重整的相互作用都保留这些对称性, 当能量E远小于携带弱作用的 粒子的质量 m_W 时, 弄够破坏这些对称性的只有有效场论中的不可重整相互作用, 例如 $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ 相互 作用, 而正如12.3节所讨论的, 这些相互作用将会被 m_W 以及弱相互作用耦合常数的负幂次方压低.

当然,在某个远大于表征量子色动力学的标度 Λ 的能量标度 Λ' 处,夸克和胶子完全有可能呈现 出某种新的强相互作用.例如,像22.5节将要讨论的那样,夸克可能是更加基本的费米子的束缚态, 与其相互作用的规范场的渐进自由耦合在 Λ' 阶能量处变得很强,使这些费米子陷入到夸克中.在 这种情况下,夸克的有效拉格朗日密度在能量 $E \ll \Lambda'$ 将会包含不可重整的相互作用,例如 $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, 这样的相互作用仅被 E/Λ' 的次方压低.这些相互作用不仅会在对宇称或夸克味守恒在普通能量处 的小破坏中体现出来,当能量接近于 Λ' 时,它们还会破坏^[23]量子色动力学的定量预测.

现在我们来考察量子色动力学耦合常数更加细致的行为.在最低阶,重整化群方程 由(18.7.4)给定为

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f\right) \ . \tag{18.7.6}$$

它的解是

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\ln(\mu^2/\Lambda^2)} , \qquad (18.7.7)$$

其中Λ是积分常数.这一公式呈现出了无质量粒子(或者,对于夸克这样的近无质量粒子)理论的 特征:在这样的理论中,拉格朗日量中的某个无量纲耦合会被替换成一个自由的有量纲参量.方 程(18.7.7)中不包含自由的无量纲参量,但它却包含一个带有质量量纲的自由参量,积分常数Λ.

[†]尽管在1973年还不知道,但是非微扰效应可以破坏量子色动力学中的宇称,我们将在23.6节看到这一点.已经提出 了几种避免宇称破坏的方法,但是还不清楚那一个是正确的.

这些计算已经做到了三圈阶. 到这一阶的重整化群方程是[24]

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = -\beta_0 \frac{g^3(\mu)}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5(\mu)}{128\pi^4} - \beta_2 \frac{g^7(\mu)}{8192\pi^6} , \qquad (18.7.8)$$

其中 β_n 是数值系数:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f , \qquad (18.7.9)$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3} n_f , \qquad (18.7.10)$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f - \frac{325}{27}n_f^2 . \qquad (18.7.11)$$

解是

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &\equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} \\ &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right. \\ &+ \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} \left(\left(\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)] - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{8\beta_2\beta_0}{\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right] . \end{aligned}$$
(18.7.12)

前面结果中的 n_f 是质量小于所感兴趣能量的夸克味的数目.在两个连续夸克质量之间的能量范围内, n_f 和Λ是相同的,但对于每一个这样的能量范围,我们有不同的 n_f 值和Λ值,我们要对其选择使得 $g(\mu)$ 在每个夸克质量处连续.特别地,关于电子的深度非弹散射实验,它一般所涉及的能量在前4个夸克味(u,d,s和c)之上,所以这里我们必须取 $n_f = 4$.另一方面,在电子-正电子对撞机上的实验,例如在PEP,PETRA,TRISTRAN和LEP^f上的实验,它们所处的能量在第五个(b)夸克质量之上,所以在这些实验中我们必须取 $n_f = 5$.但是,通过在b夸克质量处匹配重整化群方程的解,我们可以用 $n_f = 4$ 的结果表示 $n_f = 5$ 的结果.以这种方式,我们会发现^[25](在计算 β_2 时使用修正最小减除方案)外推至 $m_Z = 91.2$ GeV的强耦合是 $\alpha_s(m_Z) \equiv g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118 \pm 0.006$,对于 $m_b \ll \mu \ll m_t$ 能量 μ ,所对应的A ≈ 250 MeV,其中 $n_f = 5$.对于 e^+ - e^- 湮灭在Z共振上的强子产生,一个更新的研究^[26]给出了直接测量值 $\alpha_s(m_Z) = 0.1200 \pm 0.0025$,它还有理论上的不确定度±0.0078,对应A = 253^{+36}_{-96} MeV.

18.8 改良微扰论*

Gell-Mann和Low的开拓性文章^[1]在很大程度上指向了"改良"微扰论的问题——即,使用重整化群的思想,用微扰论在某一给定阶的结果来研究它的下一阶.为了阐明这一点,我们先回到Gell-Mann和Low所研究的特殊情况:量子电动力学中的真空极化.

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^fPEP是指正电子-电子计划(Positron-Electron Project), 位于SLAC国家实验室; PETRA是正负电子串列环形加 速器(Positron-Electron Tandem Ring Accelerator), 位于德国汉堡的DESY; TRISTRAN位于日本的KEK. ——译者 注.

回忆,按照方程(18.2.36),将滑动标度 μ 处的重整化电荷 e_{μ} 表示成裸电荷 e_{B} 后,它的形式为

$$e_{\mu} = N_{\mu}^{(A)-1} e_B , \qquad (18.8.1)$$

其中 $N_{\mu}^{(A)}$ 是一常数,当其乘进未重整的电磁场中,它会给出在标度 μ 处重整化的场.(参看方程(18.2.21).)因此我们可以定义重整化(因而也是截断无关的)全光子传播子 $\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_{\mu})$,以裸场的全传播子 $\Delta'_{B\rho\sigma}(q,e_B)$ 的形式,这一传播子可以表示成

$$\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_{\mu}) = N^{(A)2}_{\mu} \Delta'_{B\rho\sigma}(q,\mu,e_{\mu})$$
(18.8.2)

在这种方式下,函数 $e_{\mu}^{2}\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_{\mu})$ 由于等于 $e_{B}^{2}\Delta'_{B\rho\sigma}(q,e_{B})$ 而与 μ 无关,又因为 e_{μ} 和 $\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_{\mu})$ 都是重整化量,所以它也与截断无关.(在这里我们不明确地写出截断相关性.)但是Lorentz不变性和量纲分析告诉我们,这一函数必须采取如下的形式:

$$e_{\mu}^{2}\Delta_{\rho\sigma}'(q,\mu,e_{\mu}) = \frac{\eta_{\rho\sigma}d(q^{2}/\mu^{2},e_{\mu})}{q^{2}} + q_{\rho}q_{\sigma}\mathfrak{M}.$$
(18.8.3)

既然方程(18.8.3)与 μ 无关,我们在这里可以令 $\mu = \sqrt{q^2} \equiv q$,这使得

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q) . (18.8.4)$$

现在我们来看看,关于 $d(q^2/\mu^2, e_{\mu})$ 的微扰级数结构,这告诉了我们什么. e的 β -函数有展开:

$$\beta(e) = b_1 e^3 + b_2 e^5 + b_3 e^7 + \cdots$$
 (18.8.5)

那么eµ的重整化群方程就有级数解

$$e_q^2 = e_\mu^2 - b_1 e_\mu^4 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - b_2 e_\mu^6 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - \left(\frac{b_1 b_2}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + b_3 \ln \frac{q^2}{\mu^2}\right) e_\mu^8 + \cdots$$
(18.8.6)

如果我们也对d做展开:

$$d(1,e) = e^{2} + d_{1}e^{4} + d_{2}e^{6} + d_{3}e^{8} + \cdots$$
(18.8.7)

那么

$$d(q^2/\mu^2, e_{\mu}) = d(1, e_q) = e_{\mu}^2 - \left(b_1 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_1\right) e_{\mu}^4 - \left(b_2 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_2\right) e_{\mu}^6$$
$$- \left(\frac{1}{2}b_1b_2 \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + (b_3 - b_1d_2) \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_3\right) e_{\mu}^8 + \cdots$$
(18.8.8)

注意到, 在 $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ 的每一阶中, $\ln(q^2/\mu^2)$ 的领头项幂次分别是0, 1, 1, 2, 3, ···· 另外, 如果我们 计算 $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ 至 e_μ^6 阶并以此决定 b_1 和 b_2 , 我们可以立即写出 e_μ^8 阶中领头对数的系数 $-\frac{1}{2}b_1b_2$. 如 果不使用重整化群方方法, 这里面的那一个都没有那么容易推断出来.

习题

1. 考察含有一个标量场的SU(N)规范理论,且该标量场处在SU(N)的定义表示下.将标量圈的贡献包含在内,计算到规范耦合常数的β-函数至一圈阶. (建议:使用背景场规范,取常数背景场.)

2. 假定一个有正定耦合常数g的理论的 β -函数 $\beta(g)$ 在 $g = g_*$ 处有一个单零点,即在 g_* 附近, $\beta(g) \to a(g_* - g)$,其中a > 0.对因子 $N_E^{\mathcal{O}-1}$ 中 $\propto E^{\gamma^{\mathcal{O}}(g_*)}$ 领头项的修正而言,它的渐进行为是 什么?其中 $N_E^{\mathcal{O}-1}$ 是将算符 \mathcal{O} 包含在真空期望值中后所附带的因子.

3. 若在一个理论中有 $\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + b''g^4 + \cdots$, 证明: 通过对耦合常数的重定义, 我们完全可以把系数b''变成我们想要的任何值.

4. 若反应所处的能量为100 GeV,将质量低于100 GeV的所有已知的带电夸克和轻子考虑在内,计 算用于研究反应的有效电荷.

5. 计算量子电动力学中的电子传播子在4-动量很大时的渐进行为. (你可以使用其它地方计算出的*Z*2的单圈值, 例如11.4节中算出的*Z*2值.)

6. 对于标量场 $\phi_n(x)$ 的O(N)-不变理论,其中 $n = 1, \dots, N, \phi_n(x)$ 属于O(N)的矢量表示,且理论有相互作用 $\frac{1}{4}g(\sum_n \phi_n^2)^2$,计算 $\epsilon = 4 - d$ 展开中到一阶的反常指数 ν .

参考文献

- M. Gell-Mann and F. E. Low, *phys. Rev.* 95, 1300 (1954). 更早的时候, E. C. G. Stueckelberg和A. Peterman也略微讨论了选择重整化耦合常数定义的自由度, *Helv. Phys. Acta* 26, 499 (1953) (他们同时引入了"重整化群"这个灾难般的词汇), 但并没有说明它与计算极高能物理过程或极低能物理过程之间的相关性. 在Gell-man和Low的工作之后, N. N. Bogoli-ubov和D. V. Shirkov进一步发展了重整化群方法, *Introduction to the Theory of Quantized fields* (Interscience, New York, 1959): Chapter VIII, 以及那里引用的文献. 粒子物理中对重整化群方法的二次热潮是由如下几人引起的, C. G. Callan, *Phys. Rev.* D2, 1541 (1970); K. Symanzik, *Commun Math. Phys.* 18, 227 (1970); C. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw, *Ann. of Phys.* (New York), 59, 42 (1970).
- [2] K. G. Wilson, Phys. Rev. B4, 3174, 3184 (1971); Rev. Mod. Phys. 47, 773 (1975).
- [3] J. C. Collins, *Phys. Rev.* **D10**, 1213 (1974).
- [3a] R. Jost and J. M. Luttinger, Helv. Phys. Acts 23, 201 (1950).
- [4] 这个数值引用于1994年的Particle Data Group. G. Altarelli汇总了更新的计算, CERN preprint CERN-TH-95/203, 发表在Proceedings of the Workshop on Physics at DAΦNE, April 1995. 较新的α⁻¹(m_Z)值分布在128.89与129.08之间.
- [4a] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* D7, 1888 (1973).
- [4b] L. D. Landau, in *Niels Bohr and the Development of Physics* (Pergamon Press, New York, 1955): p.52; 以及那里引用的更早的工作.

- [4c] S. L. Adler, C. G. Callan, D. J. Gross, and R. Jackiw, *Phys. Rev.* D6, 2982 (1972); M. Baker and K. Johnson, *Physica* 96A, 120 (1979).
- [4d] 关于这一点的讨论与参考,可参看J. Glimm and A. Jaffe, Quantum Physics A Fundamental Integral Point of View, Second Edition (Springer-Verlag, New York, 1987): Section 21.6; R. Fernandez, J. Fröhlich, and A. D. Sokal, Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory (Springer-Verlag, Berlin, 1992): Chapter 15.
- [5] S. Weinberg, in *General Relativity*, S. W. Hawking and W. Israel编辑. (Cambridge University Press, Cambridge, 1979): p. 790.
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev.* D8, 3497 (1973).
- [7] 原始计算是K. G. Wilson和M. E. Fisher给出的, Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972); K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. 28, 548 (1972). 关于综述可参看, K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. 12C, No. 2 (1974); M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. 46, 597 (1974); E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in Phase Transitions and Critical Phenomena, C. Domb and M. S. Green编辑(Academic Press, London, 1975).
- [8] 参看P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1955): p. 231.
- [8a] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, and B. G. Nickel, *Phys. Lett.* 44A, 227 (1973);
 K. G. Wilson and J. Kogut, 参看文献7, Section 8.
- [9] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B461, 455 (1973); Nucl. Phys. B82, 444 (1973). 这里所给出的推导相对't Hooft的推导做了些许的简化.
- [10] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 598 (1964); M. Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.* 139, B1006 (1965); W. A. Bardeen, H. Fritzsch, and M. Gell-Mann, in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, R. Gatto编辑(Wiley, New York, 1973).
- [11] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8, 214 (1964); G. Zweig, CERN preprint TH401 (1964).
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343 (1973).
- [13] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [14] E. D. Bloom et. al., Phys. Rev. Lett. 23, 930 (1969); M. Breidenbach et. al., Phys. Rev. Lett. 23, 933 (1969); J. L. Friedman and H. W. Kendall, Annual Reviews of Nuclear Science 22, 203 (1972).
- [15] A. Zee, 未发表.
- [16] G. 't Hooft, 未发表.
- [17] S. Weinberg, *Phys. Rev.* D8, 605 (1973).

- [18] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D8, 3633 (1973); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31, 494 (1973).
- [19] 在渐进自由被发现之前, H. Fritzsch, M. Gell-Mann, 和H. Leuttwyler提出过类似的想法, *Phys. Lett.* **47B**, 365 (1973).
- [20] G. Hanson et al., Phys. Rev. Lett. 35, 1609 (1975). R. F. Schwitters, in Proceedings of the International Conference on Lepton and Photon Interactions at High Energy at Stanford, 1975, W. T. Kirk编辑(Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, 1975): p.5; G. Hanson Stanford Linear Accelerator Center Report SLAC-PUB-1814 (1976), 未发表.
- [21] G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1436 (1977).
- [22] J. Ellis, M. K. Gaillard, and G. G. Ross, Nucl. Phys. B111, 253 (1976).
- [23] E. Eichten, K. Lane, and M. Peskin, *Phys. Rev. Lett.* 50, 811 (1983).
- [24] 关于综述, 参看I. Hinchliffe, in 'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1177 (1994): Section 25.
- [25] G. Altarelli, in *Proceedings of the Rencontres de Hanoi*, CERN preprint CERN-PRE/94-71 (1994).
- [26] K. Abe *et al.* (SLD collaboration), *Phys. Rev.* **D51**, 962 (1995). M. Shifman汇总了Z⁰衰 变到强子的早期数据, Minnesota preprint hep-th/9501222 (1995), 这份数据给出α_s(m_Z) = 0.125±0.005, 对应的Λ≈500 MeV.

第 19 章 自发破缺的整体对称性

本世纪(这里指20世纪)的绝大多数物理都建立在对称性原理之上:首先是Einstein1905年狭 义相对论的时空对称性,然后是内部对称性,例如20世纪30年代的近似*SU*(2)同位旋对称性.因此, 与对基本粒子频谱的探查猜测得出的内部对称性相比,当在20世纪60年代发现内部对称性比它还 要多时,这是十分令人振奋的.底层理论会有"自发破缺"的精确对称性或近似对称性,也就是说, 这些对称性没有实现为该理论物理态的对称变换,特别地,这些对称性并不保持真空态不变.突破 是近似整体对称性*SU*(2) × *SU*(2)破缺的发现,它是强相互作用的对称性,将在19.3节进行细致的 讨论.在此之后不久,就发现了对称性*SU*(2) × *U*(1)的自发破缺,这是弱相互作用和电磁作用的精 确定域对称性,这将会在第21章用更加一般的定域对称性破缺单独进行处理.在本章我们先对整 体对称性破缺做一般讨论,然后转向物理的例子.

19.1 简并真空

我们无需寻找对称性自发破缺的例子.考察一个椅子,对于组成椅子的原子而言,控制它们的 方程有旋转对称性,但是这些方程的解,真实的椅子,却在空间中有确定的方向.在这里我们不会 考察物体的对称性破缺,例如椅子,而是考察任意真实量子场论基态的对称性破缺,即真空的对称 性破缺.

在场论中,自发破缺的对称性总是与真空态的简并相联系.例如,考察作用量的一个对称变换, 且该对称变换也是对场积分所用测度的对称变换,该对称变换线性地作用在一组标量场上φ_n(x):

$$\phi_n(x) \to \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm} \phi_m(x)$$
 (19.1.1)

 $(\phi_n \Lambda - cc)$ 定是基本场;它们可以是复合的,像 $\bar{\psi}\Gamma_n\psi$.)正如我们在16.4节中所看到的,这样量子有效作用量 $\Gamma[\phi]$ 就会有相同的对称性

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi] . \tag{19.1.2}$$

对于真空, $\phi(x)$ 的期望值必须使得真空能 $-\Gamma[\phi]$ 处在最小值, 例如 $\phi(x)$ 处在 $\phi(x) = \bar{\phi}(-\gamma 常数)$. 但 如果 $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$, 那么这个真空就不是唯一的; 就像处在 $\bar{\phi}$ 这一点, $-\Gamma[\phi]$ 会在 $\phi = L\bar{\phi}$ 处有相同的值. 若 对称变换(19.1.1)是一反射, $\phi \to -\phi$, 那么在这一简单情况中, 如果 $-\Gamma[\phi]$ 在 ϕ 的非零值 $\bar{\phi}$ 处取得最 小值, 那么它会有两个最小值点, $\bar{\phi}$ 和 $-\bar{\phi}$, 每一个对应于一个对称性破缺的态.

我们还无法在这种情况下得出对称性破缺的结论,因为我们还没有排除这样的可能性:真实的真空是真空态的线性叠加, ϕ_m 在这些真空态中有不同的期望值,但是真正的真空却表现出了假定的对称性.例如,在有对称性 $\phi \rightarrow -\phi$ 的理论中,即使 $-\Gamma[\phi]$ 在 ϕ 的某个非零值 $\bar{\phi}$ 处取最小值,也会有两种情况, $|VAC,\pm\rangle$ 和 $|VAC,+\rangle + |VAC,-\rangle$,对于前者, Φ 有期望值 $\bar{\phi}$ 和 $-\bar{\phi}$,而后者会遵循 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性,我们如何知道真空是态 $|VAC,\pm\rangle$ 中的一个,还是像 $|VAC,+\rangle + |VAC,-\rangle$ 这

样的线性组合? 我们假定的变换 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性会告诉我们, 哈密顿量的真空矩阵元是

$$\langle VAC, +|H|VAC, +\rangle = \langle VAC, -|H|VAC, -\rangle \equiv a$$

(a是实数)以及

$$\langle VAC, +|H|VAC, -\rangle = \langle VAC, -|H|VAC, +\rangle \equiv b$$

(b是实数),所以哈密顿量的本征态是 $|VAC, +\rangle \pm |VAC, -\rangle$,而能量是 $a \pm |b|$.这些能量本征态在对称变换 $\phi \rightarrow -\phi$ 下不变(或者在相差一个符号的意义下不变).事实上,椅子也会有相同的问题.孤立椅子的量子力学基态实际上是旋转不变的;它是角动量量子数为零的态,因此在空间中没有特定的方向.

实际上,只有无限大的理想系统才会发生对称性自发破缺.对于椅子而言,对称性破缺的出现 是因为它有宏观的转动惯量*I*,这使得它的基态是将旋转激发态累积后的一部分,这些旋转激发态 的能量只间隔非常小的量级为*ħ*²/*I*的量.这使得椅子的态矢对外部的微扰及其敏感;即使是非常 弱的外场,它所造成的能量偏移也要比这些旋转能量之间的能量差要大得多.其结果是,对于椅子 的基态或者其它角动量量子数确定的态,任何旋转不对称的外场就会使得其它角动量量子数的分 量快速增长.在椅子的态中,相对小的外部微扰稳定的不是那些有着明确角动量量子数的态,而是 那些有着明确方向的态,这样的态,其所在的底层理论的旋转对称性是破缺的.

对于真空同样如此, 自发对称性破缺的可能性又一次与系统的大尺寸相关, 特别是与空间的 大体积相关. 在前面反射对称性的例子中, 哈密顿量的非对角元b会包含一个场构型积分, 这一场 构型会从 $\phi = \bar{\phi}$ 处的最小值隧穿到 $\phi = -\bar{\phi}$ 的最小值, 所以, 若空间体积为 \mathcal{V} , b要比对角矩阵元a小 一个形式为exp($-C\mathcal{V}$)的势垒穿透因子, 其中C是与该理论微观参量相关的正常数*. 因此, 对于宏 观体积, 两个能量本征态|VAC, + \rangle ± |VAC, - \rangle 高度简并, 这使得若微扰是 ϕ 的奇次泛函, 这两个态 会被紧密地混合在一起. 因此, 即使这样的微扰H'很弱, 无论与H的非对角指数压低矩阵元相比, 还是与微扰的非对角指数压低矩阵元相比, 微扰H'的两个对角元 \langle VAC, ±|H'|VAC, ± \rangle 之间的差值 都比要它们大得多. 因此对于微扰后的哈密顿量而言, 它的真空态会非常接近使微扰对角化的对 称性破缺态|VAC, ± \rangle 中的一个, 而不是不变态|VAC, + \rangle ± |VAC, - \rangle . 那么对于非常小的微扰而言, |VAC, ± \rangle 中的哪一个才是真正的真空呢? 这取决与微扰, 但由于这两个态通过原始哈密顿量的对 称变换相关, 所以这并不重要; 如果微扰足够小, 观测者就无法分辨出其中的差别.

当空间体积无限大时,场期望值不同的真空态之间的矩阵元精确为零.^[1]对于无限大的体积, 一般的真空态|v>可以定义为动量为零的态

$$\mathbf{P}|v\rangle = 0 , \qquad (19.1.3)$$

这里的本征值是离散的动量本征值.(这排除了单粒子态或多粒子态,对于这样的态,在无限大空间中,零动量值总是连续动量值的一部分.)一般而言会有多个这样的态.它们通常可以展成一组 离散基,并且我们的记法也视它们是离散的.它们将被选成正交的

$$\langle u|v\rangle = \delta_{uv} \ . \tag{19.1.4}$$

^{*}例如,类比经典波动力学的势垒穿透问题,对于形式为 $-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi)$ 的拉格朗日密度,我们有 $C = \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} \sqrt{2V(\phi)} d\phi$. 一会儿我们就会给出一个证明非对角矩阵元b对于无限体积为零的一般讨论,所以我们不用费心计算这里的b.

等时定域厄密算符的积在这些态之间的任何矩阵元可以表示为态的和:

$$\langle u|A(\mathbf{x}) B(0)|v\rangle = \sum_{w} \langle u|A(0)|w\rangle \langle w|B(0)|n\rangle$$

$$\int \mathrm{d}^{3}p \sum_{N} \langle u|A(0)|N, \mathbf{p}\rangle \langle N, \mathbf{p}|B(0)|n\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} , \qquad (19.1.5)$$

其中 $|N, \mathbf{p}\rangle$ 是一组连续的态,它们带有3-动量 \mathbf{p} 且互相成交,它们与 $|v\rangle$ 共同张开了整个物理的Hilbert空间. (这里的N可以包含连续指标和离散指标. 我们同时扔掉了时间变量.) 由于 $|N, \mathbf{p}\rangle$ 属于动量算符 \mathbf{P} 的连续谱,我们不加证明地假定,矩阵元对 \mathbf{p} 的依赖性足够光滑(即,Lebesgue可积),进而可以使用Riemann-Lebesgue定理,^[2]这使得对 \mathbf{p} 的积分在 $|\mathbf{x}| \to \infty$ 时为零. 那么,在这一极限下我们就会有

$$\langle u|A(\mathbf{x}) B(0)|v\rangle \xrightarrow[|\mathbf{x}|\to\infty]{} \sum_{w} \langle u|A(0)|w\rangle \langle w|B(0)|v\rangle$$
 (19.1.6)

类似地,

$$\langle u|B(0) A(\mathbf{x})|v\rangle \xrightarrow[|\mathbf{x}|\to\infty]{} \sum_{w} \langle u|B(0)|w\rangle \langle w|A(0)|v\rangle$$
 (19.1.7)

但是因果律告诉我们, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, 等时对易子[$A(\mathbf{x}), B(0)$]为零(见5.1节), 所以矩阵元(19.1.6)和矩阵元(19.1.9)是相等的, 因此, 厄米矩阵 $\langle u|A(0)|v \rangle$, $\langle u|B(0)|v \rangle$ 等都必须彼此对易. 由此得出它们可以同时对角化. 按照需要转化到这一基, 这样, 对于理论的每一个厄米定域算符 $A(\mathbf{x})$, 我们有

$$\langle u|A(0)|v\rangle = \delta_{uv} a_v \tag{19.1.8}$$

其中*a*_v是*A*在态|v>下的期望值, 是一实数. 所以, 对于无限大的体积, 任何用定域算符构建的哈密顿量在不同真空|v>之间的矩阵元都为零. 当哈密顿量没有非对角项时, 任何两个通过对称操作连接的|v>将是简并的. 用这种定域算符构建的对称性破缺微扰在同一基将是对角的, 因而它所产生的基态是|v>中的一个, 而不是它们的线性组合.

让人安心的是,若真空态|v>相对与场相关的小微扰稳定,那么它也是满足集团分解条件(见 第4章)的真空态.这一原理要求,对于物理的真空态|VAC>

$$\langle \text{VAC}|A(\mathbf{x}) B(0)|\text{VAC}\rangle \xrightarrow[\mathbf{x}\to\infty]{} \langle \text{VAC}|A(\mathbf{x})|\text{VAC}\rangle \langle \text{VAC}|B(0)|\text{VAC}\rangle .$$
 (19.1.9)

如果我们将真空态取成方程(19.1.8)所定义的基中的任何一个|v>态,那么这一条件就是满足的,但 是如果我们将其取为几个|v>的线性组合,那么这一条件就是不满足的.

19.2 Goldstone 玻色子

我们现在具体到连续对称性自发破缺的情况.在这一情况下有一个定理,(这个定理有一个 重要的例外,将在第21章进行考察)对于每一个破缺的对称性,物理粒子的谱中就必须包含一个 质量和自旋均为零的粒子.这样的粒子被称为Goldstone玻色子(或Nambu-Goldstone玻色子),它 是Goldstone^[3]和Nambu^[4]在一特定模型中首次遇到的;在此之后,Goldstone,Salam和我自己^[5]给 出了两个存在这种粒子的一般性证明.这两个证明在这一节均会展示出来,然后我们将进一步考 察Goldstone粒子的性质. 假定作用量和测度在一个连续对称变换下不变,且在该对称变换下,一组厄密标量场 $\phi_n(x)$ (基本场或复合场)进行一个无限小的线性变换

$$\phi_n(x) \to \phi_n(x) + i\epsilon \sum_m t_{nm} \phi_m(x) ,$$
 (19.2.1)

其中it_{nm}是有限的实矩阵. 那么, 正如我们在16.4节中所发现的, 有效作用量在这一变换下也是不变的

$$\sum_{n,m} \int \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi_n(x)} t_{nm} \phi_m(x) \,\mathrm{d}^4 x = 0 \;. \tag{19.2.2}$$

我们将特定到平移不变理论的情况,且要求场为常数场 ϕ_n ,这时,正如我们在16.2节所看到的,有效作用量采取如下的形式

$$\Gamma[\phi] = -\mathscr{V}V(\phi) , \qquad (19.2.3)$$

其中Ψ是时空体积而V(φ)被称为有效势. 那么方程(19.2.2)可以写成

$$\sum_{n,m} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} t_{nm} \phi_m = 0 .$$
(19.2.4)

我们将要使用的对称性要求是对上式做 ϕ_ℓ 的微分得到的:

$$\sum_{n} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} t_{n\ell} + \sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} t_{nm} \phi_m = 0 .$$
(19.2.5)

现在指定到 $\phi_n \in V(\phi)$ 的最小值点的情况,即, ϕ_n 是真空期望值 $\overline{\phi}_n$.既然 $V(\phi)$ 在它的最小值处是稳定的,那么方程(19.2.5)中的第一项为零,所以

$$\sum_{n,m} \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} \right|_{\phi = \bar{\phi}} t_{nm} \bar{\phi}_m = 0 .$$
(19.2.6)

16.1节的一般性结论表明, 方程(19.2.6)中的二阶导数正是动量空间中所有外线标记为n和ℓ的单粒 子不可约连通Feynman图之和. 正如16.1节末尾所给出的, 它与动量空间传播子的倒数相关, 其关 系是

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} = \Delta_{n\ell}^{-1}(0) , \qquad (19.2.7)$$

所以, 方程(19.2.6)给出

$$\sum_{n,m} \Delta_{n\ell}^{-1}(0) t_{nm} \bar{\phi}_m = 0 .$$
(19.2.8)

因此,如果对称性是破缺的,这会使得 $\sum_{m} t_{nm} \bar{\phi}_{m}$ 不为零,那么它就是 $\Delta_{n\ell}^{-1}(0)$ 本征值为零的本征 矢.存在这种矢量意味着 $\Delta_{n\ell}(q)$ 在 $q^2 = 0$ 处有一极点.在 $q^2 = 0$ 处的这一极点,其留数的阶等于矢量 $t\bar{\phi}$ 张成的空间的维数,其中t取遍该理论这一连续对称性的所有生成元.粗略地讲,对于每一个独立的破缺对称性会存在一个无质量的玻色子.

在对称性破缺的经典例子中, 拉格朗日量含有一组实标量场 ϕ_n , 个数为N, 并采取如下的形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \sum_{n} \partial_{\mu} \phi_n \partial^{\mu} \phi_n - \frac{\mathscr{M}^2}{2} \sum_{n} \phi_n \phi_n - \frac{g}{4} \left(\sum_{n} \phi_n \phi_n \right)^2 .$$
(19.2.9)

在群O(N)的作用下,即对分量为 ϕ_n 的N-矢量的旋转操作,它是不变的.对于常数场,树级近似下的有效势就由拉格朗日密度中非导数项的负数给定

$$V(\phi) \simeq \frac{\mathscr{M}^2}{2} \sum_n \phi_n \phi_n + \frac{g}{4} \left(\sum_n \phi_n \phi_n \right)^2 \,. \tag{19.2.10}$$

像往常一样,我们假定g是正定的. (否则, $V(\phi)$ 的最小值即使存在也处在微扰论的适用范围之 外.) 如果 \mathcal{M}^2 也是正定的, $V(\phi)$ 的最小值就在点 $\phi = 0$,这一点在O(N)下是不变的. 另一方面, 当 $\mathcal{M}^2 < 0$ 时,最小值所在的点 $\bar{\phi}_n$ 使得

$$\sum_{n} \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = -\mathscr{M}^2/g . \qquad (19.2.11)$$

那么, 树级近似下的质量矩阵就是

$$M_{nm}^{2} = \frac{\partial^{2} V(\phi)}{\partial \phi_{n} \partial \phi_{m}} \bigg|_{\phi = \bar{\phi}}$$

= $\mathcal{M}^{2} \delta_{nm} + g \delta_{nm} \sum_{\ell} \bar{\phi}_{\ell} \bar{\phi}_{\ell} + 2g \bar{\phi}_{n} \bar{\phi}_{m}$
= $2 g \bar{\phi}_{n} \bar{\phi}_{m}$. (19.2.12)

它有一个本征值非零的本征矢 $\bar{\phi}_n$:

$$m^2 = 2g \sum_n \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = 2|\mathcal{M}^2| , \qquad (19.2.13)$$

以及N = 1个垂直于 ϕ 且本征值为零的本征矢. 仅有N = 1个Goldstone玻色子出现的原因正 是O(N)破缺到了O(N = 1)(O(N)中使得 ϕ 不变的子群,)因此独立的破缺对称性的数目是O(N)的 维数减去O(N = 1)的维数,即

$$\frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = N-1.$$
(19.2.14)

关于Goldstone玻色子的存在性有另一个证明,在这个证明中没有用到有效作用量的形式理论.我们在第7章知道,作用量的任何连续对称性都会给出一个守恒流*J*^µ:

$$\frac{\partial J^{\mu}(x)}{\partial x^{\mu}} = 0 , \qquad (19.2.15)$$

以及诱导出相应对称变换的荷Q

$$Q = \int d^3x \, J^0(\mathbf{x}, 0) \,, \qquad (19.2.16)$$

$$[Q, \phi_n(x)] = -\sum_m t_{nm} \phi_m(x) . \qquad (19.2.17)$$

像方程(19.2.15)—(19.2.17)这样的算符关系不受自发对称性破缺的影响,这体现出了物理态的性质.现在,考察流和场的对易子的真空期望值.对中间态求和,这是

$$\left\langle \left[J^{\lambda}(y), \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^4 p \left[\rho_n^{\lambda}(p) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_n^{\lambda}(p) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot (x-y)} \right] \,, \tag{19.2.18}$$

其中,利用平移不变性,

$$(2\pi)^{-3} \mathrm{i}\rho_n^{\lambda}(p) = \sum_N \langle \mathrm{VAC} | J^{\lambda}(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \mathrm{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N) , \qquad (19.2.19)$$

$$(2\pi)^{-3} \mathrm{i}\tilde{\rho}_n^{\lambda}(p) = \sum_N \langle \mathrm{VAC} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^{\lambda}(0) | \mathrm{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N) .$$
(19.2.20)

我们通常将 J^{λ} 和 ϕ_n 取成厄米算符,在这一情况下,方程(19.2.19)和(19.2.20)是复共轭

$$\rho_n^{\lambda}(p) = -\tilde{\rho}_n^{\lambda*}(p) , \qquad (19.2.21)$$

但在这里将不会做这一假定.

Lorentz不变性告诉我们, ρ 和 $\tilde{\rho}$ 必须采取如下的形式

$$\rho_n^{\lambda}(p) = p^{\lambda} \rho_n(-p^2) \theta(p^0) , \qquad (19.2.22)$$

$$\tilde{\rho}_n^{\lambda}(p) = p^{\lambda} \tilde{\rho}_n(-p^2) \theta(p^0) . \qquad (19.2.23)$$

(因子 $\theta(p^0)$), 在 $p^0 > 0$ 时取+1, 在其它情况下为零, 它是 p_N 是物理态的4-动量这一性质所要求的.) 这给出

$$\left\langle \left[J^{\lambda}(y), \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} \int d\mu^2 \left[\rho_n(\mu^2) \Delta_+(y-x;\mu^2) \right. \\ \left. + \tilde{\rho}_n(\mu^2) \Delta_+(x-y;\mu^2) \right] , \qquad (19.2.24)$$

其中Δ+是熟悉的函数

$$\Delta_{+}(z;\mu^{2}) = (2\pi)^{-3} \int d^{4}p \,\theta(p^{0}) \,\delta(p^{2}+\mu^{2}) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot z} \,. \tag{19.2.25}$$

正如在第5章中所评述的, Lorentz不变性仅允许 $\Delta_+(z;\mu^2)$ 依赖于 z^2 , $\mu^2 \pi \theta(z^0)$, 而当 $z^2 > 0$ 时, 则 只依赖 $z^2 \pi \mu^2$. 因此, 当x - y类空时, $\Delta_+(x - y;\mu^2) \pi \Delta_+(y - x;\mu^2)$ 相等, 所以, 在这一情况下

$$\left\langle \left[J^{\lambda}(y), \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} \int d\mu^2 \left[\rho_n(\mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2) \right] \Delta_+(y-x;\mu^2) .$$
(19.2.26)

但是,所有对易子对于类空的x-y必须为零,所以

$$\rho_n(\mu^2) = -\tilde{\rho}_n(\mu^2) , \qquad (19.2.27)$$

因此,对于一般的x和y,方程(19.2.24)给出

$$\left\langle \left[J^{\lambda}(y), \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} \int d\mu^2 \,\rho_n(\mu^2) \left[\Delta_+(y-x;\mu^2) - \Delta_+(x-y;\mu^2) \right] \,. \tag{19.2.28}$$

若方程(19.2.21)也参与进来,方程(19.2.27)还证明了 $\rho_n(\mu^2)$ 是实的.

现在我们使用 $J^{\lambda}(y)$ 守恒这一性质.对方程(19.2.28)两边作用导数 $\partial/\partial y^{\lambda}$,并使用熟悉的方程

$$(\Box_y - \mu^2) \,\Delta_+(y - x; \mu^2) = 0 , \qquad (19.2.29)$$

我们发现,对于所有的x和y

$$0 = \int d\mu^2 \,\mu^2 \rho_n(\mu^2) \Big[\Delta_+(y-x;\mu^2) - \Delta_+(x-y;\mu^2) \Big] , \qquad (19.2.30)$$

 $(因为\Delta_+(x-y)$ 对于类时或类光的x-y不是偶函数)所以

$$\mu^2 \rho_n(\mu^2) = 0 . (19.2.31)$$

一般情况下,我们可以从此得出 $\rho_n(\mu^2)$ 对于所有的 μ^2 均为零. 然而,在对称性破缺的情况下, 这是不可能的. 在方程(19.2.28)中令 $\lambda = 0$ 和 $x^0 = y^0 = t$:

$$\begin{split} \left\langle \left[J^{0}(\mathbf{y},t),\phi_{n}(\mathbf{x},t) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} &= 2\mathrm{i}(2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}\mu^{2} \,\rho_{n}(\mu^{2}) \\ & \times \int \mathrm{d}^{4}p \,\sqrt{\mathbf{p}^{2} + \mu^{2}} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \delta(p^{2} + \mu^{2}) \\ &= \mathrm{i}\delta^{3}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \int \mathrm{d}\mu^{2} \,\rho_{n}(\mu^{2}) \;. \end{split}$$

积分并使用方程(19.2.16)和(19.2.17),这给出

$$-\sum_{m} t_{nm} \langle \phi_m \rangle_{\text{VAC}} = \mathbf{i} \int \mathrm{d}\mu^2 \,\rho_n(\mu^2) \,. \tag{19.2.32}$$

仅当

$$\rho_n(\mu^2) = i\delta(\mu^2) \sum_m t_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{VAC} ,$$
(19.2.33)

方程(19.2.31)和(19.2.32)才能是一致的. (因为在这一情况下方程(19.2.1)要求 t_{nm} 是虚的, 所以它 对于厄米场 ϕ_n 是实的.) 因此, 只要对称性是破缺的, $\rho_n(\mu^2)$ 不能是零, 而是完全由正比于 $\delta(\mu^2)$ 的 项构成. 这样的项显然只能出现在有无质量粒子的理论中, 这是因为, 若非如此, 质心能量平 $j_{-p_N^2}$ 就无法向下扩展至零. 更进一步, $\delta(\mu^2)$ 仅能从零质量的单粒子态中产生; 多粒子态将会 贡献可扩展至 $\mu^2 = 0$ 的连续区. 态 $\phi_n(0)|VAC\rangle$ 是旋转不变的, 所以对于任何螺度非零的态N, $\langle N|\phi_n(0)|VAC\rangle$ 必须为零. 另外, 对于任意的态N, 若它的内禀宇称或(未破缺的)内部量子数 与 J^0 不同, $\langle VAC|J^0|N\rangle$ 为零. 那么, 我们得出: $t_{nm}\langle\phi_n(0)\rangle_{VAC} \neq 0$ 的破缺对称性会要求出现一个 自旋零的无质量粒子, 且该粒子与 J^0 有相同的字称和内部量子数. 它们就是我们的Goldstone玻色子.

当自发破缺的对称性是定域对称性而非整体对称性时,之上的讨论就失效了.我们要么选择 一个Lorentz-协变规范,例如 $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ 这样的Landau规范,在这一情况下,我们在15.7节看到量子 力学的正定性假设被破坏了,要么选择像 $A_3^{\mu} = 0$ 这样的轴向规范,在这一情况下,量子力学的普 通规则成立但显式的Lorentz不变性丢失了.我们将第21章看到,这一例外不仅仅是技术上的问题; 自发破缺的定域对称性不给出Goldstone玻色子.

我们来更细致地看一下 $\rho_n(\mu^2)$ 中 δ -函数的系数是如何与Goldstone玻色子的性质如何关联起来的,这对于后面的讨论将是有用的.对于4-动量为 p_B^μ 的自旋零玻色子B, Lorentz不变性要求流在真空态与单粒子态之间的矩阵元采取如下的形式

$$\langle \text{VAC}|J^{\lambda}(x)|B\rangle = i \frac{F \, p_B^{\lambda} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} p_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}} , \qquad (19.2.34)$$

其中 $\mathbf{p}_B \neq B$ 的动量, $p_B^0 \equiv |\mathbf{p}_B| \prod F$ 是带有能量量纲的常系数. (由于 $p_{B\lambda} p_B^\lambda = 0$, 所以这与流守恒 是一致的.) 另外, 标量场 $\phi_n(y)$ 在单粒子态和真空态之间的矩阵元形式如下

$$\langle B|\phi_n(y)|\text{VAC}\rangle = \frac{Z_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} , \qquad (19.2.35)$$

其中Zn是一无量纲常数.这样,从方程(19.2.34)和(19.2.35)中我们就有

$$(2\pi)^{-3}\mathrm{i}\rho_n(-p^2)p^{\lambda}\theta(p^0) \equiv \int \mathrm{d}^3p_B \,\langle \mathrm{VAC}|J^{\lambda}(0)|B\rangle \langle B|\phi_n(0)|\mathrm{VAC}\rangle \delta^4(p-p_B)$$
$$= \delta(p^0 - |\mathbf{p}|)(2\pi)^{-3}(2p^0)^{-1}p^{\lambda}\mathrm{i}FZ_n$$
$$= \theta(p^0)\delta(-p^2)(2\pi)^{-3}p^{\lambda}\mathrm{i}FZ_n ,$$

所以

$$\rho_n(\mu^2) = F Z_n \delta(\mu^2) . \tag{19.2.36}$$

与方程(19.2.33)相比较,这给出

$$iFZ_n = -\sum_m t_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} . \qquad (19.2.37)$$

更一般地,我们可以有多个破缺的对称性,它们对应的生成元和流分别是 t_a 和 J_a^μ ,在 t_a 的线性组合都是破缺的意义下,我们可以将它们取成独立的.对于这些对称性中的每一个,存在一个Goldstone玻色子 $|B_a\rangle$,并且我们可以将 Z_{an} 和 F_{ab} 定义成

$$\langle \text{VAC}|J_a^{\lambda}(x)|B_b\rangle = \mathrm{i}\frac{F_{ab}\,p_B^{\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_B\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} ,$$
 (19.2.38)

$$\langle B_a | \phi_n(y) | \text{VAC} \rangle = \frac{Z_{an} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}} \,.$$
 (19.2.39)

方程(19.2.37)对于每一个a都是成立的,所以

$$i \sum_{b} F_{ab} Z_{bn} = -\sum_{m} [t_a]_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}$$
 (19.2.40)

例如,在之前所讨论的O(N)模型中,我们选择我们的基使得真空期望值指向1-方向

$$\bar{\phi}_m \equiv \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} = v \delta_{m1} . \qquad (19.2.41)$$

N - 1个破缺对称性的生成元 t_a (其中 $a = 2 \cdots N$)可以定义为1-a平面上无限小旋转的生成元.加上 一个方便的归一化选择,它们就有了非零元

$$[t_a]_{1a} = -[t_a]_{a1} = \mathbf{i} \tag{19.2.42}$$

(其中没有对a进行求和). 对于未破缺的O(N-1)对称性, 在这一对称性N-1个Goldstone玻色子 按照它的矢量表示进行变换, 这一对称性告诉我们

$$F_{ab} = \delta_{ab}F$$
, $Z_{a1} = 0$, $Z_{ab} = Z\delta_{ab}$. (19.2.43)



图 19.1 这是对称流 $J^{\mu}(x)$ 矩阵元中极点项的Feynman图,该对称流处在两个一般态 α 和 β 之间,且该极点项 是Goldstone玻色子内线引起的,在图中标记为 π .

那么, 方程(19.2.40)就会要求

$$FZ = v$$
. (19.2.44)

习惯上取Z = 1的场重整化方案,这样F = v.因此,F反映了对称性破缺的强度.我们将会看到, 参量1/F既决定了Goldstone玻色子彼此之间的相互作用强度,同时也决定了Goldstone玻色子与其它粒子的相互作用强度.

除了Goldstone玻色子质量为零外, 破缺的对称性还告诉了我们其它事情; 它同时稍微约束 了Goldstone玻色子在低能下的相互作用.为了在最简单的例子中看到这一点,考察与一个破缺对 称性相联系的流*J*^μ(*x*).在任意两个态α, β之间:

$$\langle \beta | J^{\mu}(x) | \alpha \rangle = e^{iq \cdot x} \langle \beta | J^{\mu}(0) | \alpha \rangle , \qquad (19.2.45)$$

其中

$$q^{\mu} \equiv p^{\mu}_{\alpha} - p^{\mu}_{\beta} . \qquad (19.2.46)$$

我们知道 $J^{\mu}(x)$ 在真空态和单Goldstone玻色子态 $|B, \mathbf{q}\rangle$ 之间的矩阵元不为零,且这一矩阵元由方程(19.2.34)给出.由极点学的通用规则(见第10章)可以得出,矩阵元(19.2.45)在 $q^2 \rightarrow 0$ 处有一极点,且*

$$\langle \beta | J^{\mu}(0) | \alpha \rangle \to \frac{\mathrm{i} F \, q^{\mu}}{q^2} M_{\beta \alpha} , \qquad (19.2.47)$$

其中i $(2\pi)^4 \delta^4 (p_\alpha - p_\beta - q) M_{\beta\alpha} / (2\pi)^{3/2} (2q^0)^{1/2}$ 是在跃迁 $\alpha \to \beta$ 中发射一个4-动量为q的Goldstone玻 色子的S-矩阵元. 我们因此写下

$$\langle \beta | J^{\mu}(0) | \alpha \rangle = N^{\mu}_{\beta \alpha} + \frac{\mathrm{i} F q^{\mu}}{q^2} M_{\beta \alpha} , \qquad (19.2.48)$$

^{*}当Goldstone玻色子对应的是基本场,方程(19.2.47)可以通过观察图19.1中所示的这类Feynman图获得. 对于过 程 $\alpha \rightarrow \beta + B$, *S*-矩阵元中的因子i(2 π)⁴被*B*传播子所附带的因子–i(2 π)⁻⁴抵消了. 而极点学的一般规则告诉我们,即 使Goldstone玻色子是复合粒子,相同结果同样成立.



图 19.2 上边两图同样是对称流*J*^μ(*x*)矩阵元中极点项的Feynman图,矩阵元两边的态是一般态α和β,只不 过这时的极点项是由于内线接近它们的质量壳造成的. 实线代表"硬"外线; 波浪线代表流*J*^μ(*x*)的插入; 阴 影圆盘代表是有相同外线的所有图之和.

其中 $N^{\mu}_{\beta\alpha}$ 定义为对流的矩阵元的非极点贡献. 从方程(19.2.45)中我们看到, 流 J^{μ} 的守恒律 $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$ 要求(19.2.48)在与 q^{μ} 收缩之后为零, 因此

$$M_{\beta\alpha} = \frac{\mathrm{i}}{F} q_{\mu} N^{\mu}_{\beta\alpha} \ . \tag{19.2.49}$$

一个可以立即得出的结果是,除非 $N^{\mu}_{\beta\alpha}$ 在 $q \rightarrow 0$ 处有一零点,否则在跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射一 个Goldstone玻色子的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 在 $q \rightarrow 0$ 时为零. 这被称为"Adler(阿德勒)零点".^[6]

事实上,通常发生的情况是 $N^{\mu}_{\alpha\beta}$ 确实在q = 0处有极点. 这是因为,流 $J^{\mu}(x)$ 的顶点可以连在过 程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的一条外线上. (见图19.2.)例如,如果插入在出粒子线或处粒子线上的流 J^{μ} 带走了动 量 q^{μ} ,那么对于动量为p且质量为m的外粒子线,连接这一顶角与图剩余部分的内线就会分别携 带4-动量 $p^{\mu} + q^{\mu}$ 或 $p^{\mu} - q^{\mu}$,因此它的传播子就会给 $N^{\mu}_{\beta\alpha}$ 贡献因子

$$\left[(p \pm q)^2 + m^2 \right]^{-1} = \left[\pm 2p \cdot q + q^2 \right]^{-1} \to \pm \frac{1}{2p \cdot q} .$$
 (19.2.50)

对于固定方向的**p**, 方程(19.2.50)中的因子1/|**q**|会与方程(19.2.49)中的因子|**q**|相抵消, 这在|**q** \rightarrow 0|的极限下会给出有限的结果(尽管这一结果与**q**的方向相关). 另一方面, 流 J^{μ} 与过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的内线相连的那些图, 它们对 $N^{\mu}_{\alpha\beta}$ 的贡献在|**q**| \rightarrow 0时没有奇点, 因此被方程(19.2.49)中的因子|**q**|抵消了. 因此, 方程(19.2.49)可以认为有如下的含义: 在过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中发射一个软*Goldstone*玻色子的振幅可以从那些Goldstone玻色子仅从外线上发射的图得出, 而发射*Goldstone*玻色子的顶角可以通过对单粒子态之间的跃迁使用方程(19.2.49)得出.

关于Goldstone玻色子彼此之间的相互作用或者它与其它标量的相互作用,利用有效作用 量形式理论可以导出一些有趣的结果.对于这个目的,我们注意到,如果我们定义一组重整 化Goldstone玻色场 π_a , 使得

$$\langle B_a | \pi_b(x) | \text{VAC} \rangle = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_B \cdot x} \delta_{ab}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}} ,$$
 (19.2.51)

那么方程(19.2.39)告诉我们

$$\phi_n(x) = \sum_a Z_{an} \pi_a(x) + \cdots ,$$
 (19.2.52)

其中"…"代表不产生Goldstone玻色子的场. 但方程(19.2.40)给出 $Z_{an} = \sum_{b} F_{ab}^{-1}(it_b \bar{\phi})_n$. 因此, 对 于N个4-动量为零的Goldstone玻色子 $\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_N}$, 它们之间任何反应的振幅在树级近似下可以 利用如下的有效作用量计算出来

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{N!} g_{a_1 \cdots a_N} \pi_{a_1} \cdots \pi_{a_N} , \qquad (19.2.53)$$

其中

$$g_{a_1\cdots a_N} = \sum_{b_1\cdots b_N} F_{a_1b_1}^{-1}\cdots F_{a_Nb_N}^{-1} (\mathrm{i}t_{b_1}\bar{\phi})_{n_1}\cdots (\mathrm{i}t_{b_N}\bar{\phi})_{n_N} \left.\frac{\partial^N V(\phi)}{\partial\phi_{n_1}\cdots\partial\phi_{n_N}}\right|_{\phi=\bar{\phi}} .$$
(19.2.54)

那么, $\phi = \bar{\phi}$ 处的方程(19.2.4)暗示了, 单个Goldstone玻色线湮没到真空的所有"蝌蚪图"之和为零, 而方程(19.2.6)则告诉我们Goldstone玻色子在零4-动量处跃迁到任何其它标量的振幅为零.为了 在这些结果之上更进一步, 我们可以继续相对标量场微分.例如, 对于任意的对称性生成元t, 方 程(19.2.5)的导数给出:

$$\sum_{n} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} t_{n\ell} + \sum_{n} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} t_{nm} + \sum_{n,k} \frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m \partial \phi_\ell} t_{nk} \phi_k = 0 .$$
(19.2.55)

将t取成破缺对称性生成元 t_a 中的一个, 令 $\phi = \bar{\phi}$, 与 $(t_b\bar{\phi})_m(t_c\bar{\phi})_\ell$, 使用方程(19.2.6), 这给出

$$\sum_{n,m,\ell} \left. \frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m \partial \phi_\ell} \right|_{\phi = \bar{\phi}} (t_a \bar{\phi})_n (t_b \bar{\phi})_m (t_c \bar{\phi})_\ell = 0 , \qquad (19.2.56)$$

所以,有三条零4-动量Goldstone玻色外线的所有图之和为零.特别地,这意味着在一般过程中,到小的Goldstone玻色子能量的领头阶,低能Goldstone玻色外线上不会发射低能Goldstone玻色子.

19.3 自发破缺的近似对称性

上一节我们处理的是不保持真空不变的作用量的精确对称性,这种对称性被称作自发破缺的. 我们将考察在这种理论的作用量中增加一个小的对称性破缺项的效应.在强作用理论以及凝聚态 物理的某些领域中,这种自发破缺的近似对称性是非常重要的.我们将看到,近似对称性的自发破 缺并不会导致无质量Goldstone玻色子的出现,出现的是一个质量很小的无自旋粒子,这种粒子通 常被称为质 *Goldstone*玻色子.^[7]

在这里我们继续处理平移不变的理论, 在这样的理论中, 有效作用量可以像方程(19.2.3)中那 样表示成有效势V(φ)的形式, 且V(φ)依赖一组与时空无关的标量场期望值φ_n. 若一个作用量服从 某组生成元为t_α的近似连续对称性, 那么有效势可以写成

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) , \qquad (19.3.1)$$

其中V₀(φ)满足不变性条件*

$$\sum_{n,m} \frac{\partial V_0(\phi)}{\partial \phi_n} (t_\alpha)_{nm} \phi_m = 0$$
(19.3.2)

而 $V_1(\phi)$ 是作用量中的对称性破缺给出的小修正. 假定这一微扰将势的最小值点从 ϕ_0 偏移 至 $\bar{\phi} = \phi_0 + \phi_1$,其中 $\phi_0 \in V_0(\phi)$ 的最小值点, ϕ_1 是对称性破缺微扰中的一阶小量. 这样,真空态的 平衡条件就是

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n}\Big|_{\phi=\phi_0+\phi_1} = 0 . \tag{19.3.3}$$

左边的零阶项就是[$\partial V_0(\phi)/\partial \phi_n$] $_{\phi=\phi_0}$,由于 ϕ_0 的定义就是 $V_0(\phi)$ 的最小值点,所以它为零.因此一阶 项也必须为零,因而:

$$\sum_{m} \left. \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi = \phi_0} \phi_{1m} + \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi = \phi_0} = 0 .$$
(19.3.4)

将方程(19.2.6)中的V替换成不变项 V_0 并将 $\bar{\phi}$ 替换成 ϕ_0 后,它在这里就是成立的:

$$\sum_{nl} \left. \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi = \phi_0} (t_\alpha)_{nl} \phi_{0l} = 0 .$$
(19.3.5)

因此, 给方程(19.3.4)乘以 $(t_{\alpha}\phi_0)_n$ 并对n求和给出

$$\sum_{n} (t_{\alpha}\phi_0)_n \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0} = 0 .$$
(19.3.6)

回忆 $V(\phi)$ 作为单粒子不可约图生成函数的解释,并注意到,当没有微扰 V_1 时, ϕ_n 的Goldstone分量是那些处在 $t_{\alpha}\phi_0$ 方向的分量(见方程(19.2.33)),方程(19.3.6)的左边正比于所有"蝌蚪"图的和,在蝌蚪图中,赝Goldstone玻色子湮没在真空之中.因此,方程可以叙述为条件:到 V_1 中的一阶, *赝Goldstone玻色*子没有蝌蚪图.

这一计算的含义在于,如果我们不从满足方程(19.3.6)的零阶期望值出发,那么即使很小的微扰也会对 $\bar{\phi}$ 产生很大的改变,这将破坏 $\bar{\phi}$ 在 ϕ_0 附近的展开.幸运的是,对于紧Lie群,总可能选择 ϕ_0 使之满足方程(19.3.6).为了看到这点,注意到,势 $V_0(\phi)$ 在实线性变换 $\phi \rightarrow L\phi$ 的群下不变暗示了:如果 ϕ_* 是势的一个最小值点,那么 $L\phi_*$ 也是最小值点.对于连续的变换群,我们总可以将变换参数化为 $L(\theta)$,使得

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_{\alpha}} L^{-1}(\theta) = i N_{\alpha\beta}(\theta) t_{\beta} , \qquad (19.3.7)$$

其中 $N_{\alpha\beta}$ 是依赖于群参量 θ_{α} 的非奇异矩阵. (在实表示中, i t_{α} 是实的, 而非 t_{α} .) 现在考察函 数 $V_1(L(\theta)\phi_*)$. 当群是紧致群时, 随着 θ 跑遍整个群体积, $L(\theta)\phi_*$ 映射到一个紧致流形, 并且, 只 要 $V_1(\phi)$ 是连续的, 那么它在任何这样的紧致面上必有一个最小值, 记这个最小值点为 $L(\theta_*\phi_*)$. $V_1(L(\theta)\phi_*)$ 对 θ_{α} 的导数是

$$\frac{\partial V_1(L(\theta)\phi_*)}{\partial \theta_{\alpha}} = \sum_n \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=L(\theta_*)\phi_*} N_{\alpha\beta}(\theta) \left(\mathrm{i}t_{\beta}L(\theta_*)\phi_* \right)_n \,. \tag{19.3.8}$$

它必须在最小值点θ_{*}处为零,既然N_{ab}是非奇异的,这暗示了

$$0 = \sum_{n} \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi = L(\theta_*)\phi_*} (t_\beta L(\theta_*)\phi_*)_n .$$
(19.3.9)

^{*}我们将一般的对称性生成元记做 t_{lpha}, t_{eta} 等,与独立的破缺对称性生成元不同,对于那些生成元,下标lpha取值a, b等.

然而,如果我们选择 $\phi_0 = L(\theta_*)\phi_*$,那么方程(19.3.6)总是满足的.

方程(19.3.6)被称为真空对齐条件(vacuum alignment condition),^[8] 这是因为它一般会有这样的效应: 迫使真空所破缺的对称性的方向与哈密顿量中的对称项破缺性构成某种队列. 例如,考察上一节所引入的SO(N)自发破缺到SO(N-1)的情况. 当对称性破缺微扰不存在时,没有方法分辨哪个SO(N-1)群是未破缺的;对于SO(N)保持某个N-矢 ϕ_{0m} 不变的SO(N-1)子群,若理论的动力学所给出的基态在该子群的作用下不变,那么通过实施一个SO(N)旋转,我们能发现另一个基态,这个基态在保持另一个N-矢不变的SO(N-1)子群的作用下不变.如果我们增加一个微扰,这个微扰在SO(N)的作用下像N-矢 ϕ_n (不一定由基本场构成)的分量 $\sum_n u_n \phi_n$ 那样变换,那么这个哈密顿量在SO(N)一个特定的SO(N-1)子群下不变,即保持矢量u不变的旋转所构成的子群. 没有真空对齐条件,我们可以认为剩余的精确对称性是SO(N-2),组成这个群的旋转既保持u不变 又保持表征真空对称性的矢量 ϕ_0 不变. 但伴随 $V_1(\phi) = \sum_n u_n \phi_n$,条件(19.3.6)告诉我们,当处在真正的真空时,对于所有的SO(N)生成元 t_{α} 有 $\sum_n (t_{\alpha}\phi_0)_n u_n = 0$. SO(N)生成元 t_{α} 展开了所有反对称 $N \times N$ 矩阵的空间,所以这一条件要求 ϕ_0 必须处在与u相同的方向上,因而未破缺的对称性 是SO(N-1),而不是SO(N-2).

根据16.1节的一般结果, 赝Goldstone玻色子直到一阶的质量矩阵 M_{ab} 给定为

$$M_{ab}^2 = \sum_{mn} Z_{an} Z_{bm} \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_m \partial \phi_n} \right|_{\phi = \phi_0 + \phi_1} , \qquad (19.3.10)$$

其中Zan是方程(19.2.39)所定义的场场重整化常数. 既然质量矩阵(19.3.10)在零阶为零, 一阶项给出

$$M_{ab}^{2} = \sum_{mn} Z_{an} Z_{bm} \left[\sum_{\ell} \left. \frac{\partial^{3} V_{0}(\phi)}{\partial \phi_{\ell} \partial \phi_{m} \partial \phi_{n}} \right|_{\phi = \phi_{0}} \phi_{1\ell} + \left. \frac{\partial^{2} V_{1}(\phi)}{\partial \phi_{m} \partial \phi_{n}} \right|_{\phi = \phi_{0}} \right] , \qquad (19.3.11)$$

其中Zan在这里由(19.2.40)的零阶近似给出:

$$Z_{an} = \sum_{b} F_{ab}^{-1} (it_b \phi_0)_n . \qquad (19.3.12)$$

为了计算质量矩阵(19.3.11),我们取方程(19.2.55)中的t为破缺对称性生成元 t_a 中的一个,令 $\phi = \phi_0$,并与($t_b\phi_0$)_m $\phi_{1\ell}$ 收缩:

$$0 = \sum_{nm\ell} \frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial \phi_\ell \partial \phi_m \partial \phi_n} \bigg|_{\phi = \phi_0} \phi_{1\ell} (t_a \phi_0)_n (t_b \phi_0)_m + \sum_{nm} \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \bigg|_{\phi = \phi_0} (t_a \phi_1)_n (t_b \phi_0)_m + \sum_{n\ell} \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} \bigg|_{\phi = \phi_0} (t_a t_b \phi_0)_n \phi_{1\ell} .$$

根据方程(19.2.6), 右边的第二项为零, 而第三项可以利用方程(19.3.4)进行重写, 这给了我们

$$\sum_{nm\ell} \left. \frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial \phi_\ell \partial \phi_m \partial \phi_n} \right|_{\phi = \phi_0} \phi_{1\ell}(t_a \phi_0)_n (t_b \phi_0)_m = \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi = \phi_0} (t_a t_b \phi_0)_n . \tag{19.3.13}$$

这样,在方程(19.3.11)使用上式就给出了赝Goldstone玻色子的质量矩阵公式,以V1的形式,这个公

式是

$$M_{cd}^{2} = -\sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \left[(t_{a}\phi_{0})_{n} (t_{b}\phi_{0})_{m} \left. \frac{\partial^{2} V_{1}(\phi)}{\partial \phi_{m} \partial \phi_{n}} \right|_{\phi=\phi_{0}} + (t_{a}t_{b}\phi_{0})_{n} \left. \frac{\partial V_{1}(\phi)}{\partial \phi_{n}} \right|_{\phi=\phi_{0}} \right].$$
(19.3.14)

为了使它是一个合理的质量矩阵, 它最好是正定的. 为了看到这一点, 将这一结果重写成对群参量 θ_{α} 的导数形式将是方便的. 对方程(19.3.8)做相对 θ_{β} 的微分, 令 $\theta = \theta_{*}$, 并使用方程(19.3.9)和 $\phi_{0} = L(\theta_{*})\phi_{*}$, 这给出

$$M_{ab}^{2} = \sum_{cd\alpha\beta} N_{a\alpha}^{-1}(\theta_{*}) N_{b\beta}^{-1}(\theta_{*}) F_{ac}^{-1} F_{bd}^{-1} \left. \frac{\partial^{2} V_{1}(L(\theta)\phi_{*})}{\partial \theta_{\alpha} \partial \theta_{\beta}} \right|_{\theta=\theta_{*}} .$$
(19.3.15)

由于 θ_* 是函数 $V_1(L(\theta)\phi_*)$ 的最小值点,右边的矩阵是正定的.

这一公式有一个稍微更加熟悉的版本, 在那个版本中, 质量矩阵表示成了对称性生成元与对称性破缺微扰的双重对易子的真空期望值. 假定哈密顿量中的对称性破缺微扰 H_1 是算符 Φ_n 的线性组合

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \tag{19.3.16}$$

(算符 Φ_n 不必须是基本标量场),这构成了生成元为 t_α 的对称群的一个表示,也就是说

$$[T_{\alpha}, \Phi_n] = -(t_{\alpha})_{mn} \Phi_m , \qquad (19.3.17)$$

其中 T_{α} 是该对称群的量子力学生成元.根据16.3节的结果,势的对称性破缺部分是

$$V_1(\phi) = \langle H_1 \rangle_{\langle \Phi \rangle = \phi} = \sum_n u_n \phi_n , \qquad (19.3.18)$$

中间表达式中的下标表示的是在期望值所取的最小能量态上, Φ_n 有期望值 ϕ_n . 这样, 真空对齐条 件(19.3.6)就变成

$$0 = \sum_n u_n (t_\alpha \phi_0)_n \; ,$$

或者,使用方程(19.3.17)

$$0 = \langle [T_{\alpha}, H_1] \rangle_0 , \qquad (19.3.19)$$

下标0现在表示期望值取在 Φ_n 有期望值 ϕ_{0n} 的真空态上. 另外, 方程(19.3.14)在这里所给出的质量 矩阵是

$$M_{cd}^2 = -\sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \sum_n u_n (t_a t_b \phi_0)_n ,$$

使用方程(19.3.17), 这变成

$$M_{cd}^2 = -\sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \langle [T_a, [T_b, H_1]] \rangle_0 .$$
(19.3.20)

它关于c和d是对称的.为了看到这一点,注意到,利用Jacobi恒等式和群对易关系,方程(19.3.20)与 它交换指标c,d后的差可以写成 $\langle [T_{\alpha}, H_1] \rangle_0$ 的线性组合,而根据真空对齐条件(19.3.19),这为零.质 量矩阵(19.3.20)同样也是正定的,这是因为,对于旋转真空态exp($i\theta_a T_a$)|0 \rangle , $\theta = 0$ 这一点位于真空 能 $\langle \exp(-i\theta_a T_a)H_1 \exp(i\theta_a T_a) \rangle_0$ 的最小值点.

19.4 作为Goldstone玻色子的π介子

在基本粒子物理学中, 破缺对称性的经典粒子是强相互作用被称为SU(2) × SU(2)的近似对称性. 根据我们目前的理解, 产生这一对称性的原因是两个夸克场u和d碰巧有相对较小的质量. (19.7节给出了一个估计.) 在u和d是无质量的近似下, 量子色动力学的拉格朗日量(18.7.5)是

$$\mathscr{L} = -\bar{u}\gamma^{\mu}D_{\mu}u - \bar{d}\gamma^{\mu}D_{\mu}d - \cdots , \qquad (19.4.1)$$

其中*D*_μ是色规范协变导数(见方程(15.1.10))而"···"指代那些只包含胶子场和/或其它的夸克味但 不包含*u*或*d*的项.这一拉格朗日量在如下的变换下不变:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \exp\left(\mathrm{i}\,\vec{\theta}^V \cdot \vec{t} + \mathrm{i}\,\gamma_5\vec{\theta}^A \cdot \vec{t}\,\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \qquad (19.4.2)$$

其中花是同位旋矩阵的3-矢*

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, $t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

而 $\vec{\theta}^V$ 和 $\vec{\theta}^A$ 是独立的实3-矢.** 这一Lie代数可以写成两个对易的SU(2)子代数的形式,这两个子代数分别只作用在夸克场的左手部分和右手部分上,它们的生成元是

$$\vec{t}_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\vec{t}$$
, $\vec{t}_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\vec{t}$, (19.4.3)

并满足对易关系

$$[t_{Li}, t_{Lj}] = \mathbf{i} \,\epsilon_{ijk} \, t_{Lk} \,, \tag{19.4.4}$$

$$[t_{Ri}, t_{Rj}] = \mathbf{i} \,\epsilon_{ijk} \, t_{Rk} \,, \qquad (19.4.5)$$

$$[t_{Li}, t_{Rj}] = 0 . (19.4.6)$$

因此底层的对称群可以等同为 $SU(2) \times SU(2)$. 它有另一个显然的SU(2)子群,这一子群由 $\vec{\theta}^A = 0$ 的普通同位旋变换构成,而它的生成元是

$$\vec{t} = \vec{t}_L + \vec{t}_R \ . \tag{19.4.7}$$

 $SU(2) \times SU(2)$ 的代数可以写成t和另一生成元三重态的形式:

$$\vec{x} = \vec{t}_L - \vec{t}_R = \gamma_5 \vec{t} \tag{19.4.8}$$

而对易关系是

$$[t_i, t_j] = \mathbf{i} \,\epsilon_{ijk} \,t_k \,, \tag{19.4.9}$$

$$[t_i, x_j] = \mathbf{i} \,\epsilon_{ijk} \, x_k \,\,, \tag{19.4.10}$$

$$[x_i, x_j] = \mathbf{i} \,\epsilon_{ijk} \,t_k \,. \tag{19.4.11}$$

^{*}为了与普通3-矢区分开,我们用箭头来标记同位旋空间中的3-矢,对于普通3-矢则继续用黑体字母标记.

^{**}拉格朗日量(19.4.1)有这一对称性是因为 $\gamma_5\psi\gamma^{\mu} = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\mu} = +\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5$.这一拉格朗日量还有另外两个连续的内部对称性.一个是重子数守恒,即在*u*夸克场和*d*夸克场的普通相位变换下的不变性.这是未破缺的且与另一个对称性对易,所以它不影响我们这一节的讨论.另一个对称性是夸克二重态与exp(ia γ_5)相乘后的不变性.正如23.5节所讨论的,这一U(1)对称性被瞬子所附带的非微扰效应内在且严重地破坏了.

我们将看到这一SU(2) × SU(2)对称性是自发破缺的, 而该对称群由花生成的同位旋子群是一个普通的未破缺(尽管是近似的)对称性.

通过Noether的方法(参看7.3节), 我们可以从拉格朗日量(19.4.1)中导出守恒矢量流和守恒轴 矢量流

$$\vec{V}^{\mu} = i \, \bar{q} \gamma^{\mu} \vec{t} q , \qquad \qquad \vec{A}^{\mu} = i \, \bar{q} \gamma^{\mu} \gamma_5 \vec{t} q , \qquad (19.4.12)$$

$$\partial_{\mu}\vec{V}^{\mu} = \partial_{\mu}\vec{A}^{\mu} = 0 , \qquad (19.4.13)$$

其中q是夸克二重态,

$$q \equiv \left(\begin{array}{c} u\\ d \end{array}\right) \tag{19.4.14}$$

它们所附带的荷分别是同位旋的生成元和剩余对称性的生成元

$$\vec{T} = \int d^3x \, \vec{V}^0 \,,$$
 (19.4.15)

$$\vec{X} = \int d^3x \, \vec{A}^0 \,.$$
 (19.4.16)

对流(19.4.12)归一化使得量子算符了和衣满足与矩阵在和恋相同的对易关系

$$[T_i, T_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,T_k \ , \tag{19.4.17}$$

$$[T_i, X_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,X_k \ , \tag{19.4.18}$$

$$[X_i, X_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,T_k \ . \tag{19.4.19}$$

作用在夸克场上,这些算符诱导了变换(19.4.2),也就是说

$$\left[\vec{T},q\right] = -\vec{t}\,q \ , \tag{19.4.20}$$

$$\left[\vec{X},q\right] = -\vec{x}\,q \ , \tag{19.4.21}$$

如果这一对称性是精确对称性且未破缺,那么它会要求任何的单强子态 $|h\rangle$ 与另一个字称相反但自旋,重子数且奇异数相同的态 $\vec{X}|h\rangle$ 简并.[†]在强子频谱中没有看到这样的字称倍增,所以我们只能得出这样的结论:如果手征对称性 $SU(2) \times SU(2)$ 完全只是一个很好的近似,那么它必须自发破缺到它的同位旋SU(2)子群.在这一情况下,算符 \vec{X} 把单强子态 $|h\rangle$ 变换到了强子h加上一个无质量的赝标量Goldstone玻色子,所以强子频谱的字称倍增是不需要的.

量子色动力学是否真的呈现出了这样的对称性破缺模型? 这个问题包含了强相互作用动力 学所有的复杂性. 我们将在19.9节看到, 相信量子色动力学中的同位旋*SU*(2)没有自发破缺有着一 般性的理由. 但是要证明*SU*(2) × *SU*(2)的手征部分是自发破缺的则困难得多. (但根据22.5节所 给出的一个讨论, 对于有三个夸克味的量子色动力学, 它的*SU*(3) × *SU*(3)对称性一定是自发破缺 的.) 在某种意义上, 在20世纪60年代意识到无需对手征对称性的破缺机制有细致的理解算得上是 一个突破; 通过假定*SU*(2) × *SU*(2)破缺到了*SU*(2), 我们就导出了这一对称性破缺最有趣的结果.

[†]满足这一条件的方法之一让强子的质量为零,有螺度为± $\frac{1}{2}$ 的两个态|±⟩,但自旋,重子数以及奇异数相同;那么态|+⟩+|-⟩和|+⟩-|-⟩将会有相反的宇称.除非我们对轴矢量流的矩阵元做出进一步的假定,否则我们无法确定未破缺的手征对称性必然给出核子质量为零.然而,正如我们将在22.5节所看到的,事实上,一个精确的未破缺手征对称性将会要求一些重子是无质量的.

u夸克和d夸克的质量虽小但不为零,所以 $SU(2) \times SU(2)$ 对称性不是精确的. 破缺的近似手征 对称性蕴含了一个近似无质量Goldstone玻色子的存在,而这个Goldstone玻色子与破缺对称性生 成元 \vec{X} 所生成的Goldstone玻色子有着相同的量子数:它必须是一个宇称为负,自旋为零,同位旋 为1,而重子数和奇异数为零的态.事实上,最轻的强子是 π 介子,它精确拥有这些量子数,由此我 们得出: π 介子就是近似手征对称性自发破缺所附带的Goldstone玻色子. 正如我们将在下面看到 的,与 m_u 和 m_d 的线性组合成正比的是 m_{π}^2 而不是 m_{π} ,并且 $m_{\pi}^2/m_N^2 \simeq 0.022$ 非常小,所以我们从自 发破缺的 $SU(2) \times SU(2)$ 所导出的结果应该是合理准确的.

在探索π介子相互作用的手征对称性会产生什么样的结果时,注意到如下的事实将是非常有用的:尽管强相互作用不以任何方式依赖于弱相互作用的存在,但对称流^νμ和*Å*μ碰巧进入到像 核β-衰变这样的奇异数守恒的半轻子弱相互作用中.正如我们将在21.3节所看到的,电弱相互作 用的标准模型要求这些相互作用在低能时的有效拉格朗日量必须采取形式:

$$\mathscr{L}_{wk} = -\frac{\mathrm{i}G_{wk}}{\sqrt{2}} \left(V_+^{\lambda} + A_+^{\lambda} \right) \sum_{\ell} \bar{\ell} \gamma_{\lambda} (1 + \gamma_5) \nu_{\ell} + \mathrm{H.c.}$$
(19.4.22)

其中 ℓ 取遍三个轻子e, μ 和 τ 的重整化场; 而 ν_{ℓ} 取遍相应中微子的重整化场; 而 V_{\pm}^{λ} 和 A_{\pm}^{λ} 是电荷改变流

$$V_{\pm}^{\lambda} = V_{1}^{\lambda} \pm iV_{2}^{\lambda}$$
, $A_{\pm}^{\lambda} = A_{1}^{\lambda} \pm iA_{2}^{\lambda}$. (19.4.23)

常数^{††}*G*_{wk}可以从同一同位旋多重态中自旋为零的态之间的 β -跃迁速率中测量出来,例如衰 变 $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e \pi^{14}O \to {}^{14}N^* + e^+ + \nu_e$. 这些跃迁中的动量传递非常小,所以(强相互作 用中的)字称守恒和旋转不变性告诉我们:只有 $\int d^3x V^0 = T_1 - iT_2$ 的矩阵元进入到了这些衰变 的*S*-矩阵元中.这一算符在一给定同位旋多重态的各种态之间的矩阵元正是Clebsch-Gordan系 数,所以从这些"0 \to 0"过程的速率中,我们可以计算出方程(19.4.22)中耦合常数的一个值^[9]: *G*_{wk} $\simeq 1.14959(38) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. 另一方面,在 π 介子的衰变过程 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 中,我们需要的 唯一流矩阵元是*A*^{\(\)}在单 π 介子态和真空态之间的矩阵元:

$$\langle \text{VAC}|A_i^{\mu}(x)|\pi_j\rangle = \frac{\mathrm{i}F_{\pi}\,\delta_{ij}\,p_{\pi}^{\mu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\pi}\cdot x}}{2(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_{\pi}^0}}\,,\tag{19.4.24}$$

除了因子 F_{π} 外,剩下的量都是已知的. π 介子衰变的速率变成

$$\Gamma(\pi \to \mu + \nu) = \frac{G_{\rm wk}^2 F_{\pi}^2 m_{\mu}^2 (m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)^2}{16\pi m_{\pi}^3} .$$
(19.4.25)

已经知道 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 的速率是 $\Gamma = (2.6033(24) \times 10^{-8} \text{ s})^{-1}$,再加上前面 G_{wk} 的值,我们发现[‡]

$$F_{\pi} \simeq 184 \,\mathrm{MeV}$$
 . (19.4.26)

我们现在来考察Ā^μ在单核子态之间的矩阵元. 它本身就非常有趣,并且像19.2节讨论的那样, 它提供了我们计算核子碰撞过程中发射低能π介子所需的信息. 沿用10.6节用于电磁流的相同原

^{††} G_{wk} 与通常的Fermi耦合常数和Cabibbo角 θ_C 的关系是 $G_{wk} = G_F \cos \theta_C$; 参看21.3节.

[‡]遇到 π 介子衰变常数 f_{π} 是很常见的, 以 F_{π} 的形式, 它的各种定义方式是 F_{π} , $F_{\pi}/\sqrt{2}$ 或 $F_{\pi}/2$.

因,我们会发现Lorentz不变性和宇称守恒要求这一矩阵元采取如下的形式^{‡‡}

$$\langle p | A^{\mu}_{+}(x) | n \rangle = (2\pi)^{-3} e^{iq \cdot x} \\ \times \bar{u}_{p} \Big[-i\gamma^{\mu} \gamma_{5} f(q^{2}) + q^{\mu} \gamma_{5} g(q^{2}) + iq_{\nu} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \gamma_{5} h(q^{2}) \Big] u_{n} , \qquad (19.4.27)$$

其中 $q \equiv p_n - p_p$. 在 $SU(2) \times SU(2)$ 对称性是精确对称性的近似下, 流守恒要求

$$q_{\mu}\langle p|A^{\mu}_{+}(x)|n\rangle = 0.$$
 (19.4.28)

利用Dirac旋量 u_p 和 u_n 的定义方程,

 $\bar{u}_p(\mathrm{i}\,\not\!\!p_p + m_N) = (\mathrm{i}\,\not\!\!p_n + m_N)u_n = 0 \ ,$

我们看到

$$q_{\mu}\bar{u}_{p}[-\mathrm{i}\gamma^{\mu}\gamma_{5}]u_{n} = -2m_{N}\bar{u}_{p}\gamma_{5}u_{n}$$

因而方程(19.4.28)要求

$$2m_N f(q^2) = q^2 g(q^2) . (19.4.29)$$

如果 $g(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 处没有奇点,那么(19.4.29)将会要求 $m_N = 0$ 或f(0) = 0,前者肯定不对,后者也不对.事实上,在中子衰变这样的低能核子 β -衰变中测量出了f(0),在中子衰变中这通常称为 g_A ;我们发现这个量拥有值

$$f(0) \equiv g_A = 1.2573(28) . \tag{19.4.30}$$

 m_N 和 $f(0) = g_A$ 均非小量的事实要求, 在精确 $SU(2) \times SU(2)$ 对称性的极限下, $g(q^2)$ 必须在 $q^2 \rightarrow 0$ 时有一极点:

$$g(q^2) \to \frac{2m_N g_A}{q^2}$$
 (19.4.31)

无质量 π 介子会自然地提供这样的极点,而 π 介子也是精确 $SU(2) \times SU(2)$ 对称性的自发破缺 所要求的. 假定 π 介子与单核子态的耦合就如同相互作用拉格朗日量是 $^{\ddagger}-2iG_{\pi N}\vec{\pi}N\gamma_5\vec{t}N$. 方 程(19.4.24)告诉我们,流在单 π 介子态和真空态之间的矩阵元就如同 $\vec{A}^{\mu}(x)$ 中有了形式为 $F_{\pi}\partial^{\mu}\vec{\pi}/2$ 的项. 因此, 在 $q^2 \rightarrow 0$ 的极限下,矩阵元(19.4.27)有极点

$$\langle p|A^{\mu}_{+}(x)|n\rangle \rightarrow \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}}{(2\pi)^{3}}\right] \left[\mathrm{i}(2\pi)^{4} 2G_{\pi N}\bar{u}_{p}(\mathrm{i}\gamma_{5})u_{n}\right] \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{4}q^{2}}\right] \left[\mathrm{i}q^{\mu}F_{\pi}/2\right] \,.$$

与方程(19.4.27)相比,我们看到交换单 π 介子在 $q^2 \rightarrow 0$ 时给了函数 $g(q^2)$ 一个极点

$$g(q^2) \to \frac{G_{\pi N} F_{\pi}}{q^2}$$
 (19.4.32)

汇合方程(19.4.31)和(19.4.32),我们发现

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_{\pi}} \ . \tag{19.4.33}$$

^{‡‡}标准模型中的流*A*[#]_±拥有电荷共轭性,这使得系数*h*(*q*²)为零.在弱流中可能会有电荷共轭性相反的"第二类"项^[10], 它会给出不为零的*h*(*q*²),但还没有这种项存在的证据.我们将会看到,对于从手征对称性得到的推论而言,保留*h*(*q*²)项 并不会有什么影响.

[°]这是赝标量π介子-核子耦合G_{πN}的传统定义,在这里引入因子2是为了与同位旋矩阵中的1/2相抵消.
这是著名的Goldberger-Treiman关系.^[11] 它工作地相当好; 取 $m_N = (m_p + m_n)/2 = 9.389$ MeV, $g_A = 1.257 \pi F_{\pi} = 184$ GeV,这给出 $G_{\pi N} \simeq 12.7$,与各种方法(包括核子-核散射中单 π 介子极点的 效应以及 π 介子-核散射中单核子极点的效应)测量出来的值th $G_{\pi N} = 13.5$ 符合得相当好.

在真实世界中, π介子不是无质量的, SU(2) × SU(2)也不是对称性(即使在自发破缺之前)也 不是精确的.这一情况可以用上一节所给出的一般形式理论进行分析.拉格朗日量(19.4.1)在该哈 密顿量中产生了对称性破缺项

$$H_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d = (m_u + m_d)\Phi_4^+ + (m_u - m_d)\Phi_3^-$$
(19.4.34)

其中

$$\Phi_4^+ \equiv \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d) , \qquad \Phi_3^- = \frac{1}{2}(\bar{u}u - \bar{d}d) . \qquad (19.4.35)$$

算符 Φ_4^+ 和 Φ_3^- 是空间分量,并且正如这个记号所要显示的,它们在 $SU(2) \times SU(2)$ 下按照独立手征4-矢 Φ_α^\pm 的分量进行变换:

$$\vec{\Phi}^+ = i\bar{q}\gamma_5 \vec{t}q$$
, $\Phi_4^+ = \frac{1}{2}\bar{q}q$, (19.4.36)

$$\vec{\Phi}^- = \bar{q}\,\vec{t}q$$
, $\Phi_4^- = -\frac{1}{2}i\bar{q}\gamma_5 q$. (19.4.37)

它们是手征4-矢,也就是说

$$\left[\vec{T}, \Phi_n^{\pm}\right] = -\sum_m (\vec{\mathscr{T}})_{nm} \Phi_m^{\pm} , \qquad (19.4.38)$$

$$\left[\vec{X}, \Phi_n^{\pm}\right] = -\sum_m (\vec{\mathscr{X}})_{nm} \Phi_m^{\pm} , \qquad (19.4.39)$$

其中 $\bar{\mathscr{T}}$ 和 $\bar{\mathscr{X}}$ 是4×4厄米矩阵,它们构成了 $SU(2) \times SU(2) \equiv SO(4)$ 代数的4-矢表示:

$$(\mathscr{T}_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} , \qquad (\mathscr{T}_a)_{b4} = (\mathscr{T}_a)_{4b} = (\mathscr{T}_a)_{44} = 0 , \qquad (19.4.40)$$

$$(\mathscr{X}_a)_{b4} = -(\mathscr{X}_a)_{4b} = -\mathrm{i}\delta_{ab} , \qquad (\mathscr{X}_c)_{ab} = (\mathscr{X}_c)_{44} = 0 .$$
 (19.4.41)

这一记号使得很容易就看到生成元T₁, T₂, X₁, X₂和X₃的真空对齐条件, 它们分别采取如下的形式

$$0 = \langle \Phi_2^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^+ \rangle_0 = \langle \Phi_2^+ \rangle_0 = (m_u + m_d) \langle \Phi_3^+ \rangle_0 + (m_d - m_u) \langle \Phi_4^- \rangle_0 .$$
(19.4.42)

我们已经假定了, 在u夸克和d夸克的质量为零的前提下, 对称性SU(2) × SU(2)自发破缺的方式会保护由 \vec{T} 生成的SU(2)对称性和宇称不破缺, 在这一情况下, $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ 指向4-方向并且 $\langle \Phi_n^- \rangle_0$ 为零, 这使得条件(19.4.42)是满足的. 但有了 $m_u = m_d = 0$, 通过对这一对称性破缺解做任意的SU(2) × SU(2)变换, 我们就可以得到另一个宇称定义不同的对称性破缺解. 因此当u夸克和d夸克的质量为零时, 尽管在所有情况中 $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$, 但是无法分辨 $\langle \Phi_n^+ \rangle_0 = 0$ 应该指向什么方向, 或者SU(2) × SU(2)的哪个SU(2)子群是不破缺的. 真空对齐条件(19.4.43)告诉我们, 若对称性被被

^{th教科书^[12]值是 $G_{\pi N}^2/4\pi = 14.3$ 或 $G_{\pi N} = 13.4$,关于中子-质子在162 Gev处的电荷交换散射,最近一项高精度的研究^[13]给出了值 $G_{\pi N}^2/\pi = 14.6 \pm 0.3$ 或 $G_{\pi N} = 13.5$.}

微扰(19.4.34)内在地破坏了,并且对称性自发破缺的方式使得 $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$,那么真空"排列"的方式 要使 $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ 指向4-方向,这使得未破缺的*SU*(2)对称性是普通的同位旋.

这一形式理论可以用来计算π介子质量. 从方程(19.4.39)—(19.4.41), 我们发现

$$[X_a, [X_b, \Phi_4^+]] = \delta_{ab} \Phi_4^+ , \qquad [X_a, [X_b, \Phi_3^-]] = \Phi_a^- \delta_{b3} . \qquad (19.4.43)$$

另外,同位旋不变性告诉我们,19.2节引入的对称性破缺参量 F_{ab} 正比于 δ_{ab} ,根据(19.4.24),比例因 子就是 $F_{\pi}/2$,所以

$$F_{ab} = \delta_{ab} F_{\pi} / 2 \ . \tag{19.4.44}$$

因此, 方程(19.3.20)就给出了π介子质量矩阵

$$m_{ab}^2 = \delta_{ab} m_\pi^2 , \qquad (19.4.45)$$

其中

$$m_{\pi}^2 = -4(m_u + m_d) \langle \Phi_4^+ \rangle_0 / F_{\pi}^2 . \qquad (19.4.46)$$

虽然我们没有对m_u和m_d的比值做任何假定,但是带电π介子和中性π介子的质量结果是相等的, 这是十分惊人的.我们会在下面看到这一比值并不在1附近;同位旋是一个好量子数不是因为u夸 克和d夸克质量近乎相等,而是因为它们的质量很小.另外,正如所承诺的,正比于夸克质量的 是π介子质量的平方,所以夸克质量应该非常小. (19.7节有一个估计.)观测到的π介子质量差并非 源于u夸克和d夸克的质量差,而是源于电磁.诚然,π介子同位旋多重态的质量差是唯一一个仅用 交换单光子就成功计算出的质量差.^[14]

当然,即使把夸克质量考虑在内,我们依旧可以用方程(19.4.24)来定义 F_{π} ;它的散度给出

$$\langle \text{VAC} | \partial_{\mu} A_{i}^{\mu}(x) | \pi_{j} \rangle = \frac{F_{\pi} \delta_{ij} m_{\pi}^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i} p_{\pi} \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_{\pi}^{0}}} .$$
(19.4.47)

取代假定 $\partial_{\mu}\vec{A}^{\mu}$ 为零,我们现在可以假定它很小,大约是 m_{π}^{2} 阶,除此之外,为了弥补 m_{π}^{2} 比较 小还要有一个pi介子极点.根据方程(19.4.47), $\partial_{\mu}\vec{A}^{\mu}$ 在单 π 介子极点附加的矩阵元行为就如 同 $\partial_{\mu}\vec{A}^{\mu}$ 是 $F_{\pi}m_{\pi}^{2}$ 乘以一个合适的重整 $(\pi$ 介子场.例如, $\partial_{\mu}A_{+}^{\mu}$ 的单核子矩阵元应该是

$$\langle p|\partial_{\mu}A^{\mu}_{+}(0)|n\rangle \simeq \frac{F_{\pi}m_{\pi}^{2}}{2} \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{4}(q^{2}+m_{\pi}^{2})}\right] \left[\mathrm{i}(2\pi)^{4}2G_{\pi N}\bar{u}_{p}(-\mathrm{i}\gamma_{5})u_{n}\right], \qquad (19.4.48)$$

所以,以(19.4.27)中形状因子的形式

$$q^2 g(q^2) - 2m_N f(q^2) \simeq -\frac{G_{\pi N} F_\pi m_\pi^2}{q^2 + m_\pi^2}$$
 (19.4.49)

可以预期,这一公式不仅在 $q^2 \rightarrow -m_{\pi}^2$ 的极限下是成立的,当 q^2 的量级时 m_{π}^2 时,这一公式也是成立的,这是因为对于所有这样小的 q^2 ,主导 $\partial_{\mu}A^{\mu}$ 矩阵元的是 π 介子极点.另外,对于这样的 q^2 ,取代方程(19.4.32),我们有

$$g(q^2) \simeq \frac{G_{\pi N} F_{\pi}}{q^2 + m_{\pi}^2}$$
 (19.4.50)

从方程(19.4.49)和(19.4.50),我们发现对于 m_{π}^{2} 阶的 q^{2} ,

$$f(q^2) \simeq G_{\pi N} F_{\pi} / 2m_N$$
 (19.4.51)

 \cdot 139 \cdot

 $在q^2 从0到m_{\pi}^2
 阶的范围内, 这一函数粗略是一常数, 这是不奇怪的, 因为它没有单π介子极点, 并且$ $在q²这样小的范围内也没有其它东西能给与它实质上的变化. 这个常数值近似为<math>f(0) \equiv g_A$, 进而 方程(19.4.51)又一次给出了Goldberger-Treiman关系.

现在,我们可以用19.2节的结果计算在任意过程 $\alpha \to \beta$ 中发射单个低能 π 介子的振幅了.我们发现,在用于计算该振幅的Feynman图中, π 介子只能在过程的外线上发射,而方程(19.2.49)表明,计算这些贡献时可以把 π 介子场的相互作用看做 $\partial_{\mu} \vec{\pi} \cdot \vec{A}_N / F_{\pi}$,其中的下标N是指我们扔掉了轴矢量流矩阵元中的单 π 介子极点项.我们从方程(19.4.27)(并使用同位旋不变性)得出,对于从核子线上发射的 π 介子,这一相互作用实际上等效于

$$-rac{\mathrm{i} g_A}{F_\pi}\,\partial_\mu ec \pi\, ar N \gamma^\mu \gamma_5 ec t N$$
 .

利用自由粒子的Dirac方程,我们可以看到,对于质量壳上的核子(即,位于图19.2中的单核子极点),这等效于赝标量相互作用—2i $m_N g_A \vec{\pi} \cdot \bar{N} \gamma_5 \vec{t} N/F_{\pi}$.这又提供了Goldberger-Treiman关系(19.4.33)的另一例证.

我们这里的讨论并不是按照这些概念的历史发展顺序展开的.事实上,按年代来讲,历史发展的进程几乎与这里论述的顺序截然相反. 在粒子物理中,对称性破缺始于Goldberger-Teriman关系(19.4.33),这是在1957年基于对 π 介子衰变的动力学计算导出的.为了解释这一非常粗略计算难以置信的成功,几个理论家^[15]引入了"轴矢量流的部分守恒(partial conservation of the axial-vector current)"(PCAC)这个概念,即,尽管轴矢量流本身不是守恒的(π 介子的确会衰变说明了这一点),但是它的散度 $\partial_{\mu}A_{\pm}^{\mu}$ 正比于 π 介子场. 就其本身而言,这个假设毫无意义——我们在第10章 看到,对于任意场,只要它在真空和单 π 介子态之间的矩阵元不为零,它就可以被认为是 π 介子场.尽管当时还不清楚,但真正被假定的是轴矢量流的散度很小,约为 m_{π}^{2} 阶,除此之外,还有一个 π 介子极点可以赋予它很大的矩阵元值.这个问题在很大程度上被Nambu在1960年的一篇文章上澄清了,^[16]他指出,在 π 介子质量为零的极限下,轴矢量流可以视为是精确守恒的,在这种情况下,Goldberger-Treiman关系可以像我们这里做的那样推导出来.在这篇文章以及Nambu与Jona-Lasinio随后的一篇文章中,^[17] Nambu意识到 π 介子表现出无质量或者近无质量是某个精确或近似对称性破缺的表现.在与其它合作者的努力下,^[18] Nambu还给出了在各种过程中如何计算发射单个软 π 介子的速率.随后,Goldstone^[3]注意到破缺的对称性总是蕴含着无质量玻色子,而这在1962年由Goldstone,Salam和我^[5]证明了,证明的方法就是19.2节给出的讨论.

这个把 π 介子作为Goldstone玻色子的早期工作完全不依赖对破缺对称群的性质所做的任何特殊假定;例如,它可以是三个对易U(1)群的直积,这个群的生成元构成了同位旋矢量,亦或是非紧群SO(3,1),这样在对易关系(19.4.19)的右边就会出现一个负号.仅当我们所考察的过程包含两个以上 π 介子时,破缺对称群的性质才变得重要起来,这始于1965年的Adler-Weisberger求和规则,^[19]它成功地证明了破缺对称性确实是 $SU(2) \times SU(2)$.(这样的过程将在下一节进行讨论.)找到对称 群 $SU(2) \times SU(2)$ 导致了关注点的偏移,^[20]人们越来越关注这一对称性在强相互作用物理中的应用,而远离了早期对流本身的关注.

这一工作完全不是在强作用的一个特定理论下完成的. 量子色动力学在1973年被快速地接受为强相互作用的正确理论, 其中的原因之一就是它将SU(2) × SU(2)对称性解释为u夸克和d夸克质量太小所给出的简单结果.

19.5 **有效场论**: π**介**子和核子

在19.2节, 通过给对称流在态 α 和 β 之间的矩阵元附加流守恒条件, 我们知晓了如何计算在跃 迁 $\alpha \rightarrow \beta + B$ 中发射一个低能Goldstone玻色子B的振幅. 在这个计算中, 我们没有用到破缺对称 群的任何细节; 流守恒就是我们需要的全部. 如果我们想计算发射和/或吸收两个Goldstone玻色 子的矩阵元, 就像Goldstone玻色子散射过程中那样, 一个新的要素会参与进来. 这里我们必须要 给形如

 $\langle \beta | T\{J_1^{\lambda_1}(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)\} | \alpha \rangle$

这样的矩阵元附加流守恒条件,其中态 α 和 β 包含除这两个Goldstone玻色子以外其它参与反应的粒子.然而,当我们用散度算符 $\partial/\partial x_1^{\lambda_1}$ 作用在这一矩阵元上时,编时乘积 $T\{\cdots\}$ 的定义中所包含的函数 $\theta(x_1^0 - x_2^0)$ 和 $\theta(x_2^0 - x_1^0)$,它们的导数所给出的贡献不为零.这一贡献等同于等时对易子 $\delta(x_1^0 - x_2^0)[J_1^0(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)]$ 的矩阵元,它的值依赖于群代数的对易关系.这使得这样的多Goldstone玻色子过程特别有趣,我们可以利用它们通过实验确定破缺对称群的性质,而对于仅包含单个Goldstone玻色子的过程,这一方法是不可能的.由于出现了这样的流对易子,这一方法被称为流代数方法.^[21]

流代数方法被用于多Goldstone玻色子振幅的早期计算中.^[22] 不幸的是,这样的计算是很冗杂的,尤其是所包含的Goldstone玻色子的个数在3个以上时,而且像量子色动力学的手征对称性这样非精确的对称性,对其该如何处理也毫无头绪.由于这个原因,引入了另一种更加物理的计算技巧,^[23] 这个技巧基于有效拉格朗日量的使用:我们就通过微扰论的方法,利用Goldstone玻色子以及α态和β中的其它粒子的某个拉格朗日量计算Goldstone玻色子的振幅,对这个拉格朗日量的要求是它服从假定的破缺对称性.

最初,有效拉格朗日量处理的合理性是基于流代数.通过使用流代数可以看到,一旦知道 了破缺对称性所附带的流的等时对易关系,过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 的矩阵元,以及流在各个单粒子态之间 的矩阵元,在过程 $\alpha \rightarrow \beta + B_1 + B_2 + \cdots$ 中发射一组低能Goldstone玻色子的振幅就被确定了. 我们知道,通过Noether的技巧,遵循破缺对称性的拉格朗日量将允许构建守恒流并使其有着合 适的等时对易子,所以,如果我们就用这样的拉格朗日量计算低能Goldstone玻色子的振幅,并 给 $M_{\beta\alpha}$ 和流的单粒子矩阵元代入正确的值,我们所得到的答案肯定与流代数提供的答案相同.在 只有Goldstone玻色子相互作用的情况中,态 α 和 β 均可以取成真空,而我们所需要的信息就只剩下 单个Goldstone玻色子与真空之间的矩阵元*F*.

这类例子中第一个,^[23]其出发点是σ-模型的拉格朗日量.^[24]我们暂且将关注点限制在这一模型的玻色截面,它的拉格朗日量是19.2节所使用的例子中对称性为SO(4)的那一个:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi_{n}\partial^{\mu}\phi_{n} - \frac{\mathscr{M}^{2}}{2}\phi_{n}\phi_{n} - \frac{\lambda}{4}(\phi_{n}\phi_{n})^{2} , \qquad (19.5.1)$$

其中的n对值1, 2, 3, 4求和, 赝标量场 $\vec{\phi}$ 是同位旋矢量, 标量场 ϕ_4 是同位旋标量.

任何类型的有效拉格朗日量所面临的直接问题是,为了用它计算散射振幅,要么我们必须把 微扰论每一阶的所有Feynman图都纳入进来,要么找到某个基本原理进而扔掉高阶导数项.对于 破缺对称性通过各种场的线性变换进行实现的拉格朗日量,像(19.5.1),我们还无法找到这样的 基本原理.幸运的是,任何这样的拉格朗日量都可以被重塑,进而可以用Feynman图生成振幅关 于Goldstone玻色子能量的幂级数表达式.为了做到这点,我们必须在时空中的每一点进行对称变 换以消除掉与该理论的Goldstone玻色子相对应的场. Goldstone玻色子自由度则作为该对称变换的参量重新出现在变换后的理论中. 然而,既然这个拉格朗日量在时空独立的对称变换下不变,那 么当这个Goldstone玻色场是常数时,这个拉格朗日量必须独立于这个新的Goldstone玻色场,因此 在该拉格朗日量中,凡是包含这些新Goldstone玻色子的项至少含有一个该场的时空导数. 这些导数在我们计算Goldstone玻色子反应的S-矩阵元时引入了Goldstone玻色子的能量,并且,正如我们 将看到的,这使得我们可以使用这一拉格朗日量去构建该S-矩阵元关于这些能量的幂级数表达式.

例如,为了将拉格朗日量(19.5.1)重塑成有用的形式,我们将4-矢 ϕ_n 写成在前三个分量(ϕ_n 的 Goldstone部分)为零的4-矢 $\{0,0,0,\sigma\}$ 上作用一个手征旋转*R*:

$$\phi_n(x) = R_{n4}(x)\sigma(x) \tag{19.5.2}$$

其中R_{nm}(x)是正交矩阵

$$R^{T}(x) R(x) = 1 (19.5.3)$$

因此

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{n} \phi_n(x)^2} .$$
 (19.5.4)

这样,拉格朗日量(19.5.1)就变成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{4} (R_{n4}\partial_{\mu}\sigma + \sigma\partial_{\mu}R_{n4})^2 - \frac{1}{2}\mathscr{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 .$$
(19.5.5)

由于R是正交矩阵, $\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma$ 项与R无关, 并且交叉项为零

$$\sum_{n} R_{n4}^2 = 1 , \qquad \sum_{n} R_{n4} \partial_{\mu} R_{n4} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \sum_{n} R_{n4}^2 = 0 ,$$

所以ℒ变成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - \frac{1}{2}\sigma^{2}\sum_{n=1}^{4}\partial^{\mu}R_{n4}\partial_{\mu}R_{n4} - \frac{1}{2}\mathscr{M}^{2}\sigma^{2} - \frac{\lambda}{4}\sigma^{4}.$$
 (19.5.6)

如果 M^2 是负的,那么 σ 的真空期望值就不为零,这一期望值在最低阶由后两项和的最小值点给出, 处于 $\sigma = |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$.

取代场变量 ϕ_n ,我们的变量现在是 $\sigma - |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ 以及用来参数化旋转R的其它参量.例如,这 些参量可以简单地选为 R_{a4} 本身(其中a, b从现在开始是同位旋矢量指标,取值1,2,3),而 R_{44} 由R是 正交矩阵这一条件决定.另一种参数化将会给出更加简单的最终结果,并且由于这些原因在历史 上也是首先使用这种参数化方式.这种参数化是定义

$$\zeta_a \equiv \frac{\phi_a}{\phi_4 + \sigma} \tag{19.5.7}$$

并取

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2} = -R_{4a} , \qquad R_{44} = \frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2} , \qquad R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a\zeta_b}{1+\vec{\zeta}^2} , \qquad (19.5.8)$$

使得

$$\phi_a/\sigma = R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2} , \qquad \phi_4/\sigma = R_{44} = \frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2} .$$
 (19.5.9)

那么拉格朗日量(19.5.6)变成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - 2\sigma^{2}\vec{D}_{\mu}\cdot\vec{D}^{\mu} - \frac{1}{2}\mathscr{M}^{2}\sigma^{2} - \frac{\lambda}{4}\sigma^{4} , \qquad (19.5.10)$$

其中

$$\vec{D}_{\mu} \equiv \frac{\partial_{\mu}\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2} \ . \tag{19.5.11}$$

无论我们使用那种参数化方式,场ζ的相互作用都包含场导数,它显然描述的是无质量粒子. 它们 是(相差一个归一化)我们的新π介子场.

除去表象不同,这一拉格朗日量在SO(4)下仍然是不变的,但现在SO(4)是以非线性的方式实现的.在由无限小参量 $\vec{\theta}$ 参数化的同位旋变换下,场 $\vec{\zeta}$ 就像普通的同位旋矢量那样旋转,而 σ 是同位旋标量:

$$\delta \vec{\zeta} = \vec{\theta} \times \vec{\zeta} , \qquad \qquad \delta \sigma = 0 , \qquad (19.5.12)$$

所以拉格朗日量(19.5.10)显然是同位旋不变的. 另一方面, 在破缺对称性的变换下, 若该变化由无限小矢量**č**参数化, 那么原始场的变换为

$$\delta \vec{\phi} = 2\vec{\epsilon}\phi_4 , \qquad \qquad \delta \phi_4 = -2\vec{\epsilon} \cdot \vec{\phi} . \qquad (19.5.13)$$

这样,我们从方程(19.5.7)发现

$$\delta\vec{\zeta} = \vec{\epsilon}(1-\vec{\zeta}^2) + 2\vec{\zeta}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\zeta}) , \qquad \qquad \delta\sigma = 0 . \qquad (19.5.14)$$

在破缺对称性变换(19.5.14)下, \vec{D}_{μ} 进行的是线性(尽管是场相关的)同位旋旋转

$$\delta \vec{D}_{\mu} = 2(\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}) \times \vec{D}_{\mu} \tag{19.5.15}$$

而方程(19.5.10)是同位旋不变的,所以拉格朗日量(19.4.10)在这一变换下不变.由于变换规则(19.5.15), \vec{D}_{μ} 通常被称为 π 介子场的协变导数.

变换规则(19.5.12)和(19.5.14)指定了群 $SU(2) \times SU(2)$ 所谓的非线性实现.^[25] Lie群的非线性的一般理论将在下一节给出;在那里我们会证明,在相差场的重定义的意义下,若要求用 ζ 线性地实现同位旋SU(2)子群,那么变换规则(19.5.12)和(19.5.14)提供了 $SU(2) \times SU(2)$ 最一般的实现.

我们看到这些新π介子场的每个相互作用都伴随着一个时空导数,这使得有效耦合在π介子能 量很低时会很弱. (这个论述在下文中会更细致.)因此,在π介子能量足够低时,我们可以用在这 一拉格朗日量在树级近似下复现流代数的软π介子定理. 对于这个目的,唯一必要的是拉格朗日 量是SO((4)-不变的. 然而,既然σ场是SO(4)标量,它在维持拉格朗日量的SO(4)不变性上毫无作 用,因而可以抛弃掉.* 当然,这一处理改变了理论的物理内涵,但它不改变软π介子定理所给出的 振幅. 这样,拉格朗日量(19.5.10)就简化成

$$\mathscr{L} = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_{\mu}\vec{D}^{\mu} = -\frac{F^2}{2}\frac{\partial_{\mu}\vec{\zeta}\cdot\partial^{\mu}\vec{\zeta}}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}, \qquad (19.5.16)$$

其中 $F = 2\langle \sigma \rangle = 2|\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$. (我们很快就会看到,这个F与上一节所讨论的常数 F_{π} 相同.)由于多个原因,使用按照惯例归一化的 π 介子场

$$\vec{\pi} = F\vec{\zeta} \tag{19.5.17}$$

 $^{^*}$ 或者,我们可以转到这样的极限: \mathscr{M} 和 λ 一起趋于无穷,但保持 σ 的期望值为一常数.

进行处理是更加方便的,这样拉格朗日量(19.5.16)变成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_{\mu} \vec{\pi} \cdot \partial^{\mu} \vec{\pi}}{(1 + \vec{\pi}^2 / F^2)^2} .$$
(19.5.18)

因子1/F的作用类似于耦合常数,对于相互作用中每个额外的π介子都会有这样一个因子. 方程(19.5.18)描述的正是所谓的"非线性σ-模型",确切的说这里的是*SU*(2) × *SU*(2)自发破缺 到*SU*(2)的特殊情况.

一个关键点:为了导出(19.5.18),出发点不一定非得是"线性σ-模型"拉格朗日量(19.5.1). 诚然,我们不需要从任何特定的理论出发.我们可以使用方程(19.5.18)仅因为它在*SO*(4)变 换(19.5.12)和(19.5.14)下不变,而流代数则告诉我们这是我们为得到低能π介子反应振幅所需要的 全部.

在引入软π介子有效拉格朗日量的数年后,出现另外一种证明有效场论技术是合理的方法,^[26] 这一方法不依赖流代数并且允许计算不限制在Goldstone玻色子能量几乎为零的极限下.它基于 如下的认识(在形式上还没具现化为一个定理):当我们从Feynman图计算物理振幅时,如果我们 所使用的是包含相关自由度的最一般拉格朗日量,并且该拉格朗日量满足该理论假定的对称性, 那么我们就构建出了与相对论,量子力学以及假定对称性的一般原理相容的最一般振幅.这正是 本书卷I所基于的观点.在当前情况下,"相关"的自由度是Goldstone玻色子本身,态α和β中的粒 子,以及这些粒子通过与低能Goldstone玻色子相互作用产生的任何其它粒子.援引有效场论的这 一合理性理由,我们就无需与流代数的复杂性纠缠.更重要的,现代有效场论方法所给出的结果使 得我们跳出了极低能量的极限,并允许我们对任意内禀对称性破缺进行系统的处理.

根据这一方法,为了将π介子相互作用振幅计算至π介子能量的任意阶,我们所使用的拉格朗 日量要包含按照规则(19.5.12)和(19.5.14)变换的π介子场ζ且必须是这类拉格朗日量中最一般的形 式:

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_{\mu}\vec{D}^{\mu} - \frac{c_4}{4}(\vec{D}_{\mu}\vec{D}^{\mu})^2 - \frac{c_4'}{4}(\vec{D}_{\mu}\cdot\vec{D}_{\nu})(\vec{D}^{\mu}\cdot\vec{D}^{\nu}) - \cdots$$
(19.5.19)

"…"所代表的项会包含协变导数 \vec{D}_{μ} 的高次项,或者更高阶的协变导数,它的一般结构将在下一节进行描述.系数 c_4 和 c'_4 是无量纲的,而对于所有高阶项,其系数的量纲是质量的负幂次.

考察一个一般过程,该过程包含任意多个入射 π 介子和出射 π 介子.我们假定它们的能量和动量最多是Q阶的,且Q与量子色动力学特征标度(例如核子质量或 ρ 的质量)相比很小.那么即使是像(19.5.19)这样在通常意义下无法重整的拉格朗日量,我们在12.3节看到,只要这样的拉格朗日量包含对称性所允许的可能的项,那么总会有可用的抵消项来抵消每一个无穷大,进而使得这样的拉格朗日量产生有限的结果.如果我们通过指定各种Goldstone玻色子散射振幅在Q阶能量处的值来定义常数 F^2 , c_4 , c'_4 ,…的重整化值,那么动量空间Feynman图中的积分将由虚动量中同样也为Q阶的那部分虚动量主导.(这是因为重整化使得它们有限,而理论中又没有其它可能的有效截断.)这样,我们就可以将微扰论发展为Q的幂级数表达式.

对于图的量级的阶,每个相互作用顶角中的每个导数以及随之的每个 \vec{D}_{μ} 会贡献一个Q因子; 每个 π 介子内线传播子贡献因子 Q^{-2} ;而图的每个圈所附带的积分体积元d⁴q贡献因子 Q^{4} ;所以一般的连通图所做的贡献是 Q^{ν} 阶的,其中

$$\nu = \sum_{i} V_i d_i - 2I + 4L . \qquad (19.5.20)$$

这里的*d*_i是*i*类相互作用中导数的数目, *V*_i是图中*i*类相互作用顶点的数目, *I*是π介子内线的数目, 而*L*是圈的数目.根据熟悉的拓扑等式(参看方程(4.4.7)),这些量之间的关系是:

$$L = I - \sum_{i} V_i + 1 , \qquad (19.5.21)$$

所以我们可以消掉I并写出

$$\nu = \sum_{i} V_i(d_i - 2) + 2L + 2. \qquad (19.5.22)$$

它的关键之处在于这里的每一项都是正的; 方程(19.5.19)中的每个相互左右都至少有两个导数, 并且显然 $L \ge 0$.因此每一过程的领头项是 Q^2 阶的, 这样的项只能出现在树图中(即, L = 0), 并且这样的树图只能用方程(19.5.19)中只有两个导数的项构建(即, 当 $d_i \ne 2$ 时, $V_i = 0$):

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}}{(1+\vec{\pi}^2/F^2)^2} \ . \tag{19.5.23}$$

例如, π介子-π介子散射的S-矩阵元中出现的不变振幅M

$$S = i(2\pi)^4 \delta^4 (p_A + p_B - p_C - p_D) M(2\pi)^{-6} (16E_A E_B E_C E_D)^{-1/2}$$
(19.5.24)

它在这一阶给定为

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F^{-2} \Big[\delta_{ab} \delta_{cd} (-p_A \cdot p_B - p_C \cdot p_D) + \delta_{ac} \delta_{bd} (p_A \cdot p_C + p_B \cdot p_D) + \delta_{ad} \delta_{bc} (p_A \cdot p_D + p_B \cdot p_C) \Big] , \qquad (19.5.25)$$

其中*a*, *b*, *c*, *d*分别是π介子*A*, *B*, *C*, *D*的同位旋指标.(本节后面将会把π介子拥有有限质量所 带来的效应考虑进去.) 是否可以将方程(19.5.25)用作领头项并不依赖于我们对原始拉格朗日 量(19.5.1)中耦合常数λ的大小做了什么样的假定, 甚至不依赖于这一公式对于该拉格朗日量是否 是成立的, 它只依赖于特征π介子能量*Q*是个小量这个假定.

对于任何Goldstone玻色子反应的振幅,下一项将是 Q^4 阶的,这样的项来源有两个,一个是仅 包含拉格朗日量(19.5.16)的单圈图,另一个是只用相互作用(19.5.16)和方程(19.5.19)中的d = 4项 产生的某个单极点构成的树图:

$$M_{abcd}^{(\nu=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln(-s) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln(-t) - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln(-u) + \frac{1}{3\pi^2} (s^2 + t^2 + u^2) \ln \Lambda^2 - \frac{1}{2} c_4 s^2 - \frac{1}{4} c_4' (t^2 + u^2) \right] + \tilde{\mathfrak{R}} \mathbb{R} \mathfrak{M},$$
(19.5.26)

其中"交叉项"是指 $B \leftrightarrow C$ 对换和 $B \leftrightarrow D$ 对换给出的项, 而s, t, u是Mandelstam变量

$$s = -(p_A + p_B)^2$$
, $t = -(p_A - p_C)^2$, $u = -(p_A - p_D)^2$

这一结果与截断Λ的相关性可以通过重新定义常数c4和c4消除掉.重整化耦合是

$$c_{4R} = c_4 - \frac{2}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) ,$$
 (19.5.27)

$$c'_{4R} = c'_4 - \frac{4}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) ,$$
 (19.5.28)

其中μ是任意的Q阶重整化标度,插入μ是为了让对数定义合理. 以这些重整化耦合的形式,振幅(19.5.26)采取如下的形式

$$M_{abcd}^{(\nu=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln\left(\frac{-t}{\mu^2}\right) - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln\left(\frac{-u}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2} c_{4R} s^2 - \frac{1}{4} c'_{4R} (t^2 + u^2) \right] + \tilde{\chi} \bar{\chi} \bar{\chi}.$$
(19.5.29)

这种计算可以算至Q的任意阶,并且对于每一阶的结果,我们总会遇到有限多个新耦合,这些 耦合的重整化用来消除物理振幅的截断相关性.注意领头的 $\nu = 2项与\nu = 4$ 的修正项的比值 $\mathcal{L}Q^2/8\pi^2 F^2$ 阶的,所以,只要 π 介子能量均远小于一个阶为 $2\pi F$ 的量,这就很可能是一个有用的表 达式.

这一微扰表达式也可用来把无所不在的参量F和测量到的 π 介子衰变振幅 F_{π} 关联起来. 回 忆 ζ 的变换规则(19.5.14), 轴矢量流给定为

$$\vec{\epsilon}\cdot\vec{A}^{\mu}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\vec{\zeta})}\cdot\delta\vec{\zeta}$$

因而

$$\vec{A}^{\mu} = -(1 - \vec{\zeta}^2) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\vec{\zeta})} - 2\vec{\zeta}\vec{\zeta} \cdot \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\vec{\zeta})}\right) .$$
(19.5.30)

 $(\vec{A}^{\mu} \ge 2\vec{x}$ 所生成的对称性的Nother流,它在核子二重态上表示成2 $\gamma_5 \vec{t} = \gamma_5 \vec{\tau}$.)积掉其它所有场,并 用方程(19.5.17)将 $\vec{\zeta}$ 表示成正则归一化 π 介子场 $\vec{\pi}$,做完这些后我们发现

$$\vec{A}^{\mu} = F \left[\partial^{\mu} \vec{\pi} \frac{(1 - \vec{\pi}^2 / F^2)}{(1 + \vec{\pi}^2 / F^2)} + \frac{2\vec{\pi} (\vec{\pi} \cdot \partial^{\mu} \vec{\pi})}{F^2 (1 + \vec{\pi}^2 / F^2)^2} \right] + \cdots$$
(19.5.31)

利用我们的 π 介子能量幂级数微扰表达式计算 $\langle VAC | \vec{A}^{\mu} | \pi \rangle$,我们看到,在这里,最低阶的 π 介子衰变振幅是

$$F_{\pi} = F$$
 . (19.5.32)

更进一步, Lorentz不变性和方程(19.5.22)告诉我们高阶修正必须正比于 p_{π}^2/F_{π}^2 的次方, 而这对于 无质量 π 介子为零, 所以方程(19.5.32)在 $m_{\pi} \rightarrow 0$ 的极限下实际上是精确的.因此我们可以猜测, 当 π 介子能量小于阶为2 $\pi F_{\pi} = 1200$ MeV的量时, 我们的微扰表达式将是有用的.

为了与实验相联系,我们必须处理 π 介子质量不为零的现实.当 π 介子处在质量壳上时,它的4-动量的时间分量不可能小于 m_{π} ,所以在计数 π 介子的特征能量和动量Q的幂次时,我们必须认为 m_{π} 是Q阶的.但是我们在上一节看到, m_{π}^2 正比于夸克质量的线性组合,所以,对于给定的Feynman图,我们对其阶数 Q^{ν} 的公式(19.5.22)应该变成

$$\nu = \sum_{i} V_i (d_i + 2m_i - 2) + 2L + 2 , \qquad (19.5.33)$$

其中m_i是i类相互作用中夸克质量因子的个数.

包含夸克质量的相互作用可以通过它们在SU(2)×SU(2)或者等效的SO(4)下的变换性质区分出来. 方程(19.4.34)表明夸克质量的一阶项按照两个标量的线性组合那样变换,具体来说这两个

标量是手征4-矢 Φ_n^+ 的第四分量和另一手征4-矢 Φ_n^- 的第三分量,而系数分别为 $m_u + m_d$ 和 $m_u - m_d$. 因此有效作用量中 $m_u + m_d$ 的一阶项 $\Delta \mathscr{L}^+$ 和 $m_u - m_d$ 的一阶项 $\Delta \mathscr{L}^-$ 分别必须拥有手征4-矢第四 分量的变换性质和手征4-矢第三分量的变换性质,当然,它们还得是Lorentz标量.对于第四分量 是标量的手征4-矢而言,一个显然的候选者是我们本节开头的 ϕ_n .根据方程(19.5.9),它的第四分 量就是 $\sigma(1 - \vec{\zeta}^2)/(1 + \vec{\zeta}^2)$.因子 σ 是手征标量,它不影响这个量的手征变换性质,因而可以被扔掉. 通过要求 $\pi^2 = F_{\pi}^2 \vec{\zeta}^2$ 的系数是 $-m_{\pi}^2/2$,我们可以确定这一项的归一化,这使得,除了一个额外的常 数外,

$$\Delta \mathscr{L}^{+} = -\frac{m_{\pi}^2 F_{\pi}^2}{2} \frac{\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2} = -\frac{m_{\pi}^2}{2} \frac{\vec{\pi}^2}{1+\vec{\pi}^2/F_{\pi}^2} \,. \tag{19.5.34}$$

我们会在下一节看到,这是 π 介子场唯一的既没有导数且按照手征4-矢的第四分量变换的标量函数. 另一方面,不存在 π 介子场的标量函数使得它自身既没有导数且按照手征4-矢的第三分量进行 变换,这是因为,如果这样的函数是某个手征4-矢的第三分量,那么它关于 π 介子场必须是奇的,因 而它是赝标量而非标量.因此,(19.5.34)是唯一 $d_i = 0$ 且 $m_i = 1$ 的相互作用. 令人惊奇的是, u夸克 和d夸克质量中的同位旋破缺差不影响 π 介子质量,这是我们在上一节所看到的,此外,它也不影响 任何没有导数的 $\delta\pi$ 介子相互作用.

我们现在能够计算 π 介子- π 介子散射振幅中真实的 $\nu = 2$ 领头项.根据方程(19.5.33),这些项只能从树图中产生,而这些树图是用方程(19.5.23)中d = 2, m = 0的 π 介子相互作用或者方程(19.5.34)中d = 0, m = 1的 π 介子相互作用构建的.到这一阶,方程(19.5.24)所定义的不变振幅M现在是

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F_{\pi}^{-2} \Big[\delta_{ab} \delta_{cd} (s - m_{\pi}^2) + \delta_{ac} \delta_{bd} (t - m_{\pi}^2) + \delta_{ad} \delta_{bc} (u - m_{\pi}^2) \Big] .$$
(19.5.35)

特别地, 在阈值处, $s = 4m_{\pi}^2 \pm t = u = 0$, 因此

$$M_{abcd}^{(\nu=2)}(\boldsymbol{\bar{\otimes}}\underline{\mathbf{d}}) = 4m_{\pi}^{2}F_{\pi}^{-2}[3\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}]$$
$$= 4m_{\pi}^{2}F_{\pi}^{-2}\left[7M_{ab,cd}^{(0)} - 2M_{ab,cd}^{(2)}\right], \qquad (19.5.36)$$

其中 $M^{(0)}$ 和 $M^{(2)}$ 是张量,它们表示同位旋T = 0或T = 2的 $2-\pi$ 介子态:

$$M_{ab,cd}^{(0)} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} , \qquad (19.5.37)$$

$$M_{ab,cd}^{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{2}{3} \delta_{ab} \delta_{cd}) , \qquad (19.5.38)$$

它们的归一化使得Tr $M^T = 2T + 1$. 这个结果通常表示成散射长度的形式. 根据3.6节和3.7节,对于同位旋为T的态中的两个 π 介子,它们的散射长度 a_T 给定^[27]为1/32 πm_{π} 乘以方程(19.5.36)中 M^T 的系数:

$$a_0 = \frac{7m_\pi}{8\pi F_\pi^2} = 0.16 \, m_\pi^{-1} \, , \qquad a_2 = -\frac{m_\pi}{4\pi F_\pi^2} = -0.046 \, m_\pi^{-1} \, .$$

 π 介子的散射长度很难测量,但是对像 $\pi + N \to \pi + \pi + N$ 和 $K \to \pi + \pi + e + \nu$ 这种过程的细致 研究分别给出了 a_0 和 a_2 的值,^[28] (0.26 ± 0.05) m_{π}^{-1} 和(-0.028 ± 0.012) m_{π}^{-1} ,这与理论值是一致的. $m_{\pi}/2\pi F_{\pi}$ 的高阶修正似乎提高了符合程度. 这一形式理论可以被推广进而描述π介子与核子或其它粒子的相互作用. 最简单的方法是给 我们所出发的拉格朗日量增加一项, 使得该项包含核子二重态场*N*:

$$\mathscr{L}_N = -\bar{N} \left(\partial \!\!\!/ + g[\phi_4 + 2i\vec{t} \cdot \vec{\phi}\gamma_5] \right) N , \qquad (19.5.39)$$

其中花是同位旋1/2的同位旋矩阵矢量(即, Pauli矩阵7除以2.) 在手征变换

$$\delta \vec{\phi} = 2\vec{\epsilon} \,\phi_4 \,, \qquad \delta \phi_4 = -2\vec{\epsilon} \cdot \vec{\phi} \,, \qquad (19.5.40)$$

$$\delta N = -2i\gamma_5 \vec{\epsilon} \cdot \vec{t} N \tag{19.5.41}$$

下它是不变的. 现在,为了消除非导数 π 介子耦合,我们必须把核子场N写成表示(19.5.41)中的SO(4)旋转R作用在新的核子场 \tilde{N} 上

$$N \equiv \frac{(1 - 2i\gamma_5 \vec{t} \cdot \vec{\zeta})}{\sqrt{1 + \vec{\zeta}^2}} \, \widetilde{N} \tag{19.5.42}$$

其中 ζ 还是由方程(19.5.7)给出. 有了这个变换, 方程(19.5.39)中的非导数项现在只依赖于 \widetilde{N} 和 σ :

$$\bar{N}[\phi_4 + 2i\vec{t}\cdot\vec{\phi}\gamma_5]N = \sigma\bar{\tilde{N}N} \; .$$

另一方面,导数项包含方程(19.5.41)中矩阵的导数,这产生了核子拉格朗日量:

$$\mathscr{L}_{N} = -\bar{\widetilde{N}}\left[\partial \!\!\!/ + g\sigma + 2\mathrm{i}\frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \partial \!\!\!/ \vec{\zeta})}{1 + \vec{\zeta}^{2}} + 2\mathrm{i}\gamma_{5}\vec{t} \cdot \vec{D} \!\!\!/ \right] \tilde{N}$$
(19.5.43)

或者以正则归一化π介子场(19.5.17)的形式:

$$\mathscr{L}_{N} = -\bar{\widetilde{N}}\left[\not{\partial} + g\sigma + \frac{2\mathrm{i}\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \partial\vec{\pi})}{F_{\pi}^{2}[1 + \vec{\pi}^{2}/F_{\pi}^{2}]} + \frac{2\mathrm{i}\gamma_{5}\vec{t} \cdot \partial\vec{\pi}}{F_{\pi}^{2}[1 + \vec{\pi}^{2}/F_{\pi}^{2}]} \right] \widetilde{N} .$$
(19.5.44)

既然σ的真空期望值不为零,我们看到核子在这里的静质量不为零,若非变换(19.5.40)和(19.5.41)下的对称性是破缺的,这个结果本不会出现.

由于它自身的结构, 拉格朗日量(19.5.44)是手征不变的. 这一点也可利用前面得到的σ和π的 手征变换性质直接看到, 同时注意到, 在手征变换(19.5.40)和(19.5.41)下, 方程(19.5.42)所定义的 新核子场的变换为

$$\delta \tilde{N} = 2i\vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}]\tilde{N} . \qquad (19.5.45)$$

即, 在手征变换下, \tilde{N} 进行一个与 \vec{D}_{μ} 相同的同位旋旋转(19.5.15), 当然, 这个旋转处在T = 1/2的表示下. 同位旋旋转参量 $\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}$ 是时空相关的, 所以 \tilde{N} 的导数就有一个不同的手征变换性, 但是可以直接验证方程(19.5.43)中第一项和的第三项的组合按照手征协变导数那样进行变换: 即,

$$\delta \mathscr{D}_{\mu} \widetilde{N} = 2i \vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}] \mathscr{D}_{\mu} \widetilde{N} , \qquad (19.5.46)$$

其中

$$\mathscr{D}_{\mu}\widetilde{N} \equiv \left[\partial_{\mu} + 2i\frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \partial\vec{\zeta})}{1 + \vec{\zeta}^2}\right]\widetilde{N} .$$
(19.5.47)

因此拉格朗日量(19.5.43)(以及随之的(19.5.44))显然是手征不变的,这是因为它是同位旋不变的,并且构建它的元素只有 $\tilde{N}, \mathcal{D}_{\mu}\tilde{N}, \sigma \pi \vec{D}_{\mu},$ 所有这些元素在手征变换下进行相同的同位旋旋转.

再重申一次,我们出发的拉格朗日量具体是什么并不重要.和之前考察的纯π介子理论一样, 重要的是拉格朗日量的手征不变性.为了是手征不变的,拉格朗日量必须保持同位旋不变,并且只 能用 \tilde{N} , $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{N}$ 和 \vec{D}_{μ} (以及这些量的高阶协变导数)这些元素进行构建.最一般的手征不变拉格朗日 量是新核子场的双线性型,并且所包含的导数不超过一阶,因此它采取如下的形式

$$\mathscr{L}_{N,0} = -\tilde{\tilde{N}} \left[\mathscr{D} + m_N + 2ig_A \gamma_5 \vec{t} \cdot \vec{D} \right] \tilde{N}$$
(19.5.48)

或者以π介子场(19.5.17)的形式:

$$\mathscr{L}_{N,0} = -\bar{\tilde{N}} \left[\partial \!\!\!/ + m_N + \frac{2i\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \partial \!\!\!/ \pi)}{F_\pi^2 [1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} + \frac{2ig_A \gamma_5 \vec{t} \cdot \partial \!\!\!/ \pi}{F_\pi [1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} \right] \tilde{N} .$$
(19.5.49)

注意到,我们在方程(19.5.48)的最后一项中插入了一个任意常数 g_A ,这是因为这一项本身是 手征对称的,因而手征对称性无法决定它的系数.(这与方程(19.5.43)中的第三项相反,它与第一 项合起来给出手征不变量这个条件固定了它的系数.)通过构建核子拉格朗日量(19.5.48)产生的轴 矢量流中的额外项,我们可以验证这里插入的常数 g_A 确实是 β -衰变的轴矢量耦合.或者,通过分部 积分和Dirac方程,我们可以发现 π 介子-核子相互作用 $-2ig_A \tilde{N} \gamma_5 \vec{t} \cdot (\partial \pi) \tilde{N} / F_{\pi}$ 在核子质量壳上等效 于相互作用 $-4im_N g_A \tilde{N} \gamma_5 \vec{t} \cdot \pi \tilde{N} / F_{\pi}$,这对应于 π 介子-核子耦合常数

$$G_{\pi N} = 2m_N g_A / F_\pi \; ,$$

而这正是Goldberger-Treiman关系(19.4.33).

附带地,如果我们在计算中使用了拉格朗日量(19.5.44),我们就会得到 $g_A = 1$ 的Goldberger-Treiman关系. 然而,这是我们作为出发点的相互作用(19.5.39),它的特定形式的产物. 我们可以引入一个不可重整的导数耦合项**

$$\mathscr{L}'_{N} = ig'\bar{N}\left[\left(\vec{t}\cdot\vec{\phi}\partial\!\!\!/\phi_{4} - \phi_{4}\vec{t}\cdot\partial\!\!\!/\phi\right)\gamma_{5} + \vec{t}\cdot\left(\vec{\phi}\times\partial\!\!\!/\phi\right)\right]N .$$
(19.5.50)

可以直接证明,以变换后的场 σ , \tilde{N} 和 ζ , 它采取如下的形式

$$\mathscr{L}'_N = -8\mathrm{i}\sigma^2 g' \widetilde{N} \vec{t} \cdot \vec{D} \gamma_5 \widetilde{N} \; .$$

由于 σ 的真空期望值不为零,所以这对 π 介子-核子耦合常数有贡献,并对 g_A 有一个正比于g'的贡献. 因此, $g_A = 1$ 不由破缺的 $SU(2) \times SU(2)$ d对称性单独决定;通过引入相互作用(19.5.50)并调整g',我们可以把 g_A 变成任意值.

现在我们来考察如何用这个拉格朗日量计算既包含π介子又包含核子的反应的振幅.由于 核子不可能是π介子这样的"软"粒子,我们必须得特别关照核子传播子.若进入图的核子线携

^{**}核子二重态的左手部分和右手部分分别按照 $SU(2) \times SU(2)$ 的($\frac{1}{2}$,0)表示和(0, $\frac{1}{2}$)表示变换.因此,双线性 型 $\bar{N}\gamma_{\mu}\gamma_5N$ 是($\frac{1}{2}$,0)项或(0, $\frac{1}{2}$)项的二次项之和,所以它按照(1,0)表示,(0,0)表示以及(0,1)表示的直和变换.在方程(19.5.50)中,我们把 $\bar{N}\gamma_{\mu}\gamma_5N$ 中的(1,0)+(0,1)项与反对称张量耦合在一起,这构成了 $SU(2) \times SU(2)$ 的4-矢 ϕ_n 和 $\partial_{\mu}\phi_n$. 它在变换(19.5.40)和(19.5.41)下的不变性显然可以直接验证.

带 m_N 阶的在壳4-动量p,然后又从与软 π 介子的相互作用中吸收了分量远小于 m_N 的净4-动量q,那 么它会有传播子

$$\frac{-\mathrm{i}(\not\!\!p+\not\!q) + m_N}{(p+q)^2 + m_N^2} \xrightarrow[q \to 0]{} \frac{-\mathrm{i}\,\not\!\!p + m_N}{2p \cdot q} \,. \tag{19.5.51}$$

(通过在核子拉格朗日量中引入高阶导数项, 我们可以把忽略的项考虑进来.) 再次假定所有外 π 介子4-动量的分量最多是Q阶的, 并在Q阶重整化点定义所有重整化耦合, 这使得积分以 π 介子内线也拥有4-动量Q的方式收敛. 这样, 方程(19.5.51)表明核子内线的贡献是1/Q阶的. 这种过程的一般Feynman图对不变振幅会有一个 Q^{ν} 阶的贡献, 而这时,

$$\nu = \sum_{i} V_i (d_i + 2m_i) - 2I_\pi - I_N + 4L . \qquad (19.5.52)$$

这里的 V_i 是与i类相互作用相对应的顶角个数, d_i 是每个这样的相互作用中导数的数目, m_i 是每个相互作用中夸克味的数目, I_{π} 和 I_N 分别是 π 介子内线的个数和核子内线的个数, L是图中圈的个数. 我们使用熟悉的连通图拓扑关系:

$$L = I_{\pi} + I_N - \sum_i V_i + 1 \tag{19.5.53}$$

以及

$$2I_N + E_N = \sum_i V_i n_i , \qquad (19.5.54)$$

其中 n_i 是i类相互作用中核子场的个数, E_N 是核子外线的个数. 消掉 I_N 和 I_{π} , 这给出

$$\nu = \sum_{i} V_i \left(d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 \right) + 2L - \frac{E_N}{2} + 2 .$$
(19.5.55)

这里的关键点在于第一项中的系数 $d_i + 2m_i + \frac{1}{2}n_i - 2$ 总是不小于零的. 对于 $n_i = 0$ 的纯 π 介子相 互作用, 我们已经看到 $d_i + 2m_i \ge 2$, 对(19.5.49)的观察表明对于 $n_i = 2 \pm m_i = 0$ 的 π 介子-核子相 互作用 $d_i \ge 1$. 任何 $n_i = 2 \pm m_i \ge 1$ 的相互作用或者任何 $n_i \ge 4$ 的相互作用显然也有 $d_i \ge 2$. 因此, 当 $Q \ll 2\pi F_{\pi}$ 时, 领头项是相互作用满足

$$d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 = 0$$

的树图(即, L = 0). 满足这个条件的相互作用就是方程(19.5.23), (19.5.34)和(19.5.49)中写出的那 些相互作用,除此之外可能的相互作用是 $d_i = 0 \pm n_i = 4$ 的相互作用:

$$\left(\tilde{\tilde{N}}\,\Gamma_{\alpha}\tilde{N}\right)\left(\tilde{\tilde{N}}\,\Gamma^{\alpha}\tilde{N}\right) \,, \tag{19.5.56}$$

其中Γ_α和Γ^α是自旋空间和同位旋空间中的矩阵,它们给出Lorentz不变,空间反演不变以及同位旋 不变的4-费米子相互作用.最后这个相互作用对于多核子过程非常重要,^[29]但是我们不会在这里 考察这样的过程.

我们现在对 π 介子-核子散射使用这一方法.对于能量约为 m_{π} 阶的 π 介子, π 介子-核子的散射振幅由图19.3中的Feynman图给出,这些图给不变振幅的贡献均是 m_{π} 阶的.然而,当处在阈值时,主要贡献来自于图19.3(c),其它图会被一个额外因子 m_{π}/m_N 压低.这是因为当处在阈值时,静止参考系中的入射 π 介子和出射 π 介子4-动量q和q'以及核子4-动量p和p'给定为

$$q = q' = (0, 0, 0, m_{\pi}) = \left(\frac{m_{\pi}}{m_N}\right) p = \left(\frac{m_{\pi}}{m_N}\right) p' .$$
(19.5.57)



图 19.3 这是用有效手征拉格朗日量计算软π介子在核子上散射的Feynman图. 虚线是π介子, 实线是核子.

因此当处在阈值时,来自图19.3(a)或图19.3(b)的不变振幅正比于

$$\begin{split} \bar{u} \gamma_5 \not q \, \frac{(-\mathrm{i}(\not p \pm \not q) + m_N)}{(p \pm q)^2 + m_N^2} \gamma_5 \not q \, u \\ &= \frac{m_\pi^2 \bar{u} \gamma_5 (-\mathrm{i} \not p (1 \pm m_\pi/m_N) + m_N) \gamma_5 u}{(\mp 2m_\pi m_N - m_\pi^2)} \\ &= \frac{\mp m_\pi}{2m_N \pm m_\pi} \bar{u} (\mathrm{i} \not p (1 \pm m_\pi/m_N) + m_N) u = \frac{m_\pi^2}{2m_N \pm m_\pi} \end{split}$$

其中u是满足 $\bar{u}u = 1$ 的Dirac旋量. 与之相对的是, 图19.3(c)给M的贡献是 m_{π} 阶的. 我们可以用核子同位旋指标将这个振幅写成2 × 2矩阵:

$$M_{ba} = \frac{-2\mathrm{i}}{F_{\pi}^2} t_c \epsilon_{abc} \,\bar{u}(-\mathrm{i} \not q - \mathrm{i} \not q') u \;,$$

其中q'和q是末态 π 介子和初态 π 介子的4-动量,而b和a是相应的同位旋矢量指标.利用方程(19.5.57) 和动量空间Dirac方程($i p + m_N$)u = 0,这变成

$$M_{ba} = \frac{-4im_{\pi}}{F_{\pi}^2} t_c \,\epsilon_{abc} = \frac{-4m_{\pi}}{F_{\pi}^2} \vec{t} \cdot [\vec{t}^{(\pi)}]_{ba} \,, \qquad (19.5.58)$$

其中[$t_c^{(\pi)}$]_{ba} ≡ $-i\epsilon_{bac}$ 是π介子同位旋矢量矩阵.在总同位旋为T的态中,矩阵 $\vec{t} \cdot \vec{t}^{(\pi)}$ 的本征值等 于 $\frac{1}{2}[T(T+1) - 2 - \frac{3}{4}]$,所以在同位旋T = 1/2和T = 3/2的态中,不变振幅是^[30]

$$M_{1/2} = 4m_{\pi}/F_{\pi}^2$$
, $M_{3/2} = -2m_{\pi}/F_{\pi}^2$

这些结果通常写成散射长度的形式,它们的定义是是不变振幅除以 $4\pi(1 + m_{\pi}/m_N)$:

$$a_{1/2} = \frac{m_{\pi}}{\pi F_{\pi}^2 (1 + m_{\pi}/m_N)} = 0.15 \, m_{\pi}^{-1} \,, \qquad (19.5.59)$$

$$a_{3/2} = -\frac{m_{\pi}}{2\pi F_{\pi}^2 (1 + m_{\pi}/m_N)} = -0.075 \, m_{\pi}^{-1} \,. \tag{19.5.60}$$

它们与实验值^[12] $a_{1/2} = (0,173\pm0.003)m_{\pi}^{-1}\pi a_{3/2} = (-0.101\pm0.004)m_{\pi}^{-1}基本一致. (结果(19.5.59) 和(19.5.60)被认为仅在<math>m_{\pi}/m_N$ 的最低阶成立,但对于因子 $1 + m_{\pi}/m_N$,由于它仅来自于散射长度的定义,我们保留这一因子.)

在 m_{π} 的下一阶,对散射长度的修正有如下几个来源.图19.3(a)和19.3(b)的Born图,它们名义 上是领头阶的,但正如我们所看到的,它们在阈值出会被一个额外的因子 m_{π}/m_N 压低.存在额外 的树图,它包含的顶角有两个导数.在这些树图中,最特殊的一种会包含不含导数的顶角,它们来 自于正比于 m_{π}^2 的对称性破缺相互作用.这些相互作用的手征变换性质和时空变换性质必须与方 程(19.4.34)中的算符相同:两个不同的手征4-矢 Φ_n^+ 和 Φ_n^- 的第四分量和第三分量.对于有着这种变 换性质的算符且要求它是核子场的双线性型,我们有两个显然的候选者:一个 Φ_4^+ 项,

$$\bar{N}N = \left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\tilde{N} - 4\mathrm{i}\left(\frac{\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\cdot\bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\tilde{N} ,$$

以及一个 Φ_3^- 项,

$$\bar{N}t_3N = \bar{\tilde{N}}t_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{\zeta}\tilde{N} - i\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\gamma_5\tilde{N} .$$

手征对称性在N上的作用就像普通的同位旋旋转,所以它们无法混合标量核子双线性型和赝标量 核子双线性型.因此实际上有两个独立的 Φ_4^+ 算符:

$$\left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\tilde{\tilde{N}}\tilde{N} \tag{19.5.61}$$

和

$$i\left(\frac{\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right) \cdot \bar{\tilde{N}}\gamma_5 \vec{t}\tilde{N} , \qquad (19.5.62)$$

以及两个独立的 Φ_3^- 算符:

$$\bar{\tilde{N}}t_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{\zeta}\tilde{N}$$
(19.5.63)

和

$$i\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\gamma_5\tilde{N} . \tag{19.5.64}$$

我们会在下一节证明, 与方程(19.4.34)中核子场的双线性项变换性质相同的算符只有这些. 算符(19.5.62)和(19.5.64)修正了 π 介子-核子耦合的Goldberger-Treiman公式, 其中前者显然是同位旋守恒而后者显然是同位旋破缺的. 另两个算符, (19.5.61)和(19.5.63), 它们直接贡献于核子质量和低能 π 介子-核子散射. 从它们对核子质量的贡献, 我们看到后两项以如下的形式进入到有效拉格朗日量中(现在将ζ替换成传统的归一化 π 介子场):

$$\delta \mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{\delta m_p + \delta m_n}{2} \left(\frac{1 - \vec{\pi}^2 / F_\pi^2}{1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2} \right) \bar{\tilde{N}} \tilde{N} - (\delta m_p - \delta m_n) \left[\bar{\tilde{N}} t_3 \tilde{N} - \frac{2}{F_\pi^2} \left(\frac{\pi_3}{1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2} \right) \bar{\tilde{N}} \vec{t} \cdot \vec{\pi} \tilde{N} \right] , \qquad (19.5.65)$$

其中 δm_p 和 δm_n 是夸克质量项(19.4.34)对质子质量和中子质量的修正. 它对 π 介子-核子散射长度的贡献是(依旧写成核子同位旋空间中的矩阵):

$$\delta M_{ba} = \frac{2[\delta m_p + \delta m_n]}{F_\pi^2} \delta_{ab} + \frac{2[\delta m_p - \delta m_n]}{F_\pi^2} (t_a \delta_{3b} + t_b \delta_{3a}) .$$
(19.5.66)

方程(19.5.65)中的第一项通常被称为" σ -项".第二项是对 σ -项的同位旋破缺修正,这一项仅会 在包含中性 π 介子的过程中显现出来,例如电荷交换过程 $\pi^+ + n \to \pi^0 + p\pi\pi^- + p \to \pi^0 + n$.即 使无法直接测量核子质量偏移 $\delta m_{p,n}$,我们会在19.7节看到,SU(3)对称性使得我们可以从超子质 量差中计算出它们的质量差.这给出 $\delta m_p - \delta m_n = -2.5$ MeV.不幸的是,对于方程(19.5.65)中第 一项的系数 $\delta m_p + \delta m_n$,我们还没有一个可信的理论估计.

方程(19.4.34)表明,在量子色动力学中,方程(19.5.66)中的系数 $\delta m_p + \delta m_n \pi \delta m_p - \delta m_n$ 分别 正比于 $m_u + m_d \pi m_u - m_d$.我们会在19.7节证明, $m_u \pi m_d$ 根本不是简并的,所以这些系数大约是 同一量级;对 σ -项的同位旋破缺修正并不是远小于 σ -项本身.我们会再次看到,同位旋守恒在强子 物理中是一个好近似不仅是因为u夸克和d夸克的质量近似相等,还由于它们的质量很小.

这里所使用的类似于(19.5.19)或(19.5.49)的拉格朗日量是有效场论方法中的一个例子,我们 在12.3节就引入了它.类似的技巧已经用于处理包含奇异粒子的介子-重子相互作用(参看19.7节), 夸克和轻子在能量低于电弱对称性破缺能标时的相互作用(参看21.3节),它甚至还被用来处理超 导问题(参看21.6节).在所有这些情况中,就解出量子场论潜在的广义原理和对称性所造成的效应 而言,有效场论提供了最方便的方法.

* * *

破缺对称性所给出的低能定理与色散关系结合后会给出有用的求和的规则. 我们来看一下对于手征对称性这是如何运作的, 忽略比较小的u夸克, d夸克以及 π 介子质量. 考察无质量 π 介子在核子上的向前散射, 其中 π 介子携带同位旋矢量指标a以及4-动量q, 核子携带4-动量p, 散射后产生了携带同位旋矢量指标b的 π 介子. 由 $S_{fi} = -2\pi i \delta^4 (P_f - P_i) M_{fi}$ 定义的散射振幅M, 其在q的第一阶由图19.3的Feynman图给定为

$$-2\pi i M = \frac{1}{(2\pi)^{6}(2q^{0})} \\ \times \bar{u} \left[\left(-i \frac{(2\pi)^{4} 2g_{A} \gamma_{5} t_{b} \not{q}}{F_{\pi}} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^{4}} \frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m_{N}}{(p+q)^{2} + M^{2}} \right) \left(i \frac{(2\pi)^{4} 2g_{A} \gamma_{5} t_{a} \not{q}}{F_{\pi}} \right) \right. \\ \left. + \left(i \frac{(2\pi)^{4} 2g_{A} \gamma_{5} t_{a} \not{q}}{F_{\pi}} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^{4}} \frac{-i(\not{p} - \not{q}) + m_{N}}{(p-q)^{2} + M^{2}} \right) \left(-i \frac{(2\pi)^{4} 2g_{A} \gamma_{5} t_{b} \not{q}}{F_{\pi}} \right) \right. \\ \left. - 4i \frac{t_{c} \epsilon_{abc} \not{q}}{F_{\pi}^{2}} \right] u .$$
(19.5.67)

到q的这一阶,方括号内前两项的核子传播子可以近似为

1

$$\frac{-\mathrm{i}(\not\!\!p \pm \not\!q) + m_N}{(p \pm q)^2 + M^2} \approx \frac{-\mathrm{i}\,\not\!p + m_N}{\pm 2p \cdot q}$$

这样,通过利用 $q q = q^2 = 0$, $\bar{u}\gamma_{\mu}u = -ip \cdot q/m_N \bigcup \mathbb{Q}[t_a, t_b] = i\epsilon_{abc}t_c$, 方程(19.5.67)可以进一步简 化. 另外, 在实验室参考系下(对于较小的q, 这一参考系与质心参考系相同), 我们有 $p \cdot q = -m_N\omega$, 其中 $\omega \equiv q^0$ 是核子静止参考系中的 π 介子能量. 最后, 传统的向前散射振幅(它的绝对值平 方是向前散射的微分截面)由方程(3.6.9)给出, 为 $f \equiv -4\pi^2\omega M$. 将这些放在一起, 我们发现 当 $\omega \ll m_N$ 时, π 介子能量 ω 处的向前散射振幅给定为

$$f_{ba}(\omega) \to -\mathrm{i}\frac{\omega}{\pi F_{\pi}^2} (1 - g_A^2) \epsilon_{abc} t_c \ . \tag{19.5.68}$$

特别地, 对于 π^+ 介子-质子散射, 我们必须要用 $v_b^*v_a$ 收缩方程(19.5.68), 并令 $t_3 = +\frac{1}{2}$, 其中 \vec{v} 是归一 化同位旋矢量(1, i, 0)/ $\sqrt{2}$. 这样, π^+ 介子-质子的低能向前散射振幅就是

$$f_{\pi^+ p}(\omega) \to -\frac{\omega}{2\pi F_{\pi}^2} (1 - g_A^2)$$
 (19.5.69)

现在,方程(10.8.24)就给出了无质量 π^+ 介子在质子上向前散射的色散关系(加上减除除多项 式 $P(E) \propto E$)

$$f_{\pi^+p}(\omega) = R + \frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi} \sigma_{\pi^+p}(\omega) + \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\pi^+p}(E)}{E - \omega} - \frac{\sigma_{\pi^-p}(E)}{E + \omega} \right] \mathrm{d}E , \qquad (19.5.70)$$

其中R是可能的减除常数, $\omega \pi E$ 是质子静止参考系中的 π 介子能量. 对这一色散关系与低能极限(19.5.69)做一比较, 这给出R = 0, 以及

$$g_A^2 = 1 + \frac{F_\pi^2}{2\pi} \int_0^\infty [\sigma_{\pi^+ p}(E) - \sigma_{\pi^- p}(E)] \,\mathrm{d}E/E \;. \tag{19.5.71}$$

这是著名的Adler-Weisberger求和规则,^[19] 这里所对应的是手征对称性是精确对称性且 $m_{\pi} = 0$ 的情况.对于 π 介子在任意重子或介子上的散射,包含它在自身上的散射,可以导出类似的求和规则.^[30a]

19.6 有效场论: 一般对称性的破缺

上一节所描述的构建有效拉格朗日量的技巧针对的是 $SU(2) \times SU(2)$ 破缺到SU(2)的情况,这 一技巧很快就被推广^[31]至一般群G破缺到它的任意子群H的情况.考察一个量子场论,它的拉格 朗日量在场 $\psi_n(x)$ 的普通线性时空无关变换g下不变:

$$\psi_n(x) \to \sum_m g_{nm} \psi_m(x)$$
, (19.6.1)

而g构成任意的紧致Lie群G. 我们假定这一对称群自发破缺到对称变换的某个子群 $H \subset G$,该子群 保持所有真空期望值不变: 对于 $h \in H$,

$$\sum_{m} h_{nm} \langle \psi_m(x) \rangle_{\text{VAC}} = \langle \psi_n(x) \rangle_{\text{VAC}} .$$
(19.6.2)

(我们不需要所有的 ψ 都是标量,但显然只有标量会有不为零的期望值.)在上一节开头的例子中, *G*是*SO*(4)群,场 ψ_n 构成该群的4-矢表示,而它们的期望值把*SO*(4)破缺至保持第4-轴不动的旋转 子群*H* = *SO*(3).在一般情况下,场 ψ_n 可能构成*G*的可约表示而非不可约表示,就我们上一节的例 子而言,它在我们引入核子场后就变成了这样的情况.

接下来,我们将场空间中的任意一"点" ψ_n 表示成G变换作用Goldstone模已经被消掉的场 ψ_n :

$$\psi_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}(x)\tilde{\psi}_m(x) . \qquad (19.6.3)$$

例如,在上一节中, γ 就是我们称为R的 $SO(4)旋转, 而 \tilde{\psi}_n$ 所满足的条件是该4-矢的前三个分量为零.

为了给出这个条件更一般的公式化表述,我们假定用*G*的实表示进行处理.(这并没有丢失一般性,原因是我们没有坚持使用不可约表示,所以如果我们作为出发点的场构成*G*的复表示,我 们总可以把 ψ_n 取成这些复场的实部和虚部.)正如19.2节所证明的,质量矩阵的无质量本征矢正是 矢量的线性独立组合 $\sum_m [t^{\alpha}]_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{VAC}$,其中 $t^{\alpha} \ge G$ 的生成元.(表示是实的意味着 $it^{\alpha} \ge g$ 实的, *G*是紧致的意味着我们可以把表示选成幺正的,进而这个表示同时是正交的,这使得 $t^{\alpha} \ge b$ 。最后时 是反对称的.)因此, $\tilde{\psi}_n$ 不包含Goldstone模这个条件可以公式化为

$$\sum_{nm} \tilde{\psi}_n(x) [t^{\alpha}]_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} = 0 . \qquad (19.6.4)$$

这里相互独立的条件个数是群G的维数减去子群H的维数,其中对子群H的要求是它的生成元要 湮灭 $\langle \psi_m(0) \rangle_{VAC}$.和上一节一样,以这种方式被消掉的Goldstone玻色场会重新出现在用来参数化 变换 $\gamma_{nm}(x)$ 的场中,这种场的个数正是dim(G) – dim(H).一般而言, $\tilde{\psi}_n$ 会包含理论的所有重场, 包含那些时空对称性质与Goldstone玻色子不同的场(就像上一节的核子).

有必要证明我们总可以选择变换 $\gamma_{nm}(x)$ 使得方程(19.6.4)是满足的. 对于这个目的,考察如下的量

$$V_{\psi}(g) \equiv \sum_{nm} \psi_n g_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} , \qquad (19.6.5)$$

其中g的取值范围是 ψ_n 构成的实正交表示中的整个群G. 这显然是g的连续实函数,而且由于这个 群是紧致的, $V_{\psi}(g)$ 也是g的有界函数. 因此,在每个时空点x, $V_{\psi(x)}(g)$ 会在某个群元处到达最大值, 我们称其为 $\gamma(x)$. 当 $g = \gamma(x)$ 时, $V_{\psi(x)}(g)$ 相对g的任意变分必须是稳定的. 然而,群元g的任何无限 小偏移总可以写成线性组合

$$\delta g = \mathrm{i} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \, g \, t^{\alpha} \; ,$$

其中 ϵ_{α} 是无限小的实系数, 它可以依赖于g. 这样, $V_{\psi(x)}(g)$ 相对 $g = \gamma(x)$ 处的任意变分必须是稳定的条件就变成

$$0 = \delta V_{\psi(x)} \left(\gamma(x) \right) = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} \psi_n(x) \gamma_{nl}(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}$$
$$= i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} [\gamma^{-1}(x)]_{ln} \psi_n(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} .$$

它对于所有变分都必须是满足的,因此对于所有的 ϵ_{α} 也必须是满足的,因此我们看到当 $\tilde{\psi}(x) = \gamma^{-1}(x)\psi(x)$ 时,方程(19.6.4)是成立的,这正是我们要证明的.在拉格朗日量为(19.4.1)的纯玻色理 论中, $\tilde{\psi}_n$ 是4-矢场(0,0,0, σ).这指向了真空期望值 $\langle \psi_n \rangle$ 的方向,但并非总是这样的情况.

附带地,在处理复场时,没有必要把 $\tilde{\psi}(x)$ 上的条件用它的实部和虚部表述出来.如果一组 场 $\chi(x)$ 按照G的某个复表示变换,且该表示由厄米生成元 T^{α} 生成,那么在实表示中

$$\psi(x) = \left(\begin{array}{c} \operatorname{Re}\chi(x) \\ \operatorname{Im}\chi(x) \end{array}
ight)$$

生成元是

$$i t^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} T^{\alpha} & -\operatorname{Re} T^{\alpha} \\ \operatorname{Re} T^{\alpha} & -\operatorname{Im} T^{\alpha} \end{pmatrix}$$

那么, 直接以 T^{α} 和 $\chi(x)$ 的形式, 条件(19.6.4)可以表述成

$$\operatorname{Im}\left(\tilde{\chi}(x)^{\dagger} T^{\alpha} \langle \chi(0) \rangle_{\mathrm{VAC}}\right) = 0 .$$

由于只假定了该拉格朗日量在时空不相关的G变换下不变,所以在经过变换(19.6.3)后,我们 会发现这个拉格朗日量会依赖于 $\gamma(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$,然而在每个 γ -相关项中至少有一个导数.正如已经 提及的,用来指定 $\gamma(x)$ 的时空相关参量将扮演Goldstone玻色场的角色.我们现在必须要来考察如 何对 $\gamma(x)$ 参数化.

从一开始就必须要意识到: 方程(19.6.3)中 γ 的选择一般不是唯一的. 这是因为, 在方程(19.6.3)意义下, $\langle \psi_m(0) \rangle_{VAC}$ 是H-不变量, 那么, 对于方程所定义的量(19.6.2)而言, 在g右乘 未破缺子群H的任意元素h后, 这个量是不变的:

$$V_{\psi}(g) = V_{\psi}(gh) \qquad \forall \mathcal{F} \qquad h \in H . \tag{19.6.6}$$

由此得出,如果 γ 使得 $V_{\psi}(g)$ 最大化,那么 γ h也是如此,这使得条件(19.6.4)对于 $\tilde{\psi} = h^{-1}\gamma^{-1}\psi$ 和 $\tilde{\psi} = \gamma^{-1}\psi$ 均是满足的.因此,迄今为止 γ 仅在相差右乘H中的一个元素的意义下是定义好的.(例如,在上一节的例子中,4-维旋转R可以右乘一个仅作用在4-矢的前三个分量上的旋转.)如果两个群元 γ_1 和 γ_2 满足 $\gamma_1 = \gamma_2 h$,其中 $h \in H$,那么我们可以认为这两个群元是等价的.由于这个关系有反身性(如何 γ_1 等价于 γ_2 ,那么 γ_2 等价于 γ_1),对称性(γ_1 等价于自身)和传递性(如果 γ_1 等价于 γ_2 , γ_2 等价于 γ_3 ,那么 γ_1 等价于 γ_3),这个关系是等价关系.因此,群G的元素可以分成不相交的"等价类",组成每个等价类的元素 γ 仅相差右乘H中的一个元素.这称为G相对于H的右陪集.我们所需要的是右陪集空间(记做G/H)的参数化.

对于这个目的,我们仅需从每个右陪集中选出一个代表元即可.对于上一节的SO(4)对称性破 缺到SO(3),将这些代表元选为由3-矢ζ参数化的旋转R比较方便.还有另一种选择,这种选择对于 任何的紧致子群G破缺到任何子群H都是适用的.我们先把我们对G生成元的记号拓广至对称性 破缺模型. H独立生成元的完备集记为t_i.根据方程(19.6.2),它们满足

$$\sum_{m} (t_i)_{nm} \langle \psi_m \rangle_{\text{VAC}} = 0 . \qquad (19.6.7)$$

既然H是子群, 那么t_i构成子代数

$$[t_i, t_j] = i \sum_k C_{ijk} t_k .$$
 (19.6.8)

我们把*G*剩余的独立生成元记做 x_a ,并选择基使得结构常数全反对称. (这样的基对于紧致群总是存在的,参看15.2节.) 既然方程(19.6.8)的右边没有出现 x_a ,那么结构常数 C_{ija} 全为零,再加上它们是全反对称的,所以 $C_{iaj} = 0$,这样,

$$[t_i, x_a] = i \sum_b C_{iab} x_b .$$
 (19.6.9)

然而, *x*彼此之间的对易子不一定是*t*的线性组合; 这依赖于*G*和*H*的性质, 以及*H*如何嵌入到*G*中的. (当*C*_{abc}为零时, 右陪集空间*G*/*H*被称为对称空间). 一般而言, 我们可以写成

$$[x_a, x_b] = i \sum_i C_{abi} t_i + i \sum_c C_{abc} x_c .$$
 (19.6.10)

任何一组生成元,若它们的对易关系形式与(19.6.8)—(19.6.10)相同,那么它们被称为该Lie代数的*Cartan*分解. 手征 $SU(2) \times SU(2)$ Lie代数(19.4.9)—(19.4.11)就提供了一个例子,而在这个例子中, C_{abc} 碰巧为零.

因为 t_i 和 x_a 张开了G的Lie代数,G的任何有限元素可以表示成

$$g = \exp\left[i\sum_{a}\xi_{a}x_{a}\right]\exp\left[i\sum_{i}\theta_{i}t_{i}\right] , \qquad (19.6.11)$$

其中 ξ_a 和 θ_i 是一组实参量.但是方程(19.6.3)中的变换 $\gamma(x)$ 迄今为止仅是在相差右乘H中的一个元素的意义下定义好的,所以我们可以规定 γ 的定义,取其为如下的形式.

$$\gamma(x) = \exp\left[i\sum_{a}\xi_a(x)x_a\right] .$$
(19.6.12)

 $\xi_a(x)$ 可以等同为(除去归一化后)Goldstone玻色场.

在下文中, 我们假定已经从每个右陪集中选出了代表元, 并将其表示成一些参量ξ_a的连续函数γ(ξ). 方程(19.6.12)在一般情况下提供了一个清晰的例子, 但是我们并不把自身限制在这一参数 化下.

现在, 假定我们用方程(19.6.3)把拉格朗日量中的所有 $\psi(x)$ 场替换成 $\gamma(x)\tilde{\psi}(x)$. 场的导数给定为

$$\partial_{\mu}\psi(x) = \gamma(x) \left[\partial_{\mu}\tilde{\psi}(x) + (\gamma^{-1}(x)\partial_{\mu}\gamma(x))\tilde{\psi}(x) \right].$$
(19.6.13)

因此,当我们把拉格朗日量表示成 $\tilde{\psi}$ 而非 ψ 时,Goldstone玻色场会凭借 $\gamma^{-1}(x)\partial_{\mu}\gamma(x)$ 对 $\xi_a(x)$ 及其 导数的依赖而出现.

像γ(*x*)这样的群元,它的任意变分可以写成它自身乘以该群生成元的线性组合.在我们的基 下,我们可以将其写成

$$\gamma^{-1}(x)\partial_{\mu}\gamma(x) = i\sum_{a} x_{a}D_{a\mu}(x) + i\sum_{i} t_{i}E_{i\mu}(x) , \qquad (19.6.14)$$

其中Dau和Eiu采取如下的形式

$$D_{a\mu}(x) = \sum_{b} D_{ab} \Big(\xi(x)\Big) \partial_{\mu}\xi_{b}(x) , \qquad (19.6.15)$$

$$E_{i\mu}(x) = \sum_{b} E_{ib}(\xi(x)) \partial_{\mu}\xi_{b}(x)$$
 (19.6.16)

因此, Goldstone玻色场将会经由 $D_{a\mu}(x)$ 和 $E_{i\mu}(x)(以及它们的导数)的出现进入到拉格朗日量中.$ $注意到, 当破缺对称性是精确对称性时, <math>\xi$ 的每个相互作用至少会包含一个导数, 所以拉格朗日量 中不可能出现质量项 $m_{ab}^2\xi_a\xi_b$, 并且当Goldstone玻色子4-动量为零时, 所有这些相互作用为零.

即使我们不知道潜在拉格朗日量的细节,关于 $D_{a\mu}$ 和 $E_{i\mu}$ 是以何种方式出现在变换后的拉格朗日量的,我们可以从它们的变换性质中获得大量信息.在群G的任意群元g的作用下,原始场 ψ 按照方程(19.6.1)变换:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = g\psi(x) = g\gamma\left(\xi(x)\right)\tilde{\psi}(x) . \qquad (19.6.17)$$

现在, $g\gamma(\xi)$ 是群G的元素, 所以它必须与某个 $\gamma(\xi')$ 处在同一个右陪集中, 因而它可以写成如下的形式,

$$g\gamma\Big(\xi(x)\Big) = \gamma\Big(\xi'(x)\Big)h\Big(\xi(x),g\Big) , \qquad (19.6.18)$$

其中h是未破缺子群H中的元素. 将其代入方程(19.6.17), 我们发现 $\psi'(x)$ 变成(19.6.3)的形式

$$\psi'(x) = \gamma\Big(\xi'(x)\Big)\tilde{\psi}'(x) , \qquad (19.6.19)$$

其中ξ'(x)由方程(19.6.18)定义,并且

$$\tilde{\psi}'(x) \equiv h\Big(\xi(x), g\Big)\tilde{\psi}(x) . \tag{19.6.20}$$

在上一节开头的例子中, $\tilde{\psi}$ 由单个同位旋标量 σ 组成, 并且, 由于它在未破缺的同位旋子群下是不变的, 它同时是手征不变量.更一般的, 我们发现这里的 $\tilde{\psi}(x)$ 不一定在一般的G变换下不变, 但是它的G变换只依赖于它在子群H下的变换.在上一节中, 我们在引入核子场时看到了这一点; 在一般的无限小破缺手征对称变换下, 场 \tilde{N} 按照场相关的同位旋旋转(19.5.45)变换.

对于原始场 ψ_n 上的特定线性G变换,方程(19.6.18)和(19.6.20)所指定的 $\xi \to \xi' \pi \tilde{\psi} \to \tilde{\psi}'$ 的变换规则并没有给这个变换的性质提供参考信息.事实也的确如此,为了导出这些变换规则,我 们没有必要要求作为出发点的拉格朗日量在线性G变换下不变.给定任意一组场,要求群G以线 性或非线性的方式作用在上面,并且G有一个保持一组特定的场值(它们的真空期望值)不变的 子群H,我们(至少在特定场值的有限邻域内)总可以用一组 $\xi_a \pi \tilde{\psi}_n 表示这些场, 而 \xi_a \pi \tilde{\psi}_n 在 G$ 下 的变换规则就是方程(19.6.18)和(19.6.20)所定义的标准实现 $\xi \to \xi' \pi \tilde{\psi} \to \tilde{\psi}'$.这一实现的唯一 性十分重要,这一点首先是对 $SU(2) \times SU(2)$ 破缺到SU(2)的情况^[25]给出了证明,然后推广至一 般Lie群破缺至它的任意子群的情况.^[31]为了简化讨论,我们注意到,对于任意一组场,若它们 按照任意紧致Lie群G的非线性实现进行变换,那么总可以定义这些场(以及可能的额外场*)的函 数,使得这些函数在G下线性变换.^[32]从这一线性实现出发,本节的讨论使得我们可以用变换规 则(19.6.18)和(19.6.20)来构建 ξ 场和 $\tilde{\psi}$ 场.

尽管对于一般的 $g \in G$, $\xi(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 的变换比较复杂, 但是当g本身是未破缺子群H中的成元h时, 情况会简单得多. 通常总可能选择Goldstone玻色场 $\xi_a(x)$, 使得它按照未破缺子群H的某个 线性表示 $\mathcal{D}_{ab}(h)$ 进行变换:

$$h\gamma(\xi)h^{-1} = \gamma\left(\mathscr{D}(h)\xi\right) \,. \tag{19.6.21}$$

例如, 对于上一节所用的陪集空间SO(4)/SO(3), 在它的参数化中, Goldstone玻色场 ζ_a 构成同位 旋3-矢. 对于适用范围更广的基于方程(19.6.12)的参数化, 对易关系(19.6.9)表明 x_a 在H下线性变 换:

$$hx_b h^{-1} = \sum_a \mathscr{D}_{ba}(h) x_a ,$$
 (19.6.22)

由此可以立即得出方程(19.6.21). 比较方程(19.6.21)和方程(19.6.18), 我们看到对于 $g = h \in H$,

$$\xi'_{a}(x) = \sum_{b} \mathscr{D}_{ab}(h)\xi_{b}(x) , \qquad (19.6.23)$$

$$\tilde{\psi}'_n(x) = \sum_m h_{nm} \tilde{\psi}_m(x)$$
 (19.6.24)

^{*}例如,极角 θ 和方位角 φ 构成了*SO*(3)的非线性实现;通过增加变量r,我们可以构建在*SO*(3)下线性变换的量 x_1 , x_2 和 x_3 .

换句话说, $\xi_a 和 \tilde{\psi}_n \alpha H$ 下分别按照表示 $\mathcal{D}_{ab}(h) \eta h_{nm}$ 自身变换.

我们现在必须要考察如何构建在变换(19.6.18)和(19.6.20)下不变的最一般拉格朗日量. 对于 一般的 $g \in G$,变换 $\xi \to \xi'$ 是非线性的且非常复杂,这使得 $\xi_a(x)$ 只能凭借 $D_{a\mu}(x)$ 和 $E_{i\mu}(x)$ 这样的量 出现在拉格朗日量中. 幸运的是,这些量的变换规则十分简单. 对方程(19.6.18)相对 x^{μ} 微分一次并 左乘它的逆. 这给出

$$\gamma^{-1}(\xi(x))\partial_{\mu}\gamma(\xi(x)) = \left[g\gamma(\xi(x))\right]^{-1}\partial_{\mu}\left[g\gamma(\xi(x))\right]$$
$$= h^{-1}(\xi(x),g)\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_{\mu}\left[\gamma(\xi'(x))h(\xi(x),g)\right]$$
$$= h^{-1}(\xi(x),g)\left[\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_{\mu}\gamma(\xi'(x))\right]h(\xi(x),g)$$
$$+ h^{-1}(\xi(x),g)\partial_{\mu}h(\xi(x),g)$$

因而

$$\gamma^{-1}\left(\xi'(x)\right)\partial_{\mu}\gamma\left(\xi'(x)\right) = h\left(\xi(x),g\right)\left[\gamma^{-1}\left(\xi(x)\right)\partial_{\mu}\gamma\left(\xi(x)\right)\right]h^{-1}\left(\xi(x),g\right) \\ - \left[\partial_{\mu}h\left(\xi(x),g\right)\right]h^{-1}\left(\xi(x),g\right).$$
(19.6.25)

方程(19.6.14)所给出的 $\gamma^{-1}\partial_{\mu}\gamma$ 是x和t的线性组合. 另外, 方程(19.6.25)右边的第二项仅是t的线性 组合. 既然 x_a 和 t_i 全是互相独立的, 方程(19.6.25)两边每个生成元的系数必须全部相等:

$$\sum_{a} x_{a} D'_{a\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_{a} x_{a} D_{a\mu} \right) h^{-1}(\xi, g) , \qquad (19.6.26)$$

$$\sum_{i} t_{i} E'_{i\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_{i} t_{i} E_{i\mu} \right) h^{-1}(\xi, g) , \qquad + i \left[\partial_{\mu} h(\xi, g) \right] h^{-1}(\xi, g) \qquad (19.6.27)$$

或者,更细致一些,

$$D'_{a\mu}(x) = \sum_{b} \mathscr{D}_{ab} \left(h\left(\xi(x), g\right) \right) D_{b\mu}(x) ,$$

$$E'_{i\mu}(x) = \sum_{j} \mathscr{E}_{ij} \left(h\left(\xi(x), g\right) \right) E_{j\mu}(x)$$

$$-\sum_{b} \mathscr{H}_{ib} \left(h\left(\xi(x), g\right) \right) \partial_{\mu} \xi_{b}(x) , \qquad (19.6.28)$$

其中Dau和Eiu由方程(19.6.15)和(19.6.16)定义,并且

$$\begin{split} \Big[\partial_{\mu}h\Big(\xi(x),g\Big)\Big]h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big) &=\mathrm{i}\sum_{ib}\mathscr{H}_{ib}\Big(\xi(x)\Big)t_i\partial_{\mu}\xi_b(x)\ ,\\ h\,t_j\,h^{-1} &=\sum_i\mathscr{E}_{ij}(h)t_i\ , \end{split}$$

而 \mathcal{D}_{ab} 由方程(19.6.22)定义. 我们看到 $D_{a\mu}(x)$ 是Goldstone玻色场的"协变导数",它在一般群元 $g \in G$ 下的变换很像场 $\tilde{\psi}$:尽管分属不同的表示,但都投射到H变换 $h(\xi(x),g)$. 例如,在上一节

的SO(4)理论中, π 介子场 $\vec{\zeta}$ 的协变导数是 $\partial_{\mu}\vec{\zeta}/(1+\vec{\zeta}^2)$, 它在无限小手征变换下的变换是同位旋旋转(19.5.15).

另一方面, $E_{j\mu}(x)$ 的变换是非齐次的, 很像规范场. 方程(19.6.28)中的额外项可以用 $\tilde{\psi}$ 导数中的非齐次项抵消. 对方程(19.6.20)微分一次, 我们有

$$\partial_{\mu}\tilde{\psi}'(x) = h\Big(\xi(x),g\Big)\Big[\partial_{\mu}\tilde{\psi}(x) + h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big)\partial_{\mu}h\Big(\xi(x),g\Big)\tilde{\psi}(x)\Big] \ .$$

与方程(19.6.27)相结合,这给出

$$\left(\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi}(x)\right)' = h\Big(\xi(x), g\Big)\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi}(x) , \qquad (19.6.29)$$

其中 $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$ 是重粒子场的协变导数:

$$\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi}(x) \equiv \partial_{\mu}\tilde{\psi}(x) + i\sum_{i} t_{i}E_{i\mu}(x)\tilde{\psi}(x) . \qquad (19.6.30)$$

(在SO(4)破缺到SO(3)的情况中,方程(19.5.47)就提供了这种导数的一个例子.)任何拉格朗日量, 若它在未破缺子群H下不变,并且它是用 $\tilde{\psi}, \mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi}$ 和 $D_{a\mu}$ 构建的,那么它在整个群G下不变.

可重整性不是这里担心的问题,所以我们也可考察包含多个时空导数的量.其中的一个例子 是 $\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$,它通过重复操作(19.6.30)获得:

$$\mathscr{D}_{\nu}\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi} = \left[\partial_{\nu} + i\sum_{j} t_{j}E_{j\nu}\right] \left[\partial_{\mu} + i\sum_{i} t_{i}E_{i\mu}\right]\tilde{\psi} .$$
(19.6.31)

它的变换和 $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$ 一样

$$(\mathscr{D}_{\nu}\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi})' = h(\xi, g)\mathscr{D}_{\nu}\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi} .$$
(19.6.32)

其它协变量可以用协变Goldstone玻色子导数(19.6.15)的协变导数构建,这种量的定义很像(19.6.30), 但是要把 t_i 替换成由 x_a 所构建的H表示中的相应矩阵:

$$\mathscr{D}_{\nu}D_{a\mu} = \partial_{\nu}D_{a\mu} + \sum_{ib} C_{iab}E_{i\nu}D_{b\mu} , \qquad (19.6.33)$$

它的变换和Dau一样:

$$(\mathscr{D}_{\nu}D_{a\mu})' = \sum_{b} \mathscr{D}_{ab}(h,g)\mathscr{D}_{\nu}D_{b\mu} . \qquad (19.6.34)$$

另外, 通过对E_i和的导数做反对称化, 我们可以消掉(19.6.27)中的非齐次项. 这产生"曲率"

$$R_{i\mu\nu} \equiv \partial_{\nu} E_{i\mu} - \partial_{\mu} E_{i\nu} - i \sum_{j,k} C_{ijk} E_{j\mu} E_{k\nu} . \qquad (19.6.35)$$

这实际上并不是一个新量;很容易看到"物质"场 $\tilde{\psi}$ 的反对称协变导数正比于这一曲率

$$[\mathscr{D}_{\nu}, \mathscr{D}_{\mu}]\tilde{\psi} = \sum_{i} t_{i} R_{i\mu\nu} \tilde{\psi} . \qquad (19.6.36)$$

当然, 通过取 $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$ 和 $D_{a\mu}$ 的高阶协变导数, 我们可以继续这一过程, 进而构造出更多的协变量.

值得注意的是,一旦给定了群G和H,并给定了陪集空间G/H的参数化, $D_{a\mu}$ 和 $E_{i\mu}$ 就可以被彻底地计算出来,而且它们并不依赖场 ψ_n 假定的变换性质,也不依赖用来表示破缺对称群Lie代数的特定矩阵 x_a 和 t_i .例如,在指数参数化(19.6.12)中,这些协变量的幂级数展开中的前几项可以从方程(19.6.12)和(19.6.14)中轻松地计算出来

$$D_{a\mu} = \partial_{\mu}\xi_{a} + \frac{1}{2} \sum_{bc} C_{abc}\xi_{b}\partial_{\mu}\xi_{c}$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{bcd} \left[\sum_{e} C_{cde}C_{bea} + \sum_{i} C_{cdi}C_{bia} \right] \xi_{b}\xi_{c}\partial_{\mu}\xi_{d}$$

$$+ O(\xi^{3}\partial_{\mu}\xi) , \qquad (19.6.37)$$

$$E_{i\mu} = \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{abi}\xi_{a}\partial_{\mu}\xi_{b} + \frac{1}{6} \sum_{abcd} C_{acd}C_{bdi}\xi_{a}\xi_{b}\partial_{\mu}\xi_{c}$$

$$+ O(\xi^{3}\partial_{\mu}\xi) . \qquad (19.6.38)$$

为了构建包含Goldstone玻色场 ξ_a 以及一组重粒子场的最一般拉格朗日量,我们需要知道的只 有*G*到*H*的自发对称性破缺模式,以及重粒子场在*H*而不是*G*下的变换性质:这个拉格朗日量要取 成 $\tilde{\psi}, \mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}, D_{a\mu}$ 以及高阶协变导数的最一般的*H*-不变函数.

现在考察这样的情况: G下的对称性不仅是自发破缺的, 甚至本来就不是精确的. 假定在初始 拉格朗日量中有一项 $\Delta \mathscr{L}$, 它在线性变换 $\psi \rightarrow g\psi$ 的群G下不是不变的, 而是像G的某个(可约或不 可约)表示的分量的线性组合那样进行变换. 即, 我们取

$$\Delta \mathscr{L} = \sum_{A} c_A \mathcal{O}_A , \qquad (19.6.39)$$

其中OA在G下按照某个表示D[g]AB变换:

$$\mathcal{O}_A \to \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B$$
 (19.6.40)

如果我们现在用 ξ_a 和 $\tilde{\psi}$ 替换场 ψ ,拉格朗日量中的这一项依旧会采取(19.6.39)的形式,但是方程(19.6.40)现在变成

$$\mathcal{O}_A\Big[f_a(\xi,g),h(\xi,g)\tilde{\psi}\Big] = \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B\Big[\xi,\tilde{\psi}\Big] , \qquad (19.6.41)$$

其中 $f_a(\xi, g)$ 是给 ξ_a 作用g变换后的结果,由方程(19.6.18)定义:

$$g\gamma\left(\xi\right) = \gamma\left(f(\xi,g)\right)h(\xi,g) \ . \tag{19.6.42}$$

我们将会看到, 找到满足方程(19.6.41)的算符集是很容易, 并且, 在指定好 $\tilde{\psi}$ 的特定*H*-不变函数后, 这个解是唯一的.

首先,考察 $\xi_a = 0$ 且 $g = \gamma(\xi')$ 的情况.在这一情况下有 $g\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$,所以

$$f_a(0,\gamma(\xi')) = \xi'_a$$
, $h(0,\gamma(\xi')) = 1$.

将其代入方程(19.6.41),我们发现(去掉撇号):

$$\mathcal{O}_A\left[\xi_a, \tilde{\psi}\right] = \sum_B D[\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_B\left[0, \tilde{\psi}\right] \,. \tag{19.6.43}$$

如果我们知道算符 \mathcal{O}_A 在 $\xi_a = 0$ 时的形式,那么对于所有的 ξ_a ,这给出了算符 $\mathcal{O}_A[\xi_a, \tilde{\psi}]$.

现在取 $\xi_a = 0$, g则取成未破缺子群H中的元素h. 这时我们有 $g\gamma(\xi) = h$, 所以

$$f_a(0,h) = 0$$
, $h(0,h) = h$.

将其代入方程(19.6.41), 我们发现

$$\mathcal{O}_A\left[0,h\tilde{\psi}\right] = \sum_B D[h]_{AB} \mathcal{O}_B\left[0,\tilde{\psi}\right].$$
(19.6.44)

换句话说, 当 $\xi = 0$ 时, \mathcal{O}_A 在线性H变换下的变换必须与在G的表示(19.6.40)中发现的变换相同. (然而, 对于确定G表示(19.6.40)中所发现的各种不可约H表示的归一化而言, 这些毫无帮助; 其中的一些表示甚至可能完全不起作用.)

最后,我们注意到,任意一组满足(19.6.44)的算符*O*使得我们可以用方程(19.6.43)构建满足最 一般的*G*变换规则(19.6.40)的算符.利用方程(19.6.43)和(19.6.44),方程(19.6.41)的左边变成

$$\begin{split} \mathcal{O}_{A}\Big[f_{a}(\xi,g),h(\xi,g)\tilde{\psi}\Big] &= \sum_{B} D\Big[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)\Big]_{AB} \mathcal{O}_{B}\Big[0,h(\xi,g)\tilde{\psi}\Big] \\ &= \sum_{BC} D\Big[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)\Big]_{AB} D[h(\xi,g)]_{BC} \mathcal{O}_{C}\Big[0,\tilde{\psi}\Big] \\ &= \sum_{B} D\Big[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)h(\xi,g)\Big]_{AB} \mathcal{O}_{B}\Big[0,\tilde{\psi}\Big] \\ &= \sum_{B} D[g\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_{B}\Big[0,\tilde{\psi}\Big] \\ &= \sum_{B} D[g]_{AB} \mathcal{O}_{B}\Big[\xi,\tilde{\psi}\Big] \;, \end{split}$$

这正是我们所要证明的.

作为一个例子,考察上一节的SO(4)群自发破缺到SO(3)群,并假定我们希望用Goldstone玻 色场 $\zeta(x)$ 和其它场 $\tilde{\psi}(x)$ 构建的算符按照SO(4)的4-矢表示变换.根据(19.6.43),它们必须采取如下 的形式

$$\mathcal{O}_n\left[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}\right] = R_{nm}(\vec{\zeta}) \mathcal{O}_m\left[0, \tilde{\psi}\right] \,,$$

其中R是方程(19.5.8)和(19.5.9)定义的SO(4)旋转:

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2} , \qquad \qquad R_{44} = \frac{1-\zeta^2}{1+\vec{\zeta}^2} .$$

如果我们把R的其它分量选为

$$R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a \zeta_b}{1 + \vec{\zeta}^2} , \qquad \qquad R_{4a} = -\frac{2\zeta_a}{1 + \vec{\zeta}^2} ,$$

那么R就满足正交矩阵的条件.因此,对于任何的标量(与赝标量相反)算符,若它按照手征4-矢的 第4分量和第3分量进行变换,那么它必须以如下的形式出现在拉格朗日量中:

$$\Phi_4^+\left[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}\right] = -\left(\frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right) \cdot \vec{\Phi}^+\left[0, \tilde{\psi}\right] + \left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right) \Phi_4^+\left[0, \tilde{\psi}\right]$$

以及

$$\Phi_3^-\left[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}\right] = \left[\Phi_3^-\left[0, \tilde{\psi}\right] - \left(\frac{2\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\vec{\zeta} \cdot \vec{\Phi}^-\left[0, \tilde{\psi}\right]\right] + \left(\frac{2\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\Phi_4^-\left[0, \tilde{\psi}\right] \,.$$

算符 $\vec{\Phi}^+[0,\tilde{\psi}], \Phi_4^+[0,\tilde{\psi}], \vec{\Phi}^-[0,\tilde{\psi}]和\Phi_4^-[0,\tilde{\psi}]要满足的唯一条件是, 它们在Lorentz变换下分别是赝$ 标量, 标量, 标量和赝标量, 而在同位旋变换下分别是同位旋矢量, 同位旋标量, 同位旋矢量和同位旋标量, 但它们没有必要以任何方式相互关联. 对于仅包含π介子的过程, 我们所使用的拉格朗日 $量不包含π介子场<math>\vec{\zeta}$ 以外的场, 所以算符 $\vec{\Phi}^+[0,\tilde{\psi}], \vec{\Phi}^-[0,\tilde{\psi}]$ 和 $\Phi_4^-[0,\tilde{\psi}]$ 必须全部为零, 而 $\Phi_4^+[0,\tilde{\psi}]$ 则 只是数值常数. 正如上一节所承诺的, 我们看到, 有效拉格朗日量中唯一的非导数手征对称性破缺 算符正比于 $(1-\vec{\zeta}^2)/(1+\vec{\zeta}^2)$, 因而正比于算符(19.5.34). 为了引入同时是核子场双线性型的对称 性破缺算符, 宇称手征以及同位旋守恒要求我们取

$$\begin{split} \vec{\Phi}^{+} \begin{bmatrix} 0, \widetilde{N} \end{bmatrix} \propto \bar{\tilde{N}} \gamma_{5} \vec{t} \widetilde{N} , & \Phi_{4}^{+} \begin{bmatrix} 0, \widetilde{N} \end{bmatrix} \propto \bar{\tilde{N}} \widetilde{N} , \\ \vec{\Phi}^{-} \begin{bmatrix} 0, \widetilde{N} \end{bmatrix} \propto \bar{\tilde{N}} \vec{t} \widetilde{N} , & \Phi_{4}^{-} \begin{bmatrix} 0, \widetilde{N} \end{bmatrix} \propto \bar{\tilde{N}} \gamma_{5} \widetilde{N} . \end{split}$$

因此,正如上一节所宣称的,唯一的包含核子场双线性型的非导数对称性破缺项形式为(19.5.61)—(19.5.64).

若过程所包含的粒子3-动量很小, 唯像拉格朗日量就可用来计算这种过程的振幅, 而计算方法与上一节 π 介子和核子的手征理论所用的方法极其相似. 在计数比较小的特征动量Q的幂次时, Goldstone玻色子内线总会贡献阶为 Q^{-2} 的因子. 另外, 对于场 $\tilde{\psi}$ 所描述的(任意自旋的)重粒子, 它的一条内线在从Goldstone玻色场吸收净4-动量q后, 这条内线会有传播子

$$\frac{N(p+q)}{(p+q)^2+M^2} \to \frac{N(p)}{2p\cdot q}$$

(其中N是多项式, 它依赖于粒子自旋以及场的类型, 而M是粒子质量)所以它会贡献一个阶为Q⁻¹的因子. 给出(19.5.55)的讨论在这里也是适用的, 对于给定的Feynman图, 他给出的Q的幂次是

$$\nu = \sum_{i} V_i (d_i + h_i/2 - 2) + 2L - E_h/2 + 2 , \qquad (19.6.45)$$

其中 V_i 是i类顶角的个数, d_i 是i类顶角中导数的个数(若破缺的是近似对称性则是导数或Goldstone 玻色子质量的个数), h_i 是i类顶角中重粒子线的个数, L是圈的个数, 而 E_h 是重粒子外线的个数. 一般而言, 对于手征对称性所允许的一切相互作用, 系数 $d_i + h_i/2 - 2$ 是非负的. 对于仅存在Goldstone玻色子之间的相互作用, 它们要么至少是协变导数(19.6.15)的双线性型, 要么正比于对称性破缺参量(例如上一节中的夸克质量), 而这些参量的量级是Goldstone玻色子质量的平方, 所以这些相互作用总有 $d_i \ge 2$. Goldstone玻色子与重粒子之间的相互作用必须包含协变导数(19.6.15)或(19.6.30), 因而必须有 $d_i \ge 1$ 和 $h_i \ge 2$. 使得 $d_i + h_i/2 < 2$ 的相互作用只能是重粒子之间的三线性相互作用, 但是我们在所考察的图中所有的重强子都是非相对论性的, 所以这种相互作用被排除在外. 若所有相互作用均有 $d_i + h_i/2 \ge 2$, 领头阶的图只能用那些 $d_i + h_i/2 = 2$ 的相互作用进行构建并且不能包含圈. 修正依旧由那些含有多个导数和/或多个粒子场以及/或圈的相互作用给出.

当内禀对称性没有破缺时,只包含Goldstone玻色场的那部分拉格朗日量中 $d_i = 2$ 的项只有一个

$$\mathscr{L}_{\rm GB} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 D_{a\mu} D_b^{\mu} , \qquad (19.6.46)$$

其中 F_{ab}^2 是某个正定矩阵.对于(19.6.12)以及一大类别的陪集参数化,在 $\xi_a \rightarrow 0$ 时, $\gamma(\xi)$ 趋于1+ i $\xi_a x_a$,所以方程(19.6.14)表明 $D_{a\mu}$ 中的线性项只是 $\partial_{\mu}\xi_a$.那么,动能拉格朗日量为 $\frac{1}{2}\sum_a \partial_{\mu}\pi_a \partial^{\mu}\pi_a$ 的 正则归一化Goldstone玻色场 π_a 是

$$\pi_a = \sum_b F_{ab} \xi_b \ . \tag{19.6.47}$$

在上一节的SO(4)理论中, 生成元 x_a 和场 ξ_a 按照未破缺子群H = SO(3)的一个不可约表示变换, 所以在这一情况下 $F_{ab}^2 = F_{\pi}^2 \delta_{ab}$, 而 F_{π} 是用来表征自发对称性破缺能量标度的常数. 在一般情况下, 我们可以(在不改变结构常数的前提下)选择生成元使得 F_{ab}^2 是对角的, 而这些对角元在H的每个不可约表示中都是相等的, 但在其它情况下则相互独立.

* * *

我们已经看到如何从破缺对称群线性表示下的场出发构建出Goldstone玻色场的理论, 19.5节开头的 $SU(2) \times SU(2)$ 4-矢 $\phi_n(x)$ 就提供了一个例子. 当能量很低时,唯一重要的自由度 是Goldstone玻色子,所以我们一般会扔掉场的非Goldstone部分,例如方程(19.5.4)给出的 $\sigma(x)$ 场. 但是在某些情况下,我们必须要回到破缺对称群的整个线性表示,在这种情况下,Goldstone场只 是其中的一部分.

如果我们通过变化温度或者增加外场的方式将一个系统带到二阶相变附近,这样的情况就会 发生,在这样的情况下,系统将会从破缺对称性光滑地过渡到未破缺的对称性.在相变的一边,对 称性是破缺的,所以我们有无质量的Goldstone玻色子以及各种其它的有质量激发态,它们一般无 法构成构建破缺对称群线性表示所需要的完备多重态.在相变的另一边,对称性是未破缺的,所以 这时我们会有完备的线性多重态,但它们一般不是无质量的.如果这个相变是连续的,那么在这个 相变点附近,Goldstone玻色子必然是近无质量激发态构成的线性完备多重态的一部分.除非偶然 或是其它的对称性,这个多重态会构成破缺对称群的不可约表示.场的这种不可约多重态被称为 序参量,它仅在相变处才会变成无质量的.

序参量的这种定义要比通常的定义更加精确.通常所说的序参量是指任何一组期望值使得 对称性破缺的场,但这太含糊了——不存在这样的一组场,使得我们可以把对称性的破缺归咎于 这样场的期望值.例如,对于u夸克和d夸克无质量的量子色动力学,它的SU(2) × SU(2)对称性 被ūu + dd的期望值破坏了,这是某个手征4-矢的第4分量,但是夸克场的二次项或者更高次的项也 会有非零的期望值,并且它们属于SU(2) × SU(2)的其它表示.与之相反,在SU(2) × SU(2)变成未 破缺对称性的光滑相变处,Goldstone玻色子只是SU(2) × SU(2)的某个无质量表示的一部分,而 这为序参量提供了一个明确的定义.

找到正确的序参量是十分重要的,一方面是为了计算18.5节讨论的临界指数,另一方面是为了 处理像涡旋线或磁单极这样的构型,我们会在21.6节和23.3节看到,在这样的构型中,当破缺对称 性变成不破缺的对称性时会有一个奇点.对于量子色动力学的手征*SU*(2) × *SU*(2)对称性,它的序 参量通常假定是一个手征4-矢,但真实情况是否的确如此,这依旧是不清楚的.^[32a]

19.7 有效场论: $SU(3) \times SU(3)$

在20世纪60年代早期,核物理的近似SU(2)同位旋对称性被Gell-Mann^[33]和Ne'eman^[34]推广 至更加精确的SU(3)对称性,这一对称性将已知的重子和介子划分到各种不可约表示之中: 1/2⁺重子*p*, *n*, Λ⁰, Σ^{±,0}, Ξ^{-,0}的八重态; 0⁻介子*K*^{+,0}, π^{±,0}, η⁰, $\overline{K}^{-,0}$ 的八重态; 1⁻介子*K*^{*+,0}, ρ^{±,0}, ω, $\overline{K^*}^{-,0}$ 的八重态; 以及3/2⁺重子Δ^{++,+,0,-}, Σ^{*+,0,-}, Ξ^{*0,-}, Ω⁻的十重态.^g (η和Ω在当时还 未发现.) 手征*SU*(2) × *SU*(2)对称性在20世纪60年代中期取得了巨大成功, 在这之后, 人们很自然 地假定强相互作用也遵循近似的*SU*(3) × *SU*(3)对称性, 而这个对称性像*SU*(2) × *SU*(2)一样自发 破缺到它的对角子群, 即Gell-Mann和Ne'eman的*SU*(3)群. 因此, 在量子色动力学出现之后, 这种 对称性产生的原因就变得十分清楚了:存在3个而不2个非常轻的夸克; *u*夸克, *d*夸克, 以及第3个 夸克*s*, *s*同*d*一样带有电荷–1/3. 在这一情况下, *SU*(3) × *SU*(3)对称性由作用在*u*, *d*, *s*夸克场左手 部分和右手部分上相互独立的*SU*(3)变换构成(类比方程(19.4.2)):

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to \exp\left[i\sum_{a}(\theta_{a}^{V}\lambda_{a} + \theta_{a}^{A}\lambda_{a}\gamma_{5})\right] \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} , \qquad (19.7.1)$$

其中λ_a是无迹厄密矩阵的完备集:

$$\lambda_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (19.7.2)$$

它们的归一化使得Tr($\lambda_a \lambda_b$) = $2\delta_{ab}$.因此, $SU(3) \times SU(3)$ 的生成元在夸克场上表示成未破 缺SU(3)对称性的生成元 $t_a = \lambda_a$ 以及破缺对称性的生成元 $x_a = \lambda_a \gamma_5$.

为了定义Goldstone玻色子并解出它们的变换性质,我们注意到,在夸克场所构成的表示中,任何SU(3)×SU(3)变换可以写成未破缺SU(3)子群中的变换exp(i $\sum_{a} \theta_{a} \lambda_{a}$)乘以exp($-i\gamma_{5} \sum_{a} \xi_{a} \lambda_{a}$). (在ξ前面插入负号是为了方便之后用这个场的分量比较19.5节引入的π介子场.)因此在这个表示下,SU(3)×SU(3)/SU(3)的每个右陪集都由它内部的一个形为γ(ξ) = exp($-i\gamma_{5} \sum_{a} \xi_{a} \lambda_{a}$)的矩阵表示,在去掉归一化后,这些右陪集的参量 ξ_{a} 可以取成我们的Goldstone玻色场.根据方程(19.6.18),这些场的变换规则满足

$$\exp\left[i\sum_{a}(\theta_{a}^{V}\lambda_{a} + \theta_{a}^{A}\lambda_{a}\gamma_{5})\right]\exp\left(-i\gamma_{5}\sum_{a}\xi_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
$$= \exp\left(-i\gamma_{5}\sum_{a}\xi_{a}'(x)\lambda_{a}\right)\exp\left(i\sum_{a}\theta_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
(19.7.3)

其中 $\theta_a(x)$ 是 θ^V , θ^A 和 $\xi(x)$ 的某个函数. 另外, 根据方程(19.6.3), 无Goldstone分量的夸克场 $\tilde{q}(x)$ 在

^g这里的 $1/2^+$, 0^- , 1^- 等指的是 J^P 记法, 数字代表是的粒子总自旋J, 而±指的是粒子的宇称P. ——译者注

这里定义成

$$q(x) \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right) \tilde{q}(x)$$
(19.7.4)

而它的变换性质由方程(19.6.24)给出:

$$\tilde{q}'(x) = \exp\left(i\sum_{a}\theta_a(x)\lambda_a\right)\tilde{q}(x)$$
 (19.7.5)

我们可以像之前一样引入协变导数(19.6.15)和(19.6.30),并利用它们构建手征不变的拉格朗日密度,但对于手征对称性有一个更加简单的方法可供使用.

注意到, 方程(19.7.3)中正比于(1 + 75)的那部分和正比于(1 - 75)的那部分变成

$$\exp\left(i\sum_{a}\theta_{a}^{L}\lambda_{a}\right)\exp\left(-i\sum_{a}\xi_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
$$=\exp\left(-i\sum_{a}\xi_{a}'(x)\lambda_{a}\right)\exp\left(i\sum_{a}\theta_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
(19.7.6)

和

$$\exp\left(i\sum_{a}\theta_{a}^{R}\lambda_{a}\right)\exp\left(i\sum_{a}\xi_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
$$=\exp\left(i\sum_{a}\xi_{a}'(x)\lambda_{a}\right)\exp\left(i\sum_{a}\theta_{a}(x)\lambda_{a}\right)$$
(19.7.7)

其中

$$\theta_a^L \equiv \theta_a^V + \theta_a^A , \qquad \qquad \theta_a^R \equiv \theta_a^V - \theta_a^A .$$

给方程(19.7.7)的右边乘以方程(19.7.6)的逆,我们就发现简单的变换规则

$$U'(x) = \exp\left(i\sum_{a}\lambda_{a}\theta_{a}^{R}\right)U(x)\exp\left(-i\sum_{a}\lambda_{a}\theta_{a}^{L}\right) , \qquad (19.7.8)$$

其中U(x)是幺正幺模矩阵

$$U(x) \equiv \exp\left(2i\sum_{a}\xi_{a}(x)\lambda_{a}\right) .$$
(19.7.9)

换句话说, U(x)按照 $SU(3) \times SU(3)$ 的($\bar{\mathbf{3}}$, $\mathbf{3}$)表示变换. 由于U(x)的分量不是独立的, 它依旧 是 $SU(3) \times SU(3)$ 的非线性实现; 它们服从非线性约束 $U^{\dagger}U = 1$ 和Det U = 1.

在Goldstone玻色子的拉格朗日量中, (SU(3) × SU(3))不变的二阶时空导数项只有一个, 它是

$$\mathscr{L}_{2\,\text{deriv}} = -\frac{1}{16}F^2\,\text{Tr}\{\partial_{\mu}U\,\partial^{\mu}U^{\dagger}\}\;.$$
(19.7.10)

其中F²是留待决定的常数. 我们可以把ξa表示成按照惯例归一化的赝标量介子场, 即将其写成

$$\sum_{a} \lambda_{a} \xi_{a} = \frac{\sqrt{2}}{F} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} & \pi^{+} & K^{+} \\ \pi^{-} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} & K^{0} \\ \bar{K}^{-} & \bar{K}^{0} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta^{0} \end{bmatrix} \equiv \frac{\sqrt{2}B}{F} , \qquad (19.7.11)$$

这使得方程(19.7.10)中的动能项有着和往常相同的形式

$$\mathscr{L}_{\rm kin} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- - \partial_\mu K^+ \partial^\mu \bar{K}^- - \partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 - \frac{1}{2} \partial_\mu \eta^0 \partial^\mu \eta^0 \ .$$

为了决定常数*F*,我们发现,当我们在 ξ 无限小时比较方程(19.7.4)和方程(19.5.42),分量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 必须与19.5节引入的Goldstone玻色场 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 相同.这样,用(19.7.11)比较(19.5.17)和(19.5.32),我 们会发现方程(19.7.10)定义的常数*F*就是19.4节引入的 $F_{\pi} = 184$ MeV.

夸克质量项破坏了量子色动力学的SU(3) × SU(3)对称性.利用方程(19.7.4)定义的夸克 场q̃(x),这个质量项可以写成

$$\mathscr{L}_{\text{mass}} = -\bar{q} M_q q = -\bar{\tilde{q}} e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} \tilde{q}$$
(19.7.12)

其中

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0\\ 0 & m_d & 0\\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} .$$
(19.7.13)

方程(19.7.12)包含一个纯玻色部分,这个玻色部分是通过将夸克双线性型替换成它的真空期望值获得的,它的值由未破缺的SU(3)对称性以及宇称对称性给出*

$$\langle \bar{\tilde{q}}_n \gamma_5 \tilde{q}_m \rangle_0 = 0$$
, $\langle \bar{\tilde{q}}_n \tilde{q}_m \rangle_0 = -v \delta_{nm}$. (19.7.14)

那么,拉格朗日量中的Goldstone玻色子质量项就是

$$-\frac{v}{F_{\pi}^{2}} \operatorname{Tr}\{B, \{B, M_{q}\}\} = -\frac{v}{F_{\pi}^{2}} \left[4m_{u} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} \right)^{2} + 4(m_{u} + m_{d}) \pi^{+} \pi^{-} + 4(m_{u} + m_{s}) K^{+} \bar{K}^{-} + 4m_{d} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} \right)^{2} + 4(m_{d} + m_{s}) K^{0} \bar{K}^{0} + \frac{8}{3} m_{s} (\eta^{0})^{2} \right].$$

$$(19.7.15)$$

由此,我们可以读出[35]

$$m_{\pi^{+}}^{2} = m_{\pi^{0}}^{2} = \frac{4v}{F_{\pi}^{2}} [m_{u} + m_{d}] ,$$

$$m_{K^{+}}^{2} = \frac{4v}{F_{\pi}^{2}} [m_{u} + m_{s}] ,$$

$$m_{K^{0}}^{2} = \frac{4v}{F_{\pi}^{2}} [m_{d} + m_{s}] ,$$

$$m_{\eta^{0}}^{2} = \frac{4v}{F_{\pi}^{2}} \left[\frac{4m_{s} + m_{d} + m_{u}}{3} \right] ,$$
(19.7.16)

^{*}真空遵循的宇称守恒律,荷守恒律以及奇异数守恒律与夸克质量矩阵所遵循的守恒律相同,这是19.3节讨论的真空对齐条件所给出的结果.同样,如果夸克场的定义使得夸克质量都是正定的,那么在假定v > 0后,对于经由SU(3) × SU(3)变换旋转的真空态,真正的真空应该处在真空能的最小值而非最大值这个条件给出了方程(19.7.3)中的负号,我们将会看到,正是这个符号使得赝Goldstone玻色子八重态的质量为正.

以及一个 π^0 和 η^0 的混合项:

$$m_{\pi\eta}^2 = \frac{4v}{\sqrt{3}F_{\pi}^2} [m_u - m_d] . \qquad (19.7.17)$$

利用算符方法也可获得相同的结果. Noether定理使得我们可以构建生成元 T_a 和 X_a , 使得它们满足

$$[T_a, q] = -\lambda_a q$$
, $[X_a, q] = -\gamma_5 \lambda_a q$. (19.7.18)

我们可以将实基下的Goldstone玻色场写成 π_a ,其中 $\pi^{\pm} = (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}$, $\pi_0 = \pi_3$, $K^{\pm} = (\pi_4 \pm i\pi_5)/\sqrt{2}$, $K^0 = (\pi_6 + i\pi_7)/\sqrt{2}$, $\bar{K}^0 = (\pi_6 - i\pi_7)/\sqrt{2}$,以及 $\eta^0 = \pi_8$.在自发对称性破缺下幸存的那个SU(3)对称性告诉我们,这些玻色子的F-矩阵所采取的形式是 $F_{ab} = F_{\pi}\delta_{ab}$.SU(3)×SU(3)对称性同时也被哈密顿量中的质量项 $H_1 = m_u \bar{u} u + m_d \bar{d} d + m_s \bar{s} s = \bar{q} M_q q$ 从本质上破坏了,其中 M_q 是夸克质量矩阵(19.7.13).赝Goldstone玻色子的质量矩阵在这里由(19.3.20)给出,它是

$$M_{ab}^2 = -F_{\pi}^{-2} \langle \bar{q} \{ \lambda_a, \{ \lambda_b, M_q \} \} q \rangle_0 .$$
 (19.7.19)

既然它已经是夸克质量的一阶项,在这一阶我们可以使用未破缺SU(3)关系 $\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 = \langle \bar{s}s \rangle_0 \equiv -v$,并像之前一样发现(19.7.16)和(19.7.17).

K介子二重态的质量 $m_{K^+} = 493.65 \text{ MeV} 和 m_{K^0} = 497.7 \text{ MeV}$ 非常接近并且远大于 π 介子 的质量,所以,从(19.7.16)中我们可以看到 m_u 和 m_d 必须远小于 m_s .在计算对 m_u 和 m_d 比较敏感 的量时,比如K介子质量差或 π 介子质量,我们同时还应该把其外一个比较小的修正考虑在 内:电磁效应.电磁流是 $J^{\mu} = ie\bar{q}\gamma^{\mu}Qq$,其中Q是对角元为2/3, -1/3和-1/3的对角矩阵.它 与 $SU(3) \times SU(3)$ 生成元的对易子是

$$[T_a, J^{\mu}] = -\mathrm{i}e\,\frac{1}{2}\bar{q}\gamma^{\mu}[Q, \lambda_a]q , \qquad [X_a, J^{\mu}] = -\mathrm{i}e\,\frac{1}{2}\bar{q}\gamma^{\mu}\gamma_5[Q, \lambda_a]q .$$

我们看到 J^{μ} 与 X_3, X_6, X_7, X_8 以及 T_3, T_6, T_7, T_8 对易,所以哈密顿量的电磁部分在这些生成元 生成的 $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$ 子群下不变.因此,在夸克质量为零的极限下,对于中性 *魇 Goldstone*玻色子 π^0, K^0, \bar{K}^0 以及 η^0 ,即与生成元为 X_3, X_6, X_7, X_8 的对称性自发破缺相联系 的Goldstone玻色子,电磁效应对它们的质量没有贡献.^[36]另外,在零夸克质量极限下,有一个 由 T_6, T_7 和 $\sqrt{3}T_8 - T_3$ 生成的未破缺SU(2)对称性,在这个对称变换下, K^+ 和 π^+ 像一个二重态那样 进行变换,这使得,当夸克质量为零时,对 K^+ 和 π^+ 质量的电磁修正是相同的.^[36]既然夸克质量项 和电磁修正都很小,将这些效应视为有效夸克哈密顿量的额外修正是十分合理的.那么,在把电磁 效应考虑在内之后,我们看到质量公式(19.7.16)应该修正成^[37]

$$m_{K^{\pm}}^{2} = 4v(m_{u} + m_{s})/F_{\pi}^{2} + \Delta ,$$

$$m_{K^{0}}^{2} = m_{\bar{K}^{0}}^{2} = 4v(m_{d} + m_{s})/F_{\pi}^{2} ,$$

$$m_{\pi^{\pm}}^{2} = 4v(m_{d} + m_{u})/F_{\pi}^{2} + \Delta ,$$

$$m_{\pi^{0}}^{2} = 4v(m_{d} + m_{u})/F_{\pi}^{2} ,$$

$$m_{\eta}^{2} = 4v(m_{u} + m_{d} + 4m_{s})/3F_{\pi}^{2} ,$$

(19.7.20)

其中 $\Delta \in K^+$ 和 π^+ 质量平方共用的电磁修正.

这些公式给这五个赝Goldstone玻色子质量附加了一个线性关系,这是Gell-Mann-Okubo关系的一个版本:**

$$3m_{\eta}^{2} + 2m_{\pi^{+}}^{2} - m_{\pi^{0}}^{2} = 2m_{K^{+}}^{2} + 2m_{K^{0}}^{2} . \qquad (19.7.21)$$

根据实验对K介子和π介子质量取值,这个关系就给出了 η 的质量566 MeV,而实验给出的值 是547 MeV. 这个微小的差异通常来源于 η 态与一个更重的赝标量粒子的混合,确切一些, η 与958 MeV处的 η '的混合.

这些公式中没有一个给出单个夸克质量确定的值.事实也的确如此,除非我们定义了夸克 双线性型的重整化方案,否则这些质量是不能良好定义的.这个方案通常被设计成使得 m_s 等 于同位旋多重态之间的质量差,而这些同位旋多重态是某个SU(3)多重态中相差一个奇异数 单位的两个同位旋多重态.例如,最轻的矢量介子八重态由892 MeV处的同位旋二重态 K^* , 770 MeV处T = 1的 ρ 粒子以及783 MeV处T = 0的 ω 粒子构成;这个 K^* 二重态被解释成一个s反 夸克与一个u夸克或一个d夸克构成的束缚态,而它的反二重态则由一个s夸克和一个a夸克或一 个d夸克构成;至于 ρ 和 ω ,它们均解释成一个a夺克或一个d夺克与一个u夺克或一个d夸克构成的束 缚态.如果我们希望把 K^* 质量与 ρ 和 ω 的平均质量之间的差归因于质量相对较大的s夺克,那么我 们必须对这个夸克双线性型做重整化,使得 $m_s - \frac{1}{2}(m_u + m_d) = m_{K^*} - \frac{1}{2}(m_\rho + m_\omega) = 120$ MeV,这 给出 $m_s = 125$ MeV.再加上前面的夸克比值,这会给出 $m_d = 6.0$ MeV和 $m_u = 3.3$ MeV.然而,这 些质量估计值远没有方程(19.7.22)中给出的质量比值那么可信. m_s 通常被估计^[38b]成180 MeV而 不是125 MeV.

从质量公式(19.7.20)出发,我们可以用π介子和K介子的质量表示夸克质量比值:^[37]

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}, \qquad \frac{m_u}{m_s} = \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}.$$
(19.7.22)

利用质量值 $m_{\pi^+} = 139.57 \text{ MeV}, m_{\pi^0} = 134.974 \text{ MeV}, m_{K^+} = 493.65 \text{ MeV}$ 以及 $m_{K^0} = 497.7 \text{ MeV},$ 我们得到了比值 $m_d/m_s = 0.050 \pi m_u/m_s = 0.027.$ 因此d夸克和u夸克的质量比值更接近于2而不是1. (在1996年的一个计算中^[38a], 综合各方面的信息以及赝标量介子质量后, 这个计算给出了 $m_d/m_s = 0.053 \pm 0.002 \pi m_u/m_s = 0.029 \pm 0.003.$)

质量项(19.7.12)包含介子-介子相互作用.利用方程(19.7.14), (19.7.11)以及(19.7.9), 我们可以将拉格朗日量中该项的纯玻色部分写成

$$\mathscr{L}_{\text{mass, bosonic}} = \frac{1}{2}v \operatorname{Tr} \left\{ M_q(U^{\dagger} + U) \right\}$$
 (19.7.23)

这一项的形式也可通过一般的对称性讨论推断出来,而这种讨论同时使得我们能够找到 M_q 可能的高阶项.假定我们虚构出一个3 × 3外场 χ ,并将底层量子色动力学拉格朗日量中的质量 项(19.7.12)替换成 χ -夸克耦合项

$$\mathscr{L}_{\chi} = -\bar{q} \left[\frac{1}{2} (1+\gamma_5) \chi + \frac{1}{2} (1-\gamma_5) \chi^{\dagger} \right] q , \qquad (19.7.24)$$

^{**}这个关系最初是基于Gell-Mann和Ne'eman的近似SU(3)对称性对称出来的,^[38]这个对称性由T_a生成并且在推导中忽视了同位旋多重态内部的质量差.从这个推导出发,我们无法分辨这个关系是适用于赝标量介子质量本身,还是像这里这样适用于它们的平方.实际上,这个关系对于赝标量质量本身不是非常有效;它所给出的η质量是613 MeV. Gell-Mann-Okubo关系对介子质量平方而非质量一阶非常有效表明,应该把这些粒子解释成近似SU(3) × SU(3)对称性自发破缺的Goldstone玻色子.通过这个T_a生成的近似SU(3)对称性,Gell-Mann和Okuba还导出了其它粒子之间的关系,例如(忽视同位旋破缺效应)最轻的重子八重态质量之间的关系2 m_N + $2m_{\Xi}$ = $3m_{\Lambda}$ + m_{Σ} .对于这样的多重态,由于平均质量远大于多重态内部的质量差,这个关系针对的是质量还是质量平方差距不大.

在我们做替换 $\chi = \chi^{\dagger} = M_q$ 之后, 它就与方程(19.7.12)相同. 这个处理的关键之处在于, 如果我们 赋予 χ 形式的变换规则

$$\chi \to \exp\left(i\sum_{a}\lambda_{a}\theta_{a}^{R}\right)\chi\,\exp\left(-i\sum_{a}\lambda_{a}\theta_{a}^{L}\right)\,,$$
(19.7.25)

那么拉格朗日量(19.7.24)在 $SU(3) \times SU(3)$ 变换下形式上是不变的.因此,通过写出包含U和 χ 的 最一般 $SU(3) \times SU(3)$ 拉格朗日量(到导数和 M_q 的某个给定阶),并要求它在如下的宇称变换下不 变

$$U(\mathbf{x},t) \leftrightarrow U^{\dagger}(-\mathbf{x},t) , \qquad \chi \leftrightarrow \chi^{\dagger} , \qquad (19.7.26)$$

然后做代换

$$\chi = \chi^{\dagger} = M_q , \qquad (19.7.27)$$

我们就得到了可能的包含夸克质量的玻色项. 例如, 相互作用Tr $(U^{\dagger}\chi + U\chi^{\dagger})$ 在 $SU(3) \times SU(3)$ 以 及宇称变换下不变, 在我们赋予 χ 值(19.7.27)后, 它就变成与方程(19.7.23)相同的形式.

利用这个技巧, Gasser和Leutwyler^[39]给出了赝标量多重态关于介子质量或动量4阶的完整有效拉格朗日量(其中夸克质量计成介子质量的二阶)

$$\mathscr{L}_{4} = L_{1} \operatorname{Tr} \left\{ \partial_{\mu} U^{\dagger} \partial^{\mu} U \right\}^{2} + L_{2} \operatorname{Tr} \left\{ \partial_{\mu} U \partial_{\nu} U^{\dagger} \right\} \operatorname{Tr} \left\{ \partial^{\mu} U \partial^{\nu} U^{\dagger} \right\} + L_{3} \operatorname{Tr} \left\{ \partial_{\mu} U \partial^{\mu} U^{\dagger} \partial_{\nu} U \partial^{\nu} U^{\dagger} \right\} + L_{4} \operatorname{Tr} \left\{ \partial_{\mu} U \partial^{\mu} U^{\dagger} \right\} \operatorname{Tr} \left\{ M_{q} (U + U^{\dagger}) \right\} + L_{5} \operatorname{Tr} \left\{ \partial_{\mu} U \partial^{\mu} U^{\dagger} (M_{q} U + U^{\dagger} M_{q}) \right\} + L_{6} \left[\operatorname{Tr} \left\{ M_{q} (U + U^{\dagger}) \right\} \right]^{2} + L_{7} \left[\operatorname{Tr} \left\{ (U^{\dagger} - U) M_{q} \right\} \right]^{2} + L_{8} \operatorname{Tr} \left\{ ((U M_{q})^{2} + (U^{\dagger} M_{q})^{2}) \right\},$$
(19.7.28)

其中*L*₁,…,*L*₈是常数,它们的值可以通过比对实验给出.到介子质量和动量的4阶,完整的有效拉格朗日量是

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_4 , \qquad (19.7.29)$$

其中£2是(19.7.10)和(19.7.23)的和:

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{1}{16}F^2 \operatorname{Tr}\left\{\partial_{\mu}U\partial^{\mu}U^{\dagger}\right\} + \frac{1}{2}v \operatorname{Tr}\left\{M_q(U^{\dagger}+U)\right\} .$$
(19.7.30)

通过将导数 ∂_{μ} 替换成合适的规范协变导数 D_{μ} ,并给 \mathcal{L}_{eff} 额外增加几项,我们就可以引入电弱相互作用.

沿用19.5节和19.6节中的幂次计数讨论,为了将S-矩阵元计算至介子质量或动量的4阶,我 们必须要引入关于 £2为任意阶且关于 £4至多为一阶的树图,以及仅从 £2构建的圈图. Gasser, Leutwyler以及其他几个人利用这个有效作用量对介子动力学(以及相应的电弱相互作用)做了全 面的研究.^[40]

* * *

夸克质量项(19.7.12)自然会影响其它SU(3)多重态.对于赝标量八重态以外的任何多重态,这一项可以视为一阶微扰,因此它会使一般多重态|*i*〉的质量矩阵发生偏移,这个偏移等于

$$\delta m_{ij} = \langle i | \bar{\tilde{q}} M_q \tilde{q} | j \rangle \tag{19.7.31}$$

而SU(3)可以用来^[41]将不同的矩阵元 $\langle i | \bar{\tilde{q}} M_q \tilde{q} | j \rangle$ 关联起来.以这种方式,我们可以直接证明

$$\frac{\delta m_p - \delta m_n}{m_u - m_d} = \frac{m_\Xi - m_\Sigma}{m_s} \ . \tag{19.7.32}$$

利用这个公式以及方程(19.7.22), 我们就可以给出夸克质量对核子质量分裂的贡献 $\delta m_p - \delta m_n \approx -2.5$ MeV. 在方程(19.5.65)和(19.5.66)中使用这个结果可以算出低能 π 介子-核子相互作用中的领头同位旋对称性破缺. 当然, 这里所定义的 $\delta m_p - \delta m_n$ 不是全部的质子-中子质量差, 整个质子-中子质量差还会从光子发射和吸收中得到一个重要的贡献. 因为中子是电中性的, 电磁项几乎肯定是正的, 这与观测到的质子-中子质量差—1.3 MeV相符, 丢失的+1.2 MeV可以用电磁效应解释. 不幸的是, 这种电磁质量差的精确计算已经被证实是非常困难的.

19.8 有效场论中的反常项*

为了实现前三节所描述的有效场论方案, 必要条件是作用量应该包含理论假定对称性允许的所有可能的项. 这些章节所描述的方法使得我们可以找到所有显然不变的项, 一种方法是通过19.6节所描述的协变导数的一般理论, 或者, 对于手征对称性, 使用服从非线性约束的线性变换场, 例如19.7节的*U*(*x*). 然而, 在有效场论中的作用量中还有可能存在反常项, 即作为要被积分的4维拉格朗日密度, 它们不是不变的, 但是它们在破缺对称性下的变分是时空导数, 这保护了作用量中相应项的不变性.

我们会在22.7节看到, 对于*SU*(3) × *SU*(3)对称性, Wess和Zumino^[42]在研究夸克圈引起的"反 常"时发现了这样的项. 然而, 即使对夸克和胶子的底层理论一无所知, 这样的项依旧是可以理解 的.

描述Wess-Zumino项的最简单方法是将时空拓展成五维,为了这个目的而将时空拓展至五 维最早是Witten引入的.^[43] 只要我们要求有效场论中的场在 x^{μ} 以任何方向趋于无穷时有一个 共同的极限,我们就可以认为是时空有球面 S_4 的拓扑,而无穷远处的点将作为普通的一个点纳 入进来. 正如19.6节所论述的,当群G破缺到它的子群H,Goldstone玻色场 $\xi_a(x)$ 在任意时空点 的可能值可以认为定义了陪集空间G/H(G中的元素构成的空间,并且如果任意两个元素可以 通过右乘H中的元素变成彼此,那个这两个元素是等价的)中的一个点,所以函数 $\xi_a(x)$ 的集合代 表的是时空 S_4 球面到G/H的映射.取决于G/H的拓扑,我们有可能把G/H中的任意4-球面光滑 地收缩到一个点;即,存在这样的可能性:任何 $\xi_a(x)$ 可以拓展至定义在0 $\leq s \leq 1$ 上的连续函数 族 $\xi_a(x;s)$,使得 $\xi_a(x;0) = \xi_a(x)$ 且 $\xi_a(x;1)$ 是原始球面上的任意固定点(例如, $\xi_a = 0$).当其成立时, 它在数学上可以表述成同伦群 $\pi_4(G/H)$ 是平庸的.(关于同伦群的讨论,参看23.2节)已知的是, $SU(N) \times SU(N)$ 自发破缺到SU(N)正是这样的情况,这时 $SU(N) \times SU(N)/SU(N)$ 与SU(N)本 $身的拓扑相同.** 因此,在物理学感兴趣的情况中,即<math>G = SU(3) \times SU(3), H = SU(3),$ 我们可以 将Goldstone玻色场或者等价的U(x)(参看方程(19.7.9))拓展至定义在五维球体 B_5 上的幺正幺模矩 阵U(y),我们取 B_5 的坐标为 x^{μ} 和s,而它的表面就是时空的4维球面.

现在,考察由U(y)构成的函数:

$$\omega(y) \equiv -\frac{\mathrm{i}}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \operatorname{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^m} \right\} , \qquad (19.8.1)$$

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^{**}我们可以用SU(N)中的元素U(x)表示SU(N)在 $SU(N) \times SU(N)$ 中的右陪集,这一点证实了这个论述

其中指标i, j等跑遍坐标 x^{μ} 和s的五个方向.(这里的相位以及数值系数的选择是为了后面的方便.) 它在手征变换(19.7.8)下显然是不变的.另外,由于 ϵ^{ijklm} 是张量密度, $\omega(y)$ 的积分显然(在相差一个 符号的意义下)独立于对五维坐标 y^i 的选择.更进一步,这个积分只依赖于U(y)在球面的值;即U在 时空中的值.为了验证最后一点,注意到,当我们对球体内部的U(y)做一个无限小变分 $\delta U(y)$ 后, $\omega(y)$ 的变化是一个导数:

$$\delta\omega(y) = -\frac{\mathrm{i}}{48\pi^2} \epsilon^{ijklm} \frac{\partial}{\partial y^m} \operatorname{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \delta U \right\} , \qquad (19.8.2)$$

(关于此式的计算,参看23.4节),所以*U*(*y*)的变换不影响它在时空中的取值,并且对于球面为时空的5维球体*B*₅,*U*(*y*)的变换也不影响(19.8.1)在这个5维球体上的积分.因此我们可以认为这个积分 是作用量中的一项:

$$I_{\rm WZW}[U] = n \int_{B_5} d^5 y \,\omega(y)$$
 (19.8.3)

其中的系数n现在还没有任何限制.

这一项可以写成对一个拉格朗日密度的积分,但是这个拉格朗日密度不是(SU(3)×SU(3))-不 变量.利用方程(19.7.9),在介子场很小的极限下,ω(x)中的领头项是

$$\omega(x) \to \frac{8\sqrt{2}}{15\pi^2 F_{\pi}^2} \epsilon^{ijklm} \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial B}{\partial y^i} \frac{\partial B}{\partial y^j} \frac{\partial B}{\partial y^k} \frac{\partial B}{\partial y^l} \frac{\partial B}{\partial y^m} \right\} , \qquad (19.8.4)$$

其中的B是Goldstone玻色场矩阵(19.7.11). 那么,从Gauss定理可以得出

$$I_{\rm WZW}[U] = \frac{8\sqrt{2}n}{15\pi^2 F_{\pi}^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_{S_4} d^4x \,\,{\rm Tr}\left\{B\frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial B}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial B}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial B}{\partial x^{\sigma}}\right\} + O\left(\frac{B^6}{F_{\pi}^6}\right) \,\,. \tag{19.8.5}$$

尽管这个积分是手征不变的,但它不能写成一个手征不变的密度在时空上的积分,这是因为任何手征不变密度必须要用Goldstone玻色场的一阶和高阶协变导数进行构造,所以,如果表示成Goldstone玻色场的幂级数,这种不变密度中的领头项应该只包含B的导数,但不应该包含B本身.

Witten注意到,在有效作用量引入这一项解决了 $SU(3) \times SU(3)$ 有效理论与实验的一个矛盾. 由于有效拉格朗日量(19.7.28)和(19.7.30)(或者这类项的高阶项)中没有 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 项, 宇称守恒会附加 这样的要求,这些项关于Goldstone玻色场必须为偶,这就排除了像 $K + \bar{K} \rightarrow 3\pi$ 的过程.一方面, 在量子色动力学的潜在理论中没有用来解释这种选择规则的对称性,另一方面,还有实验上的证 据反对这一点,正如Witten指出的, ϕ 介子即被观测到衰变到 $K + \bar{K}$ 末态也被观测到衰变到 3π 末态. 方程(19.8.5)证明了作用量中的Wess-Zumino-Witten项会移除这种不需要的选择规则.

值得注意的是, Wess-Zumino-Witten项的系数不是可以随便调节的参量. 这是Witten所证明的,^[43] 原因是: 在保持时空边界 S_4 上的U(x)不变的前提下, 尽管函数U(y)在 B_5 中的光滑变化不影响该项的值, 但如果U(y)在 B_5 中的变化是不连续的, 那么Wess-Znmino-Witten项就会受到影响. 我们可以认为5维球体 B_5 是5维球面 S_5 的一半, 而时空 S_4 就是 B_5 与另一半 B'_5 的交界. (可以类比地认为 S_5 是地球的表面, 时空 S_4 是赤道, 而 B_5 和 B'_5 分别是北半球和南半球.) 由于 S_4 同时是 S_5 的另一半的边界, 我们也可以将Wess-Zumino-Witten项写成

$$I'_{\rm WZW}[U] = -n \int_{B'_5} d^5 y \,\omega(y)$$
(19.8.6)

这里的负号是因为 B'_5 的边界是方向相反的4维球面.对于任意的Goldstone玻色场,不设n = 0却要求(19.8.3)和(19.8.6)相等是不可能的,但是为了不让(19.8.3)与(19.8.6)的差影响路径积分中的权重因子exp(iI),只能要求它们的差是 2π 的整数倍.即,

$$I_{\rm WZW}[U] - I'_{\rm WZW}[U] = n \int_{S_5} d^5 y \,\omega(y) = 2\pi \times \underline{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{K}}.$$
 (19.8.7)

有了我们在 $\omega(y)$ 的定义(19.8.1)中插入的归一化因子, $\omega(y)$ 在五维球面上的积分值^[44]2 π . 由此得出 系数n必须是整数.

Wess-Zumino-Witten项的例子提出了这样的问题:作用量是否还存在其它的反常项,它不一定与夸克圈相关,它在 $SU(3) \times SU(3)$ 下是不变的,但是却无法写成 $SU(3) \times SU(3)$ 不变拉格朗日 密度的4维积分.幸运的是,答案是否定的.业已证明,^[45]对于任意群G破缺它的任意子群H(并 有 $\pi_4(G/H) = 0$),在作用量中,Goldstone玻色场 $\xi_a(x)$ 的任意项 $F[\xi]$ 可以写成G-不变5-形式 Ω 在5维 球体 B_5 上的积分,而该5维球体的边界是4维时空球面 S_4 :

$$F[\xi] = \int_{B_5} \mathrm{d}^5 y \,\epsilon^{ijklm} \,\frac{\partial \xi_a}{\partial y^i} \frac{\partial \xi_b}{\partial y^j} \frac{\partial \xi_c}{\partial y^k} \frac{\partial \xi_d}{\partial y^l} \frac{\partial \xi_e}{\partial y^m} \Omega_{abcde}(\xi(y)) \,\,. \tag{19.8.8}$$

为了使其独立于 $\xi_a(x)$ 扩展至5维球体内部的特定方式, Ω 应该是恰当的, 也就是说它是某个4-形式的外导数

$$\Omega_{abcde}(\xi) = (\partial/\partial\xi_{[a})\mathscr{L}_{bcde]}(\xi)$$
(19.8.9)

(像往常一样,这里的方括号是指对括号内的指标做反对称化),这使得

$$F(\xi) = \int_{S_4} \mathrm{d}^4 x \,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial\xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^b}{\partial x^\nu} \frac{\partial\xi^c}{\partial x^\rho} \frac{\partial\xi^d}{\partial x^\sigma} \mathscr{L}_{abcd}(\xi) \,. \tag{19.8.10}$$

由此得出Ω也是闭的;即,它的外导数为零

$$(\partial/\partial\xi_{[f})\Omega_{abcde]}(\xi) = 0. \qquad (19.8.11)$$

其中4-形式 $\mathcal{L}_{abcd}(\xi)$ 也是G-不变量,泛函(19.8.10)正是作用量中普通的显式G-不变项,这正是我们 在前三节讨论过的.作用量中的反常项源于这样的可能性:尽管 $\Omega(y)$ 中的每一项是G-不变量并 且是某个4-形式的外导数,但是其中的一些项可能不是G-不变4-形式的外导数.因此,作用量中 的新项可以视为独立的G-不变闭5-形式,也就是说不存在它们真实的线性组合使得这个线性组合 是G-不变4-形式的外导数.它们在数学中被称为de Rham上同调释H⁵(G/H; **R**)的生成元.(这里 的群乘法规则就是加法.)对于各种拓扑的流形,它们的de Rham上同调群已经被计算出来了.^[46] 特别地, $H^5(SU(N) \times SU(N)/SU(N)$,**R**)只有一个生成元,它由方程(19.8.1)给出.因此,即便对 夸克和胶子的底层理论一无所知,除了整数n的值外,我们可以知晓Goldstone玻色子作用量中关 于反常项的一些信息.我们将在22.7节看到,在 $SU(N_c)$ 规范理论中,这个整数等于色的数目 N_c ,而 它在量子色动力学中就是n = 3.

19.9 未破缺的对称性

我们已经看到,在假定理论在群G下不变(或近似不变)且群G自发破缺到子群H后,如何 从这一假定推导出Goldstone玻色子的性质以及它们的低能相互作用.但是对于G是SU(2)×
SU(2)或SU(3) × SU(3)的情况,当我们对这些情况应用这个方法时,根据实验,我们不得不把对称性破缺模型取成SU(2) × SU(2)或SU(3) × SU(3)破缺到它们的非手征SU(2)子群或SU(3)子群. 在22.5节我们将会证明,当u夸克,d夸克和s夸克无质量时,量子色动力学中的SU(3) × SU(3)对称性实际上必须自发破缺,但是对于仅u夸克和d夸克无质量的SU(2) × SU(2)对称性,在量子色动力学的基础上证明这一对称性也自发破缺则要困难的多.* 另一方面,它们的非手征SU(2)或SU(3)未破缺有一个直观的讨论,这个讨论基于所谓的质量滞留条件^[48](persistent mass condition),它的具体陈述是:对于复合粒子,如果组成这个复合粒子的起子的是有质量的,那么这个复合粒子将是有质量的.如果我们赋予夸克相同的质量,类似于同位旋守恒这样的非手征对称性是不会被破坏的,那么如果它们自发破缺了,我们将会有由有质量夸克复合构成的无质量Goldstone玻色子,与质量滞留条件矛盾. Vafa和Witten证明了,在类似量子色动力学的规范理论中,那些不被夸克质量破坏的非手征对称性不可能自发破缺,我们会在下文中给出这个证明.这一结果不仅仅是出于理论上的兴趣;我们会在21.4节看到,电弱规范对称的自发破缺有可能被一种"拟色"(technicolor)理论描述,这个理论类似于量子色动力学,并且在检验这个想法时,知道理论中的那个对称性未破缺非常重要.

考察类似量子色动力学的规范理论,该理论在规范群的恒等表示中有多个费米子"味".如果 所有费米子都有质量,那么对于费米子味上的所有整体非手征变换下,若该变化与费米子质量矩 阵对易,那么理论在这个变换下就是不变的.例如,如果n1个有共同质量m1的费米子简并,n2个有 共同质量m2的费米子简并,等等,那么这个整体对称群就是U(n1)×U(n2)×···. (一个特殊情况 是,如果没有简并,我们就会在U(1)×U(1)×···下有一个整体对称性;这样的一个例子是量子色 动力学中的重子数,奇异数等的守恒.)这些对称性不可能自发破缺.

为了证明这点,我们来考察r个费米子场与r个反费米子场的一般Green函数.** 在路径积分形 式体系下,这是[†]

$$\left\langle T \left\{ \Psi_{u_1k_1}(x_1) \cdots \Psi_{u_rk_r}(x_r) \Psi_{v_1l_1}^{\dagger}(y_1) \cdots \Psi_{v_rl_r}^{\dagger}(y_r) \right\} \right\rangle_{\text{VAC}}$$

$$= \frac{1}{Z} \int [dA] [d\psi] [d\psi^{\dagger}] \psi_{u_1k_1}(x_1) \cdots \psi_{u_rk_r}(x_r) \psi_{v_1l_1}^{\dagger}(y_1) \cdots \psi_{v_rl_r}^{\dagger}(y_r)$$

$$\times \exp \left(iI_{\text{gauge}}[A] + iI_{\text{Dirac}}[\psi, \psi^{\dagger}; A] \right) , \qquad (19.9.1)$$

其中 k_1, \dots, k_r 和 l_1, \dots, l_r 是Dirac自旋指标, u_1, \dots, u_r 和 v_1, \dots, v_r 是味指标, $I_{gauge}[A]$ 是纯规范理 论的作用量, $I_{Dirac}[\psi, \psi^{\dagger}; A]$ 是有规范场 $A^{\mu}_{\alpha}(x)$ 时的Dirac场作用量, 而Z是真空-真空振幅

$$Z \equiv \int [\mathrm{d}A] [\mathrm{d}\psi] [\mathrm{d}\psi^{\dagger}] \exp\left(\mathrm{i}I_{\mathrm{gauge}}[A] + \mathrm{i}I_{\mathrm{Dirac}}[\psi,\psi^{\dagger};A]\right) .$$
(19.9.2)

^{*}Weingarten^[47]利用格点方法证明了,无论手征对称性是否破缺,量子色动力学中含有无质量u夸克和d夸克的最轻粒子必须与π介子的量子数相同.我们会在22.5节看到,由于量子色动力学中存在费米圈引起的反常,再加上夸克禁闭的假定,这会要求某个强子是无质量的,由此可以得出π介子正是那个无质量粒子,而这正是手征对称性自发破缺的有力论点.

^{**}在Witten和Vafa的原始工作中,^[49] 他们首先证明了在r = 1且x = y的情况下没有对称性破缺,然后他们注意到, 真空期望值中没有对称性破缺并不能排除在其它Green函数发生自发对称性破缺的可能性,因而他们转向另一个不同 的证明方法.

[†]我们在15.5节看到,分子和分母均正比于规范群的无限体积,它们在比值(19.9.1)中抵消了.出现无限大因子损坏 了之后讨论的严格性,但是如果我们通过引入鬼场移除它,那么后面一些依赖于作用量正定性的步骤将会产生困难.处 理这个问题的一个方法是将连续时空替换成有限的格点,在这种情况下,规范群的体积是有限的,就不再需要规范规定 或者鬼场.

在这里需要在欧几里得时空下进行处理,这样 $x^4 = x_4 = ix^0$, $y^4 = y_4 = iy^0$ 以及 $A^4_{\alpha} = A_{4\alpha} = iA_{0\alpha}$ 全是实的. (参看第23章的附录A.) 在这一情况下, Dirac作用量是

$$I_{\text{Dirac}}[\psi,\psi^{\dagger};A] = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^{3}x \int \mathrm{d}x^{4} \,\psi^{\dagger}[\not\!\!D + M]\psi \,\,, \qquad (19.9.3)$$

其中M是费米子质量矩阵, ⊅是与欧几里得Dirac矩阵收缩的欧几里得协变导数

$$D = \sum_{i=1}^{4} (\partial_i - it^{\alpha} A_{i\alpha}) \gamma_i , \qquad (19.9.4)$$

其中, 像往常一样, $\gamma_4 = i\gamma^0$. 由于这个作用量是费米场的双线性型, 我们可以直接积掉对这些场的积分

$$\left\langle T \left\{ \Psi_{u_1k_1}(x_1) \cdots \Psi_{u_rk_r}(x_r) \Psi_{v_1l_1}^{\dagger}(y_1) \cdots \Psi_{v_rl_r}^{\dagger}(y_r) \right\} \right\rangle_{\text{VAC}}$$

$$= \frac{1}{Z} \int [\mathrm{d}A] \operatorname{Det}(\not D + M) \exp\left(\mathrm{i}I_{\text{gauge}}[A]\right)$$

$$\times \left[(\not D + M)_{x_1u_1k_1, y_1v_1l_1}^{-1} \cdots (\not D + M)_{x_ru_rk_r, y_rv_rl_r}^{-1} \pm \Xi \not B \right] , \qquad (19.9.5)$$

其中"±置换"表明我们要对ψ场的所有r!个置换求和,其中的负号针对的是奇置换,并有

$$Z \equiv \int [\mathrm{d}A] \operatorname{Det}(\not D + M) \exp\left(\mathrm{i}I_{\mathrm{gauge}}[A]\right) \,. \tag{19.9.6}$$

对于味指标上的任意幺正变换,若它与质量矩阵*M*对易,那么表达式(19.9.5)在这样的变换下显然 是不变的.对规范场和鬼场的泛函积分产生了何种非微扰效应并不重要;这些场对问题中的对称 性不敏感,这使得方程(19.9.5)中剩余的泛函积分不能破缺这些对称性.^{††} 但为了提高这个讨论的 可信度,我们必须证明表达式(19.9.5)是定义合理的.

这不仅是出于数学严谨性的理论问题. 正如我们在19.1节看到的, 对称性没有自发破缺的标志除了基态在对称变换下不变外, 基态的对称性还要在小微扰下稳定. 如果我们通过增加一个小微扰 δM 破坏M的对称性, 并且表达式(19.9.5)在 $\delta M \rightarrow 0$ 时变得奇异, 那么, 对称性破缺矩阵元中的 δM 因子可能会被 $\delta M = 0$ 的矩阵元中的奇点抵消. 这精确在手征对称性的情况中发生了, 它出现在M的一些本征值为零的对称性极限中. 在这一情况下, 只要D有零本征值, 当我们趋于零质量的对称性极限时, 对称性破缺期望值分子中的质量因子就会被传播子(D + M)⁻¹分母中的质量因子抵消. 由于这个原因, 只有当理论的质量矩阵M的本征值都不为零时, 这个讨论才能处理该理论的非手征对称性.

为了在这一情况下给矩阵元设定上下界,首先注意到,这里的微分算符(19.9.4)是反厄米的, 所以只要厄米矩阵M没有零本征值, D + M就有合理定义的逆.此外,当M满足对称性所需的 条件时,例如对于U(n)对称性M要有n个相等本征值,对于方程(19.9.5)中剩余的对规范场的积 分,包括Z中的积分,我们还需要证明这些积分不会使得这个表达式奇异.我们将会看到,在某 些整体对称变换下不变的费米子质量矩阵M被破坏这个对称性的小量 δM 扰动时,这会确保期望 值(19.9.5)在这一对称变换下的变化在 $\delta M \rightarrow 0$ 的极限下为零.

^{††}在夸克有质量的量子色动力学中, 证明P, C和T没有自发破缺要更加困难, 这是因为这些对称性作用在规范场上的 方式是不平庸的. Vafa和Witten^[50]应用参考文献49的方法证明了P在量子色动力学中是不自发破缺的.

很难证明坐标空间Green函数(19.9.5)是非奇异的,所以我们先来考察如下弥散场的矩阵元

$$\Psi_u[f] \equiv \int \mathrm{d}^4 x \, f^{k\dagger}(x) \, \Psi_{uk}(x) \,, \qquad (19.9.7)$$

其中f^k(x)是光滑且平方可积的任意函数. 用这些项, 方程(19.9.5)可以写成

$$\left\langle T \left\{ \Psi_{u_1}[f_1] \cdots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^{\dagger}[g_1] \cdots \Psi_{v_r}^{\dagger}[g_r] \right\} \right\rangle_{\text{VAC}}$$

$$= \frac{1}{Z} \int [dA] \operatorname{Det}(\not D + M) \exp(\mathrm{i}I_{\text{gauge}}[A])$$

$$\times \left[(\not D + M)_{f_1u_1, f_1v_1}^{-1} \cdots (\not D + M)_{f_ru_r, f_rv_r}^{-1} \pm \Xi \not B \right] , \qquad (19.9.8)$$

其中

$$(\not\!\!D + M)_{f \, u, g \, v}^{-1} \equiv \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \, f^{k\dagger}(x) \, (\not\!\!D + M)_{x \, u \, k, y \, v \, l}^{-1} \, g^l(y) \, . \tag{19.9.9}$$

在这一基下,对于给定的规范场,费米子传播子不仅是定义合理的,并且在A^µ_α(x)中一致收敛:[‡]

$$\left| (\not D + M)_{f \, u, g \, v}^{-1} \right| \le \sum_{a} \frac{1}{|m_a|} ,$$
 (19.9.10)

其中 m_a 是M的本征值,方便起见,我们对函数 $f_i(x)$ 和 $g_j(y)$ 归一化使得

$$\int f_i^{\dagger}(x) f_i(x) \,\mathrm{d}^4 x = \int g_j^{\dagger}(y) g_j(y) \,\mathrm{d}^4 y = 1 \;. \tag{19.9.11}$$

(这里没有使用求和约定.)更进一步,在规范场上取平均的权重函数是正定的:#

$$Det(\not D + M) \exp(iI_{gauge}[A]) = \exp\left(-\frac{1}{4}\int d^3x \int dx^4 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 F_{ij}^2\right) \times \sqrt{Det\left[(iD)^2 + M^2\right]} .$$
(19.9.12)

*为了看到这点,我们可以用M的本征矢展开

$$M_{uv}c_v^a = m_a c_u^a , \qquad c_u^{a*}c_u^b = \delta_{ab}$$

然后, 采用Vafa和Witten使用的一个技巧,^[49] 将方程(19.9.9)写成

$$\begin{split} (\not \!\!D + M)_{f\,u,g\,v}^{-1} &= \sum_{a} c_{u}^{a*} c_{v}^{a} \int \mathrm{d}^{4}x \int \mathrm{d}^{4}y \, f^{k\dagger}(x) \, (\not \!\!D + m_{a})_{x\,k,y\,l}^{-1} \, g^{l}(y) \\ &= \sum_{a} \pm c_{u}^{a*} c_{v}^{a} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \exp(-|m_{a}|\tau) \int \mathrm{d}^{4}x \int \mathrm{d}^{4}y \, f^{k\dagger}(x) \, (\exp(\mp \tau \not \!\!D))_{x\,k,y\,l} \, g^{l}(y) \; , \end{split}$$

其中±是 m_a 的正负号. 矩阵 $c_u^{a*}c_v^a$ 与算符 $(\exp(\mp \tau D))_{x\,k,y\,l}$ 均是幺正的,所以

$$\left| c_{u}^{a*} c_{v}^{a} \int \mathrm{d}^{4}x \int \mathrm{d}^{4}y \, f^{k\dagger}(x) \, (\exp(\mp \tau D))_{x\,k,y\,l} \, g^{l}(y) \right|^{2} \leq \int \mathrm{d}^{4}x \, |f(x)|^{2} \int \mathrm{d}^{4}y \, |g(y)|^{2} = 1 \, .$$

在积分中使用这一公式就给出了方程(19.9.10).

^{‡‡}在费米子行列式中,我们使用了 $Det(\not D + M) = Det \gamma_5(\not D + M)\gamma_5 = Det(-\not D + M)$ 的性质.

当权重函数正定时,任意函数的均值会被那个函数的上下界约束. 在方程(19.9.8)使用约束(19.9.10),矩阵元被约束在

$$\left|\left\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1]\cdots\Psi_{u_r}[f_r]\Psi_{v_1}^{\dagger}[g_1]\cdots\Psi_{v_r}^{\dagger}[g_r]\right\}\right\rangle_{\text{VAC}}\right| \le r! \left[\sum_{a} \frac{1}{|m_a|}\right]^r$$
(19.9.13)

因此, 当M中的对称性破缺项 δM 趋于零时, 不存在能够抵消 δM 因子的奇点.为了更清楚地看到 这一点, 我们可以使用相同的方法证明, 如果我们用一个非常小的对称性破缺项 δM 扰动M, 那么 方程(19.9.8)中 δM 的一阶项被约束在

$$\left| \delta \left\langle T \left\{ \Psi_{u_1}[f_1] \cdots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^{\dagger}[g_1] \cdots \Psi_{v_r}^{\dagger}[g_r] \right\} \right\rangle_{\text{VAC}} \right|$$

$$\leq r r! \sum_{a,b} \frac{|(\delta M)_{ab}|}{|m_a m_b|} \left[\sum_a \frac{1}{|m_a|} \right]^{r-1} , \qquad (19.9.14)$$

所以它在 $\delta M \rightarrow 0$ 时为零.

在真实世界中,夸克质量既不为零也不简并,所以从之上的讨论中可以立即得出:类似重子数 守恒,奇异数守恒等这样的U(1)对称性既不自发破缺也没有内禀破缺.其它强相互作用对称性,例 如同位旋或SU(3),它们的问题更多.如果u,d夸克或者u,d,s夸克质量非零且相等,那些这些对 称性是完全不破缺的,然而,正如我们在19.7节看到的,这些质量完全不简并;产生同位旋对称性 和SU(3)对称性的原因不是因为它们的质量相等,而是因为它们的质量很小.如果我们赋予两个 或三个夸克相等的质量并让这些质量变得任意小,这些对称性确实保持不破缺的状态,所以在任 何对这些质量不敏感的反应中,同位旋或SU(3)是很好的近似.然而,并非所有反应都对这些质量 不敏感,这是因为,当两个或三个夸克无质量时, π 介子或者 π 介子所述的赝标量八重态会变成无质 量.这对于同位旋不是问题,我们在19.5节看到,尽管 $m_u \neq m_d$,但是到夸克质量的一阶,同位旋三 重态依旧简并.对于SU(3),夸克的质量差产生了 π 介子,K介子和 η 之间的质量差,这使得由单介 子极点主导的反应会显示与SU(3)非常大的背离行为.

19.10 U(1)问题

量子色动力学在解释强相互作用对称性模型上的成功起初看起来似乎被一个失败损毁了.正 如我们在19.5节看到的,强相互作用的破缺*SU*(2) × *SU*(2)对称性是*u*夸克和*d*夸克质量很小的自 然结果.但是,对于*u*夸克和*d*夸克质量很小的量子色动力学,它的拉格朗日量有另一个手征对称 性,^[51] *U*(1)_A对称性,它的变换是

$$u \to \exp(i\gamma_5 \theta) u$$
, $d \to \exp(i\gamma_5 \theta) d$. (19.10.1)

这种对称性如果破缺的话, 它会像 $SU(2) \times SU(2)$ 一样给强子频谱附加宇称倍增, 但是这种宇称倍 增并没有被观测到. 另一方面, $U(1)_A$ 对称性的破缺意味着存在一个质量与 π 介子相差无几的同位 旋标量0⁻Goldstone玻色子. 已知的事实是 η 介子是同位旋标量0⁻玻色子, 但它比 π 介子重得多, 而 且我们在19.7节看到, 可以很好地将其理解成 $SU(3) \times SU(3)$ 的一个Goldstone玻色子. 在认为s夸 克和u夸克以及d夸克属于相对较轻的夸克后, 除了 $SU(3) \times SU(3)$ 外, 量子色动力学的拉格朗日量 还会有U(1)手征对称性, 其变换是

$$u \to \exp(i\gamma_5\theta)u$$
, $d \to \exp(i\gamma_5\theta)d$, $s \to \exp(i\gamma_5\theta)s$. (19.10.2)

这种对称性的自发破缺会要求存在两个同位旋标量 0^- 介子:一个是 η ,而另一个的质量与 π 介子质 量相差无几.

这个预测可以做的更精细些.[52] 如果我们在无质量量子色动力学的自发破缺对称性中引入变 换(19.10.2), 那么当夸克质量存在时, 我们会遇到(19.7.12)项:

$$\mathscr{L}_{\text{mass}} = -\bar{q} M_q q = -\bar{\tilde{q}} e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} \tilde{q} , \qquad (19.10.3)$$

其中依旧有

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} , \qquad (19.10.4)$$

但B现在含有破缺对称性(19.10.2)的Goldstone玻色场 ζ :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^{0} & \pi^{+} & K^{+} \\ \pi^{-} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^{0} & K^{0} \\ \bar{K}^{-} & \bar{K}^{0} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{0} \end{bmatrix} + \frac{F_{\pi}}{\sqrt{3}F_{\zeta}} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}, \qquad (19.10.5)$$

其中 F_{c} 是 $U(1)_{A}$ Goldstone玻色子与相应流的未知耦合(插入因子 $\sqrt{3}$ 是为了将来的方便). 我们可以 再次使用未破缺的SU(3)对称性将夸克双线性的真空期望值写成(19.7.14)的形式,并展成玻色场 的幂级数,我们发现拉格朗日量中的Goldstone玻色子质量项采取如下的形式

$$-\frac{v}{F_{\pi}^{2}} \operatorname{Tr}\{B, \{B, M_{q}\}\} = -\frac{v}{F_{\pi}^{2}} \left[4m_{u} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} + \frac{F_{\pi}}{\sqrt{3}F_{\zeta}} \zeta \right)^{2} + 4(m_{u} + m_{d})\pi^{+}\pi^{-} + 4(m_{u} + m_{s})K^{+}\bar{K}^{-} + 4m_{d} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^{0} + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^{0} + \frac{F_{\pi}}{\sqrt{3}F_{\zeta}} \zeta \right)^{2} + 4(m_{d} + m_{s})K^{0}\bar{K}^{0} + 4m_{s} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \eta^{0} + \frac{F_{\pi}}{\sqrt{3}F_{\zeta}} \zeta \right)^{2} \right].$$
(19.10.6)

带荷且奇异的介子质量与之前相同,但现在的中性非奇异介子的质量矩阵是

г

$$M_0^2 = 8v \begin{bmatrix} \frac{m_u + m_d}{2F_{\pi}^2} & \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_{\pi}^2} & \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_{\pi}F_{\zeta}} \\ \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_{\pi}^2} & \frac{m_u + m_d + 4m_s}{6F_{\pi}^2} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_{\pi}F_{\zeta}} \\ \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_{\pi}F_{\zeta}} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_{\pi}F_{\zeta}} & \frac{m_u + m_d + m_s}{3F_{\zeta}^2} \end{bmatrix}$$
(19.10.7)

其中行与列按照 π^0 , η^0 和 ζ 的顺序排列.

在mu和md为零的极限下,这个矩阵有两个本征值为零的本征矢:

$$u_{a} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{b} = \frac{1}{\sqrt{F_{\pi}^{2} + 2F_{\zeta}^{2}}} \begin{pmatrix} 0\\ F_{\pi}\\ \sqrt{2}F_{\zeta} \end{pmatrix}.$$
(19.10.8)

在这个正交基下,到mu和md的一阶,质量平方矩阵是

$$m_{aa}^2 \simeq u_a^{\rm T} M_0^2 u_a = \frac{4v(m_u + m_d)}{F_\pi^2} ,$$
 (19.10.9)

$$m_{bb}^2 \simeq u_b^{\rm T} M_0^2 u_b = \frac{12v(m_u + m_d)}{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2} ,$$
 (19.10.10)

$$m_{ab}^2 = m_{ba}^2 \simeq \frac{\sqrt{3}v(m_u - m_d)}{2F_\pi \sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}}$$
 (19.10.11)

非对角项(19.10.11)的效应是使得本征值的积降低一个可忽视的比例 $(m_u - m_d)^2/64(m_u + m_d)^2$, 当然,本征值的和依旧和以前一样,所以对角元(19.10.9)和(19.10.10)是本征值很好的近似.比较 方程(19.10.9)与方程(19.7.16),我们发现对应本征矢 u_a 的粒子是 π^0 .对应 u_b 的另一个粒子有质量

$$m_b \simeq \sqrt{m_{bb}^2} \simeq \frac{\sqrt{3}m_\pi F_\pi}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \le \sqrt{3}m_\pi$$
 (19.10.12)

因此, 在 π 介子之外, 破缺的 $U(1)_A$ 对称性会额外要求存在一个质量小于 $\sqrt{3}m_{\pi}$ 的中性赝标量Goldstone玻色子. 声称这样的强相互作用粒子不存在几乎是没有必要的.* 我们会在23.5节看到, 由于发现了破坏额外 $U(1)_A$ 对称性的非微扰效应, 这一问题最终被解决了.

习题

1. 对*SU*(3)对称群(生成元为*t*₁, *t*₂, *t*₃)自发破缺到*SU*(2)子群(生成元为*t*₃)的情况应用整体 对称性破缺的一般理论. 在无限小*SO*(3)变换下, Goldstone玻色场如何变换? (使用陪集空 间*SO*(3)/*SO*(2)的指数参数化.) 计算Goldstone玻色场的协变导数*D_{aµ}*, 对于未破缺对称性生 成元*t*₃的*q*值不为零的一般场, 计算该场的协变导数. 仅包含Goldstone玻色子且导数不超过二 阶的最一般*SO*(3)-不变拉格朗日量是什么? 利用这个拉格朗日量计算Goldstone玻色子弹性散 射不变振幅中关于它们能量的最低阶项. 含有两个非Goldstone玻色场因子且导数最多有一个 的最一般*SO*(3)-不变拉格朗日量是什么? 像*SO*(3)3-矢的3-分量那样变换, 且仅是Goldstone玻 色场的函数(没有导数), 它的最一般形式是什么? 将这一项加到拉格朗日量中, 并选择系数使 得Goldstone玻色子拥有质量*m*, 重新计算最低阶的Goldstone玻色子散射振幅.

2. 考察一个具有*SU*(*N*)整体对称性的理论,它的对称性自发破缺到*SU*(*N* – 1). 假定我们添加一 个很小的对称性破缺微扰,并且这个微扰处在*SU*(*N*)的定义表示*N*中. 将真空排列考虑在内,完 全不破缺的对称群是什么?若对称性破缺微扰处在*SU*(*N*)的伴随表示中,又是什么样的情况?

^{*}注意到, 取 $F_{\zeta} \gg F_{\pi}$ 会使得这个额外的中性标量的质量非常小, 但是它的相互作用会变得非常弱使得它可以逃脱 探测. 在量子色动力学中产生一个很大的 F_{π} 对 F_{ζ} 的比值看起来似乎是不可能的, 但是若理论中存在额外变量可以避免 瞬子引起的宇称破坏, 在这样的理论中确实发生了类似的事情; 参看23.6节.

- 3. 将π介子质量考虑在内, 计算直至一圈阶的π介子-π介子散射振幅
- 4. 类比Adler-Weisberger求和规则的 π 介子- π 介子散射情况, 推导"Adler求和规则".

5. 在 $SU(2) \times SU(2)/SU(2)$ 的陪集被参数化成exp(i $\xi_a x_a$)的情况下, 计算 π 介子场 ξ_a 的 $SU(3) \times SU(3)$ 变换性质.

6. 使用方程(19.7.31)和SU(3)对称性导出关系(19.7.32)

参考文献

- S. Coleman, 'Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields,' in Aspects of Symmetry: Selected Erice Lecture of Sidney Coleman (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [2] E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford University Press, Oxford, 1937): Section 1.4.
- [3] J. Goldstone. Nuovo. Cimento 9, 154 (1961).
- [4] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* 4, 380 (1960).
- [5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [6] S. Adler, *Phys. Rev.* **137**, B1022 (1965).
- [7] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1698 (1972).
- [8] R. Dashen, *Phys. Rev.* 183, 1245 (1969). 关于这个贡献的修正, 可参看J. F. Donoghue, B. R. Holstein, and D. Wyler, *Phys. Rev.* D47, 2089 (1993); J. Bijnens, *Phys. Lett.* B306, 343 (1993); K. Maltman and D. Kotchan, *Mod. Phys. Lett.*, A5, 2457 (1990); R. Urech, *Nucl. Phys.* B433, 234 (1995); R. Baur and R. Urech, Zurich-Karlsruhe preprint ZU-TH 22/95, TTP95-31, hep-ph/9508393 (1995).
- [9] 关于综述文章, 可参看I. S. Towner et al., Chalk River preprint nuclth/9507005 (1995).
- [10] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **112**, 1375 (1958).
- [11] M. L. Goldberger and S. Treiman, Phys. Rev. 111, 354 (1966).
- [12] T. Ericson and W. Weise, *Pions and Nuclei* (Clarendon Press, Oxford, 1988).
- [13] T. Ericson et al., CERN preprint CERN-TH/95-50 (1995).
- [14] T. Das, G. S. Guralnik, V. S. Mathur, F. E. Low and J. E. Young, *Phys. Rev. Lett.* 18, 759 (1967).
- [15] J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, and W. Thirring, *Nuovo Cimento* 17, 757 (1960); M. Gell-Mann and M. Lévy, 参看文献24; K-C. Chou, *Soviet Physics JETP* 12, 492 (1961).

- [16] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. 4, 380 (1960).
- [17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [18] Y. Nambu and D. Lurie, Phys. Rev. 125, 1429 (1962); Y. Nambu and E. Shrauner, Phys. Rev. 128, 862 (1962).
- [19] S. L. Adler, *Phys. Rev. Lett.* 14, 1051 (1965); *Phys. Rev.* 140, B736 (1965); W. I. Weisberger, *Phys. Rev. Lett.* 14, 1047 (1965); *Phys. Rev.* 143, 1302 (1965). 在参考文献27中以一种不同的方式引入了π介子质量为有限值时的效应,方法是结合π介子-核子散射长度的流代数结果与散射长度的求和规则,这个求和规则是M. L. Goldberger, H.Miyazawa和R. Oehme从向前散射的色散关系中导出的, *Phys. Rev.* 99, 986 (1955); M. L. Goldberger, in *Dispersion Relations and Elementary Particles* (Wiley, New York, 1960): p. 146.
- [20] S. Weinberg, 'Current Algebra Rapporteur's Report' in Proceedings of the International Conference on High-Energy Physics, Vienna, 1968 (CERN, Geneva, 1968): p. 253.
- [21] M. Gell-Mann, *Physics* 1, 63 (1964).
- [22] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 879 (1966).
- [23] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 188 (1967).
- [24] M. Gell-Mann and M. Lévy, Nuovo Cimento 16, 705 (1960).
- [25] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).
- [26] S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979).
- [27] 这些散射长度最初是用流代数技巧计算的,参看S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17, 616 (1966).
- [28] 综述可参看, J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992): Section VI-4. 对强相互作用能 量偏移的测量以及对 π^-p 原子中1s态宽度的测量给出了结果 $a(\pi^-p \to \pi^-p) = \frac{2}{3}a_{1/2} + \frac{1}{3}a_{3/2} = 0.0885(9)m_{\pi}^{-1}\pi a(\pi^-p \to \pi^0 n) = \frac{1}{3}\sqrt{2}(a_3 - a_1) = -0.136(10)m_{\pi}^{-1}$; 参看D. Sigg *et al.*, preprint ETHZ-IPP PR-95-4, July 1995, 发表在*Phys. Rev. Lett.*上.
- [29] S. Weinberg, Phys. Lett. B251, 288 (1990); Nucl. Phys. B363, 3 (1991); Phys. Lett. B295, 114 (1992). C. Ordóñez, L. Ray, and U. van Kolck, Phys. Lett. B291, 459 (1992); C. Ordóñez, L. Ray, and U. van Kolck, Phys. Rev. Lett. 72, 1982 (1994); U. van Kolck, Phys. Rev., C49, 2932 (1994); U. van Kolck, J. Friar, and T. Goldman, to appear in Phys. Lett. B. 核力的这一方法被C. Ordóñez, L. Ray和U. van Kolck总结在nucl-th/9511380, 投递至Phys. Rev. C; J. Friar, Few-Body Systems Suppl. 99, 1 (1996). 这些技术在相关核过程上的应用可参看T.-S. Park, D.-P. Min, and M. Rho, Phys. Rev. C52, 2915 (1993); nucl-th/9505017; S. R. Beane, C. Y. Lee, and U. van Kolck, Phys. Rev., C52, 2915 (1995); T. Cohen, J. Friar, G. Miller, and U. van Kolck, nucl-th/9512036; D. B. Kaplan, M. Savage, and M. Wise, nucl-th/9605002.

- [30] S. Weinberg, 参考文献27. Y. Tomozawa独立地计算出了π介子-核子的散射长度, *Nuovo Cimento* **46A**, 707 (1966).
- [30a] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **140**, B736 (1965).
- [31] S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, *Phys. Rev.* 177, 2239 (1969); C. G. Callan, S. Coleman,
 J. Wess, and B. Zumino, *Phys. Rev.* 177, 2247 (1969).
- [32] R. S. Palais, J. Math. Mech. 6, 673 (1957); G. D. Mostow, Annals of Math. 65, 432 (1957).
- [32a] 关于其它可能性的讨论,参看S. Weinberg, *Physica Scripta* 21, 773 (1980).
- [33] M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchotron Laboratory Report CTSL-20 (1961), 未发表. M. Gell-Mann和Y. Ne'eman在其它几篇关于SU(3)对称性的文章中再现了这个结果, The Eightfold Way (Benjamin, New York, 1964).
- [34] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26, 222 (1961).
- [35] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.* 175, 2195 (1968); S. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 20, 224 (1968).
- [36] R. Dashen, *Phys. Rev.* 183, 1245 (1969). P. Langacker和H. Pagels考察了修正, *Phys. Rev.* D8, 4620 (1973). G. S. Guralnik证明了在参考文献17的模型中,电磁效应对π⁰质量没有修正, *Nuovo Cimento* 36, 1002 (1965).
- [37] S. Weinberg, I. I. Rabi的纪念文集, Trans. N. Y. Acad. Sci. 38, 185 (1977).
- [38] M. Gell-Mann, 参考文献33; S. Okuba, Prog. Theor. Phys., 27, 949 (1962).
- [38a] H. Leutwyler, Bern-CERN preprint CERN-TH/96-44, hep-ph/-9602366, 待发表(1996).
- [38b] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, 参考文献28.
- [39] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250, 465 (1985). 另见J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. 158, 142 (1984).
- [40] 关于这方面的纵览, 参看H. Leutwyler, in Proceedings of the XXVI International Conference on High Energy Nuclear Physics, Dallas, 1992, J. Sanford编辑(American Institute of Physics, New York, 1993): 185; U. G. Meissner, Rep. Prog. Phys. 56, 903 (1993); A. Pich, Valencia preprint FTUV/95-4, February 1995, 发表在Reports on Progress in Physics; J. Bijnens, G. Ecker, and J. Gasser, in The Daphne Physics Handbook, Vol. 1, L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver编辑(INFN, Frascati, 1995): Chapter 3 and 3.1; G. Ecker, preprint hep-ph/9501357, 发表在Progress in Particle and Nuclear Physics, Vol. 35 (Pergamon Press, Oxford).
- [41] S. Coleman and S. Glashow, Phys. Rev. Lett. 6, 423 (1961); S. Okubo, Phys. Lett. 4, 14 (1963).

- [42] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).
- [43] E. Witten, Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983).
- [44] R. Bott and R. Seely, Comm. Math. Phys. 62, 235 (1978).
- [45] E. D'Hoker and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D50**, R6050 (1994).
- [46] Encyclopedic Dictionary of Mathematics, S. Iyanaga and Y. Kawada编辑(MIT Press, Cambridge, 1980); W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, Connections, Curvature and Cohomology, Vol III, (Academic Press, New York, 1976); A. Borel, Ann. Math. (2) 57, 115 (1953); 另见A. Borel, Collected Papers, Vol I (Springer Verlag, Berlin, 1983).
- [47] D. Weingarten, Phys. Rev. Lett. 51, 1830 (1983).
- [48] J. Preskill and S. Weinberg, *Phys. Rev.* D24, 1059 (1981). 这是't Hooft之前讨论的修正版, 't Hooft的讨论考察了大夸克质量极限; 参看G. 't Hooft在Cargèse Summer Institute给出的讲义, 1979, in *Recent Developments in Gauge Theories*, G 't Hooft等编辑, (Plenum, New York, 1980), 再刊于*Dynamical Gauge Symmetry Breaking*, E. Farhi and R. Jackiw编辑, (World Scientific, Singapore, 1982), and in G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle* (World Scientific, Singapore, 1994). 另见22.5节.
- [49] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B234, 173 (1984). 另见C. Vafa and E. Witten, Commun. Math. Phys. 95, 257 (1984).
- [50] C. Vafa and E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 535 (1984).
- [51] S. L. Glashow, in Hadrons and Their Interactions, A. Zichichi编辑(Academic Press, New York, 1968); S. L. Glashow, R. Jackiw, and S-S. Shei, Phys. Rev. 187, 1916 (1969); M. Gell-Mann, in Proc. Third Topical Conf. on Part. Phys., W. A. Simonds and S. F. Tuan编辑(Western Periodicals, Los Angeles, 1970); Acta Phys. Austriaca Suppl. IX, 1972 (1972); H. Fritzsch and M. Gell-Mann, in Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics, J. D. Jackson and A. Roberts编辑(Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, 1972); Phys. Lett. 47B, 365 (1973).
- [52] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D11**, 3583 (1975).

第 20 章 算符积展开

当由一个算符引入又由另一算符引出的动量趋于无穷大,而其它所有外线的4-动量保持不变时,我们通常会发现自身需要知道振幅在这个时候的行为是什么样的.例如,我们会在20.6节看到,对于电子在强子初态H上散射而末态为任意强子的过程,根据幺正性,它的总截面给定为对如下振幅分量的(系数已知)线性组合

$$\int \mathrm{d}^4 x \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \left\langle H | J^\mu(x) J^\nu(0) | H \right\rangle \,,$$

其中*k*是电子传给强子的4-动量,而*J*^µ(*x*)是电磁流.在深度非弹电子散射的情况下,由一个算符引入又由另一算符引出的动量*k*可以趋于无穷大.类似的,在研究各种算符的高动量极限时,以及推导20.5节中相应的谱函数求和规则时,我们会遇到类似Fouier变换的高动量极限,所不同的只是强子态|*H*〉被替换成了真空态.

如果像 $J^{\mu}(x)J^{\nu}(0)$ 这样的算符积对 x^{μ} 是解析的,那么当Fourier变量k趋于无穷大时,它的Fourier变换会指数衰减.在该Fourier变换的高动量极限下,领头项来自于时空变量在趋于另一个时空变量时算符积中的奇点.Wilson在1969年开始了对这类算符积的研究,^[1]他最初的目的是想构建出传统量子场论的替代品.正如之前所发生的(例如色散关系与Feynman图形规则),绕过量子场论的努力给出了有价值的一般性结果,不过这些结果最好被理解成量子场论的一般性质.

我们将在20.1节论述算符积展开.在1970年,Zimmerman在微扰论中给出了这个展开的标准 证明.^[2]在20.1节,基于场论的路径积分公式,我们会给出一个不太严格但是更加简单并且非微扰 的证明.在20.2节,利用流经Feynman图的大动量流,我们会呈现出看待算符积展开的另一视角, 这将带给我们微扰性的证明.

算符积展开的几个性质使得我们可以很方便地从量子色动力学这样的理论中得到一些重要的结果.其中的一个性质是,对于描述展开中的奇异性的函数,它与动量之间关系由重整化群方程控制,这使得在渐进自由理论中,我们可以用微扰论计算出这些函数在大动量处的形式,我们会在20.3节对这些进行讨论.另一个性质是,这些函数不会被可能的自发对称性破缺影响,它们能够反映出底层理论的所有对称性,这一点会在20.4节进行讨论.在20.5节和20.6节,我们会考察应用.

20.1 展开: 描述与推导

Wilson^[1]假设两个算符的乘积A(x)B(y)在 $x \to y$ 时的奇异行为可以写成对其它定域算符的求和

$$A(x)B(y) \to \sum_{C} F_{C}^{AB}(x-y) C(y) ,$$
 (20.1.1)

其中 $F_C^{AB}(x-y)$ 是有奇点的c-数函数. 量纲分析表明, 当 $x \to y$ 时, $F_C^{AB}(x-y)$ 的行为是(x-y)的 幂函数, 幂次为 $d_C - d_A - d_B$, 其中 d_O 是算符按照质量或动量计算的量纲. 当我们给算符O加入更 多的导数或场时, d_O 会增加, 所以随着算符C变得越来越复杂, 函数 $F_C^{AB}(x-y)$ 的奇异性会降低. 算符积展开的显著特征是它是算符关系; 即, 我们对任意的矩阵元 $\langle \beta | A(x)B(y) | \alpha \rangle$ 使用它时, 我们 会对所有的 $| \alpha \rangle$ 和 $| \beta \rangle$ 态得到相同的函数 $F_C^{AB}(x-y)$.

这个展开之所以在考察乘积A(x)B(y)在 $x \to y$ 时的行为非常有用,正是因为方程(20.1.1)的 奇异性会随着算符C(y)复杂性的增加而减小.前面简单的幂次级数讨论会被重整化效应修 正;展开(20.1.1)必须写成在某个标度µ处正规化的算符,这样µ就会伴随x - y出现在系数函 数 $F_C^{AB}(x - y)$ 之中.我们会在20.3节看到,在渐进自由的理论中,除去 $\ln(x - y)^2$ 的一个幂函数外, $F_C^{AB}(x - y)$ 的行为确实是量纲分析所表明的x - y的幂函数,而其幂次正是 $d_C - d_A - d_B$.即使是 在更一般的理论中,不同算符C(y)所连带的奇异性也非常可能会随着算符复杂性的增加而减小.

动量空间中的相应陈述是, 当 $k \to \infty$ 时,

$$\int d^4x \, e^{-ik \cdot x} A(x) \, B(0) \to \sum_C V_C^{AB}(k) \, C(0) \tag{20.1.2}$$

相应地有

$$\int d^4x \, e^{-ik \cdot x} \, T\{A(x)B(0)\} \to \sum_C U_C^{AB}(k) \, C(0) \tag{20.1.3}$$

其中V_C^{AB}(k)和U_C^{AB}(k)是k^µ的函数,当k很大时,随着级数中的项越变越复杂,它们会快速衰减.

我们现在来推导Wilson展开的一个推广版本,在这个版本中,任意多个算符携带的动量一起 趋于无穷大.对于这个目的,我们来考察定域算符 $A_1(x_1), A_2(x_2) \cdots$ 和定域算符 $B_1(y_1), B_2(y_2) \cdots$ 的Green函数,其中*A*算符的变量在点*x*附近而*B*算符的变量固定不动:

$$\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots B_1(y_1), B_2(y_2), \cdots \} \rangle_0$$

= $\int \left[\prod_{\ell, z} \mathrm{d}\phi_\ell(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \cdots b_1(y_1) b_2(y_2) \cdots \exp(\mathrm{i}I[\phi]) ,$ (20.1.4)

其中小写字母a和b表示将A和B中的场算符替换成了c-数场 ϕ .现在围绕点x做一个半径为R的 球B(R), R远大于 $x_1, x_2 \cdots$ 之间的距离, 但远小于x与 $y_1, y_2 \cdots$ 之间的距离. 既然作用量是定域的, 它可以写成

$$I = \int_{z \in B(R)} \mathrm{d}^4 z \,\mathscr{L}(z) + \int_{z \notin B(R)} \mathrm{d}^4 z \,\mathscr{L}(z) \,. \tag{20.1.5}$$

那么方程(20.1.4)就可以变成如下形式

$$\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots B_1(y_1), B_2(y_2), \cdots \} \rangle_0$$

$$= \int \left[\prod_{z \notin B(R), \ell} \mathrm{d}\phi_\ell(z) \right] b_1(y_1) b_2(y_2) \cdots \exp\left(\mathrm{i} \int_{z \notin B(R)} \mathrm{d}^4 z \,\mathscr{L}(z) \right)$$

$$\times \int \left[\prod_{z \in B(R), \ell} \mathrm{d}\phi_\ell(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \cdots \exp\left(\mathrm{i} \int_{z \in B(R)} \mathrm{d}^4 z \,\mathscr{L}(z) \right) , \qquad (20.1.6)$$

我们要对这个积分附加边界条件:球内的场要在表面处于球外的场光滑相连,这会约束对球内场的路径积分.除了这个边界条件以外,对球内场的路径积分完全不被球外场的行为影响,所以对球内场的路径积分可以用球面上的场和它的导数进行表示,而它们反过来可以表示成从球外外

推到中心点x的场和它们的导数.如果我们将这一积分表示成外推到点x的c-数场和它们导数的乘积*o(x)的级数,那么系数只能是坐标差的函数 $U_O^{A_1,A_2,\cdots}(x_1 - x, x_2 - x, \cdots)$.既然 $y_1, y_2 \cdots$ 都在 球B(R)的外部,在 $R \to 0$ 的极限下,将球内的这部分从作用量中去除出去并不会对球外的场有影响,所以在这一极限下,当 $x_1, x_2 \cdots$ 全部趋于x时,方程(20.1.6)变成

$$\langle T\{A_{1}(x_{1}), A_{2}(x_{2}), \cdots B_{1}(y_{1}), B_{2}(y_{2}), \cdots \} \rangle_{0} \to \int \left[\prod_{\ell, z} \mathrm{d}\phi_{\ell}(z) \right]$$

$$\times b_{1}(y_{1})b_{2}(y_{2}) \cdots \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}z \,\mathscr{L}(z)\right)$$

$$\times \sum_{O} U_{O}^{A_{1}, A_{2}, \cdots}(x_{1} - x, x_{2} - x, \cdots) O(x)$$

$$= \sum_{O} U_{O}^{A_{1}, A_{2}, \cdots}(x_{1} - x, x_{2} - x, \cdots) \langle T\{O(x), B_{1}(y_{1}), B_{2}(y_{2}), \cdots \} \rangle_{0} ,$$

$$(20.1.7)$$

其中O(x)是对应o(x)的量子力学Heisenberg绘景算符.特别地,通过对变量y做Fourier变换并乘上 合适的系数函数,对于任意的态 $|\alpha\rangle$ 和 $\langle\beta|$,这给出

$$\langle \beta | T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots\} | \alpha \rangle \to \sum_O U_O^{A_1, A_2, \cdots}(x_1 - x, x_2 - x, \cdots) \langle \beta | O(x) | \alpha \rangle .$$
 (20.1.8)

由于这对任意态都是成立的,它是推广版本中的算符关系:

$$T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots\} \to \sum_O U_O^{A_1, A_2, \cdots}(x_1 - x, x_2 - x, \cdots) O(x) .$$
 (20.1.9)

20.2 动量流*

我们现在来考察算符积展开最简单的例子: 在质量为m而相互作用为 $-\frac{1}{24}g\phi^4$ 的单个标量场 ϕ 的理论中,对于它的n + 2点Feynman振幅,让4-动量k从一条线流入又从另一条线流出,但保持其它所有外线的动量不变,考察这个振幅在k很大时的渐进行为. 在这一情况下,这会带给我们对算符积展开中前几项的微扰论证明,所用的方法是从流经Feynman图的大动量流导出这一展开,而我们这里的真实目的其实是从这一方法中得到启发. 本章的附录将会讨论这些结果到一般情况的推广.

我们把*n*粒子散射振幅的所有连通图之和定义为 $\Gamma(k; p_1 \cdots p_n)$,其中它的外线携带入动 量 $k \pi p - k$ 以及出动量 $p_1 \cdots p_n$,并且 $p \equiv p_1 + p_2 + \cdots p_n$.(为了之后方便处理,我们进一步指 定 $\Gamma(k; p_1 \cdots p_n)$ 包含动量为 $k \pi p - k$ 的外线的传播子,但对于那些固定的动量 $p_1 \cdots p_n$, Γ 并不包含 这些外线的传播子.)我们希望证明,在微扰论的任意阶, 当 $k \to \infty$ 时,

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) + O(k^{-5}) ,$$
 (20.2.1)

其中 $U_{\phi^2}(k)$ 是 k^{-4} 阶^{**}项的和,它独立于 $p_1 \cdots p_n$ 和n,而 $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$ 是在 $n \otimes \phi$ 线中插入单个 ϕ^2 顶角后的振幅,为了使它有限,它还要乘上合适的重整化常数 Z_{ϕ^2} .因为 $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$ 是重整化算

^{*}为了使级数中的系数是有限的,这些乘积必须要乘上合适的无限大因子以重整化.这会在下一节所呈现的推导中变得非常显然.

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^{**}贯穿本章始终, 当我们称一个振幅是 k^A 阶的, 应该将其理解成: 取 $k^{\rho} = \kappa n^{\rho}$, 其中 n^{ρ} 是任意确定的4-矢, 若振幅 是 k^A 阶的, 则当 $\kappa \to \infty$ 时, 振幅会趋于 κ^A 乘以ln κ 的幂函数之和.



图 20.1 积分方程(20.2.3)的图形表示. Γ标记的阴影圆盘代表所有外线如图所示的连通Feynman图之和, 而 由*I*标记的阴影圆盘, 即中间有竖线的那一个, 它代表的是:无法通过剪断一对内线使左边的外线和右边的 外线相分离的所有连通图之和.



图 20.2 在相互作用为Φ⁴的标量场中,核I(k,k',p)的树图和一圈图.

符 $(\phi^2)_R \equiv Z_{\phi^2} \phi^2(0)$ 的矩阵元, 方程(20.2.1)对应于如下陈述: 在 $k \to \infty$ 时, 算符积展开的领头项 是[†]

$$\int d^4x \, e^{-ik \cdot x} \, T\{\phi_R(x)\phi_R(0)\}_C \to U_{\phi^2}(k)(\phi^2(0))_R \,. \tag{20.2.2}$$

在研究Feynman振幅的渐进行为时,我们必须要把如下的事实考虑在内:在动量空间的 部分积分区域中,可能会只有一部分内线动量与趋于无穷大的外线动量同阶,但其它内线却 不这样.我们设这些拥有k阶动量的线处在子图 \mathscr{S} ,并按照12.1节的规则计算出子图 \mathscr{S} 的量 纲 $D_{\mathscr{S}}$,那么这部分积分区域给 $\Gamma(k;p_1\cdots p_n)$ 的贡献的渐进行为是 $k^{D_{\mathscr{S}}}$ 阶的.如果 \mathscr{S} 与图的其 余部分用m条外线相连,并且 \mathscr{S} 有两条动量分别为k和p - k的外线,那么从方程(12.1.8),我们 有 $\mathscr{D}_{\mathscr{S}} = 4 - 2 - m - 4 = -2 - m$. (-4来自于动量为k和p - k的那两条线的传播子,即我们 在 $\Gamma(k;p_1\cdots p_n)$ 中引入的两个传播子.)因此,无论主导 Γ 的渐进行为是大动量k流经整个图的那部 分积分区域,还是只流经某些子图的那部分积分区域,给出最主要贡献的是外线最少的那一个.^[3]

当n = 0时,这总是整个图;即,积分的主要部分来自于每条线均携带k阶动量的那部分积分区域,它给出 k^{-2} 阶的渐进行为.在这一情况下,算符积展开中对矩阵元有贡献的算符只有单位算符, C = 1.由于我们目前只研究连通图,这一项在n > 0时被排除了.

当n = 2时,除了整个图给出主要贡献外,还有一个子图也给出主要贡献:动量为k和p - k的两条外线通过两条内线构成的桥与另外两条外线相连的图,^{††}这给出阶为 k^{-4} 的渐进行为. 当 $n \ge 4$ 时,主要贡献仅来自于这样的子图:动量为k和p - k的两条外线通过两条内线构成的桥与 另hn - 2条外线相连的图,这再次给出阶为 k^{-4} 的渐进行为.

一般的图会包含数个这样的二粒子桥,这使得对 $n = 2\pi n \ge 4$ 的情况进行分析变得复杂.我们先来考察n = 2的情况.我们将所有对 $\Gamma(k; p_1, p_2)$ 有贡献的二粒子不可约图定义为I(k, k', p)(其

[†]编时乘积的下标*C*在这里是指我们只引入了连通图.由于在这一节我们只考察两个 ϕ 场的算符积展开,我们扔掉了 V_{ϕ^2} 的下标 ϕ^2 .对于携带动量k和p - k的那些线,由于我们在对它们的传播子做辐射修正的同时暗中引入了抵消项,所以这些场本身是重整化的.

^{††}由于这个理论在 $\phi \rightarrow -\phi$ 的对称性,有奇数个外线的图或子图都被排除了,进而m = 1的可能性被排除了.又因为 Γ 的定义来自于连通图,所以m = 0的可能性被排除了.

中 $p_1 = k', p_2 = p - k'$),所谓二粒子不可约是指无法通过剪断一对内线的方法使得带有入动 量k和p - k的两条外线与动量为k'和p - k'的外线分离.那么, $\Gamma(k;k',p-k') - I(k,k',p)$ 就是那些 可以以这种方式变成不连通图的那些图之和,因而可以写成(参看图20.1)

$$\Gamma(k;k',p-k') - I(k,k',p) = \int d^4k'' I(k,k'',p)\Gamma(k'';k',p-k') . \qquad (20.2.3)$$

 $(同\Gamma(k;k',p-k'))$ 一样,核I(k,k',p)包含动量为k和p-k的外线的传播子,但为了避免重复计数,它不包含动量为k'和p-k'的外线的传播子.)I(k,k',p)到 g^2 阶的Feynman图如图20.2所示.

为了计算方程(20.2.3)右边的行为,我们先来考察核I(k,k',p)在k'和p保持不动而 $k \to \infty$ 时的 渐进行为. 主导这个渐进行为的是所有内线均携带k阶动量的那部分动量空间,这会给出 k^{-4} 阶的 贡献,而在其它区域,由携带k阶动量的内线构成的子图至少有五条外线,这给出的贡献要比 k^{-4} 衰 减得更快.由此得出,做I(k,k',p)相对k'或p的微分将会让核的渐进行为降低一个 k^{-1} 因子.因此, 保持k'和p不动但让 $k \to \infty$,我们就有

$$I(k, k', p) \to I_{\infty}(k) , \qquad (20.2.4)$$

其中 $I_{\infty}(k)$ 仅是k的函数并且阶为 k^{-4} .

不幸的是,我们无法简单地将方程(20.2.3)中的*I*(*k*,*k*',*p*)替换成这一渐进极限,这是因为无 论*k*变得多大,当*k*'为*k*阶时,它会积分一个很大的贡献.为了解决这一困难,我们使用一个基于数 学归纳法的技巧.在最低阶,Γ(*k*;*k*',*p* – *k*')由一个顶点与两个裸传播子相连的图给出

$$\Gamma(k;k',p-k') = \frac{1g}{(2\pi)^4(k^2+m^2)((p-k)^2+m^2)} \qquad (\text{最低}\)$$

对于这一阶,很容易证明它的渐进行为的形式就是方程(20.2.1).因此,我们假定对于n = 2成立的方程(20.2.1),直到g的某个给定阶N它都是成立的——即,直到这一阶, $k \to \infty$ 时的渐进行为采取如下的形式

$$\Gamma(k;k',p-k) \to U_{\phi^2}(k)F_{\phi^2}(k',p-k') + O(k^{-5}) , \qquad (20.2.5)$$

然后我们将试图证明它在下一阶也是成立的.为了估计k'为k阶时它对方程(20.2.3)中积分的贡献, 我们将方程(20.2.3)重写为

$$\Gamma(k;k',p-k) = I(k,k',p) + \int d^4k'' I(k,k'',p) \Big[\Gamma(k'';k',p-k') - U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k') \Big] + F_{\phi^2}(k',p-k') \int d^4k'' I(k,k'',p)U_{\phi^2}(k'') .$$
(20.2.6)

既然*I*(*k*,*k*',*p*)起码是领头阶的,我们可以在方程(20.2.6)的右边使用方程(20.2.5).因此对于右边的 第二项,*k*"为*k*阶的那部分积分区域所给出的贡献会像*k*⁻⁴⁺⁴⁻⁵那样为零,因此与*k*"保持有限的那 部分相比就是可以忽略的,而这部分会给出收敛积分

$$I_{\infty}(k) \int d^4k'' \left[\Gamma(k'';k',p-k') - U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k',p-k') \right]$$

更进一步,既然给出 $\int d^4k'' I(k,k'',p)U_{\phi^2}(k'')$ 主要贡献的是I(k,k'',p)的图中每个内线均携带k阶 动量的那部分积分区域,这个积分对p的微分会使得它的渐进行为降低一个 k^{-1} 阶的因子,所以

就渐进行为而言,这一积分中的I(k,k',p)可以替换成 $I(k,k') \equiv I(k,k',0)$.因此在 $k \to \infty$ 时,方程(20.2.6)变成

$$\Gamma(k;k',p-k') \to F_{\phi^2}(k',p-k') \int d^4k'' I(k,k'') U_{\phi^2}(k'') + I_{\infty}(k) \left\{ 1 + \int d^4k'' \left[\Gamma(k'';k',p-k') - U_{\phi^2}(k'') F_{\phi^2}(k',p-k') \right] \right\}.$$
(20.2.7)

因此我们可以用低阶微扰论中的那些函数来定义 $U_{\phi^2}(k)$ 和 $F_{\phi^2}(k', p-k')$,具体形式为

$$U_{\phi^2}(k) = CI_{\infty}(k) + \int d^4k' I(k,k') U_{\phi^2}(k') , \qquad (20.2.8)$$
$$F_{\star^2}(k', p-k') = C^{-1}$$

$$\times \left\{ 1 + \int d^4 k'' \left[\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\phi^2}(k'') F_{\phi^2}(k', p - k') \right] \right\},$$
(20.2.9)

其中C是我们可以随便选择的常数.有了这些定义,我们就可以从方程(20.2.7)中得到方程(20.2.5).

选择常数C使得 $F_{\phi^2}(k', p - k')$ 在某个重整化点 $k' = k(\mu) \pm p = p(\mu)$ 的值为1,这将方便之后的讨论,而其中的 $k(\mu)$ 和 $p(\mu)$ 是 μ 阶标准4-动量.这样,

$$C = 1 + \int d^4 k'' \, \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu)) - \int d^4 k'' \, U_{\phi^2}(k'') \,. \tag{20.2.10}$$

利用方程(20.2.5),我们看到方程(20.2.10)中两个积分的发散互相抵消了.

方程(20.2.9)现在可以重写成

$$F_{\phi^2}(k', p - k') = Z_{\phi^2} \left\{ 1 + \int d^4 k'' \, \Gamma(k''; k', p - k') \right\} , \qquad (20.2.11)$$

其中

$$Z_{\phi^2} = \left[1 + \int d^4 k'' \,\Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu))\right]^{-1} \,. \tag{20.2.12}$$

我们可以认为 Z_{ϕ^2} 是复合算符 ϕ^2 的重整化常数,它的定义使得算符 $Z_{\phi^2}\phi^2$ 的二粒子矩阵元 $F_{\phi^2}(k, p-k)$ 是有限值,并且在 $k = k(\mu)$ 且 $p = p(\mu)$ 时为1.

通过方程(20.2.8)和(20.2.11)来计算 $U_{\phi^2}(k)$ 和 $F_{\phi^2}(k,p-k)$ 并不是特别方便. 与此相反, 计 算 $\Gamma(k;k',p-k')$, 然后与方程(20.2.5)比较进而读出 $U_{\phi^2}(k)$ 和 $F_{\phi^2}(k,p-k)$, 这样反而更简单一些. 给函数(12.2.26)乘以动量为k以及p-k的线的传播子, 我们看到, 到一圈阶

$$\Gamma(k;k',p-k') = \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4(k^2+m^2)}\right] \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4((p-k)^2+m^2)}\right] \left[-\mathrm{i}(2\pi)^4 g\right] \\ \times \left\{1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{\ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)}\right) + \dots\right\}\right\},$$
(20.2.13)

其中s, t和u是Mandelstam变量

$$s = -p^2$$
, $t = -(k - k')^2$, $u = -(p - k - k')^2$,

 μ 是重整化标度, *g*是相应的重整化耦合, 由 $s = t = u = -4\mu^2/3$ 处的Feynman振幅定义. 它的渐进 行为是

$$\Gamma(k;k',p-k') \to \frac{1g}{(2\pi)^4(k^2)^2} \\ \times \left\{ 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)}\right) + 2\ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2x(1-x)}\right) + \cdots \right\} \right\}.$$
(20.2.14)

到g²阶,如果我们取

$$U_{\phi^2}(k) = \frac{ig}{(2\pi)^4 (k^2)^2} \times \left\{ 1 - \frac{g}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2x(1-x)}\right) + \cdots \right\} \,, \tag{20.2.15}$$

以及

$$F_{\phi^2}(k, p-k) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)}\right) + \cdots , \qquad (20.2.16)$$

那么它与方程(20.2.5)就是一致的. 在这里, 我们已经对算符 ϕ^2 的重整化点 $k(\mu)$ 和 $p(\mu)$ 做了选择, 使得它与耦合常数g的重整化点的关系为 $p(\mu)^2 = 4\mu^2/3$, 这使得在 $p^2 = 4\mu^2/3$ 时, $F_{\phi^2}(k, p-k) = 1$.

现在来考察动量不变的外线数目n远大于2的情况.为了与我们之前的讨论一致,在 $k \to \infty$ 的极限下,给出 $\Gamma(k; p_1 \cdots p_n)$ 主要贡献的图是那些可以通过剪断一对内线使得携带动量k与p - k的那两条外线与这n条外线不相连的图:

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to \int \mathrm{d}^4 k' \, I(k, k', p) \, \Gamma(k'; p_1 \cdots p_n) \, . \tag{20.2.17}$$

像之前一样,由于k'为k阶时会对这一积分有个很大的贡献,我们对右边的核I(k,k',p)无法简单地使用它在 $k \to \infty$ 时的渐进极限.处理这一困难的方法是将方程(20.2.17)重写成如下形式

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to \int d^4k' I(k, k', p) \left[\Gamma(k'; p_1 \cdots p_n) - U_{\phi^2}(k') F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) \right] + F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) \int d^4k' I(k', k, p) U_{\phi^2}(k') , \qquad (20.2.18)$$

其中, 通过数学归纳法, 我们假定直到某个给定阶N, 在加上1/k⁵阶的修正项后,

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$$
 (20.2.19)

我们现在可以使用极限(20.2.4)和方程(20.2.8)将方程(20.2.18)重写为

$$\Gamma(k; p_1 \cdots p_n) \to I_{\infty}(k) \int d^4k' \Big[\Gamma(k'; p_s \cdots p_n) - U_{\phi^2}(k') F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) \Big]$$

+ $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) \Big[U_{\phi^2}(k) - CI_{\infty}(k) \Big] .$

假定我们取

$$CF_{\phi^2}(p_1\cdots p_n) = \int \mathrm{d}^4k' \left[\Gamma(k'; p_s\cdots p_n) - U_{\phi^2}(k')F_{\phi^2}(p_1\cdots p_n) \right]$$

或者使用方程(20.2.10)和(20.2.12),

$$F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n) = Z_{\phi^2} \int d^4 k' \, \Gamma(k'; p_1 \cdots p_n) \,, \qquad (20.2.20)$$

那么直到N+1阶,这都与方程(20.2.19)一致. (20.2.20)仅指出了 $F_{\phi^2}(p_1 \cdots p_n)$ 是重整化算符 $Z_{\phi^2}\phi^2$ 的 矩阵元,这使得方程(20.2.1)对应于算符积公式(20.2.2). 尤其要注意的是,无论n或者动量 $p_1 \cdots p_n$ 取 什么值, $U_{\phi^2}(k)$ 都是相同的系数函数,我们会在后面证明它.

严格来讲, 算符(ϕ^2)_R并不是两个 ϕ 乘积展开中的领头项. 展开中还存在单位算符, 它的量纲 比(ϕ^2)_R要低, 但由于(正如下标C所表明的)我们排除了非连通图, 它从方程(20.2.2)中排除了. 正 如之前所提及的, 当 $k \to \infty$ 时, 对于 $n = 0(\pm p^{\mu} = 0)$ 的 $\Gamma(k)$, 它的图由所有内线均携带k阶动量的 那部分积分区域主导, 而 $U_1(k)$ 是这一区域的贡献.

量纲更高的算符和更一般的理论将在本章的附录进行考察.

20.3 系数函数的重整化群方程

正如之前所提及的,使得算符积展开如此有用的一个性质是:系数函数的动量相关性完全由 重整化群方程控制.这是因为它们源于Feynman图之和的极限值(例如20.2节的*I*_∞(*k*)),在这种情 况下所有相关的动量一起趋于无穷大,这使得可以在令质量为零的同时却不引起奇点.然而,算符 积系数函数并不服从简单的标度率,其原因是重整化效应:系数函数要乘上标度相关的重整化常 数,并依赖于标度相关的重整化耦合.

考察Green函数 $\Gamma_{\ell,\ell'}(k,k',p)$ 的算符积展开,其中,入粒子线的集合记做 ℓ ,它们的动量(合起来记做k,和为p)一起趋于无穷大,剩余外线的集合记做 ℓ' ,它们的动量(合起来记做k',和为p)保持不变:

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) \to \sum_{\mathcal{O}} U^{\ell}_{\mathcal{O}}(k) F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) . \qquad (20.3.1)$$

函数 $F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p)$ 是重整化算符 $\mathcal{O}_R = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}\mathcal{O}'$,所以它在场乘积中对应线 ℓ 的系数 $U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k)$ 正比 于 $Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}^{-1}$ 以及 $Z_{\ell',\ell}$,即集合 ℓ 中所有场算符(或复合算符)的重整化因子的直接乘积.因此,

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} U_{\mathcal{O}}^{\ell} = \sum_{\ell'} \gamma_{\ell\ell'} U_{\mathcal{O}}^{\ell'} - \sum_{\mathcal{O}'} U_{\mathcal{O}'}^{\ell} \gamma_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} U_{\mathcal{O}}^{\ell} , \qquad (20.3.2)$$

其中

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\ell\ell'} = \sum_{\ell''} \gamma_{\ell\ell''} Z_{\ell''\ell'} , \qquad \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} = \sum_{\mathcal{O}''} \gamma_{\mathcal{O}\mathcal{O}''} Z_{\mathcal{O}''\mathcal{O}'} , \qquad (20.3.3)$$

简单起见,我们假定只有一个可重整耦合 g_{μ} ,它由某个重整化点的某个Feynman振幅定义,该重整 化点的动量为 μ 阶,且有 μ d $g_{\mu}/$ d $\mu = \beta(g_{\mu})$.为了能够用量纲分析进行处理.我们给所有算符乘上 相应的 μ 的幂函数,使得所有算符是无量纲的.这同时使得Z矩阵和 γ 矩阵的分量也是无量纲的,并 使得它们的值在零耦合极限给定为

$$\gamma_{\ell\ell'} \to \delta_{\ell\ell'} N(\ell) , \qquad \gamma_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \to \delta_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} N(\mathcal{O}) , \qquad (20.3.4)$$

其中 $N(\mathcal{O})$ 是算符 \mathcal{O} 的量纲, $N(\ell)$ 是场集合 ℓ 的总量纲(即s + 1的和, 其中对于标量场和无质量规 范场, s = 0; 对于Dirac场, s = 1/2; 等等.) 另外, 量纲分析告诉我们, 对于 n^{μ} 固定的 $k^{\mu} = \kappa n^{\mu}$, 除了定义Fourier变换的积分所产生的因子 $\kappa^{4-4n(\ell)}$ 外,振幅只能通过比值 κ/μ 依赖于 κ .这样,方程(20.3.2)解的形式为

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(\kappa n) = \kappa^{4-4n(\ell)} \sum_{\ell'.\mathcal{O}'} \left[M \left\{ \exp\left(\int^{\kappa} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \gamma(g_{\mu})\right) \right\} \right]_{\ell,\ell'} \mathscr{U}_{\mathcal{O}'}^{\ell'}(g_{\kappa}, n) \\ \times \left[M \left\{ \exp\left(\int^{\kappa} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \gamma(g_{\mu})\right) \right\} \right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}^{-1},$$
(20.3.5)

其中*M*代表"μ-编序"乘积,即,对指数展开中的每一项进行重排使得因子按照μ减小的顺序从左向 右排列.

若 g_μ 在 μ → ∞时趋于不动点 g_* ,这会给出特别简单的结果.这时大 μ 对M{exp($\int^{\kappa} \gamma(g_\mu) d\mu/\mu$)}的贡献是矩阵 $\kappa^{\gamma(g_*)}$,它会因为 μ -编序出现在左边.因此,方程(20.3.5)变成

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(\kappa n) = \kappa^{4-4n(\ell)} \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\kappa^{\gamma(g_*)} \right]_{\ell,\ell'} \mathscr{C}_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\kappa^{-\gamma(g_*)} \right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} , \qquad (20.3.6)$$

其中, 取决于 g_{κ} 趋于 g_{*} 的速率, \mathscr{C} 要么是常数要么是 $\ln \kappa$ 的幂函数的和.

像量子色动力学这样的渐进自由理论是物理上特别感兴趣的特殊情况.在这种理论中,不动 点处在 $g_* = 0$ 处,并且,根据方程(20.3.4),在这一不动点附近, γ 矩阵趋于

$$\gamma(g)_{\ell\ell'} \to N(\ell)\delta_{\ell\ell'} + g^2 c_{\ell\ell'} , \qquad \gamma(g)_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \to N(\mathcal{O})\delta_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + g^2 c_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} . \qquad (20.3.7)$$

另外,如果我们将耦合的重整化群方程写成如下的形式

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_{\mu}^2 = -\frac{b}{8\pi^2} g_{\mu}^4 , \qquad (20.3.8)$$

那么

$$\int^{\kappa} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} g_{\mu}^2 \to -\frac{8\pi^2}{b} \ln g_{\kappa}^2 + \, \sharp \mathfrak{Y}.$$

在方程(20.3.5)中使用该式就给出了渐进行为

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(\kappa n) \to \kappa^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N(\mathcal{O})} \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\left(g_{\kappa}^2 \right)^{-8\pi^2 c/b} \right]_{\ell,\ell'} \mathscr{C}_{\mathcal{O}'}^{\ell'} \left[\left(g_{\kappa}^2 \right)^{8\pi^2 c/b} \right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}, \tag{20.3.9}$$

其中 $\mathscr{C}'_{\mathcal{O}'}$ 是常数矩阵,它等于 $\mathscr{U}'_{\mathcal{O}'}(0,n)$ 乘上一些常数因子,这些常数因子来自于方程(20.3.5)中 g_{μ} 不 是很小的那部分积分,这使得无法我们利用微扰论计算它们. 当 $\kappa \to \infty$ 时,耦合常数的行为 是 $g_{\kappa}^2 \to 8\pi^2/b\ln\kappa$,所以方程(20.3.9)也可以重写成

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(\kappa n) \to \kappa^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N(\mathcal{O})} \sum_{\ell',\mathcal{O}'} \left[\left(\ln \kappa \right)^{8\pi^2 c/b} \right]_{\ell,\ell'} \mathscr{B}_{\mathcal{O}'}^{\ell'} \left[\left(\ln \kappa \right)^{-8\pi^2 c/b} \right]_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} , \qquad (20.3.10)$$

其中 $\mathscr{B}_{\mathcal{O}'}^{\ell'}$ 是另一常数矩阵.方程(20.3.9)和(20.3.10)成立的条件是 $g_{\kappa}^{2}/8\pi^{2} \ll 1$,但是 $\ln \kappa$ 也不必大到使得c矩阵只有一个本征矢对渐进行为有贡献.在20.6节,方程(20.3.10)将被用来研究深度非弹散射.

20.4 系数函数的对称性

算符积展开有这样的性质,即使底层理论的部分对称性或者全部对称性自发破缺了,系数函数也能将全部对称性呈现出来,这使得算符积展开的用处被极大地拓广了.^[4]为了证明这点,我们考察重整化算符*O_i(x)*乘积的展开,其中*O_i(x)*在守恒流为*J^µ(x)*的对称性下线性变换,也就是说

$$[J^{0}(\mathbf{x},t),\mathcal{O}_{i}(\mathbf{y},t)] = -\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sum_{j}t_{ij}\mathcal{O}_{j}(\mathbf{y},t) , \qquad (20.4.1)$$

其中 t_{ij} 是常数矩阵. 我们可以将算符积展开写成如下的陈述, 随着 x_1, \cdots, x_n 共同趋于 $x(px_1 - x, \cdots, x_n - x$ 均有固定的比值),

$$\langle \beta | T\{\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)\} | \alpha \rangle \to \sum_i U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1-x,\cdots,x_n-x) \langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \alpha \rangle .$$
(20.4.2)

现在假定流为 J^{μ} 的对称性自发破缺了,相应的Goldstone玻色子 π 会满足

$$\langle \text{VAC}|J^{\mu}(0)|\pi\rangle = \frac{F \, p_{\pi}^{\mu}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_{\pi}^{0}}} \,.$$
 (20.4.3)

那么,正如我们在19.2节看到的,若态中有额外的低能Goldstone玻色子,那么算符积在这种态之间的矩阵元是

$$\langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \\ \times \int \mathrm{d}^4 x \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \, J^\mu(x) \} | \alpha \rangle , \qquad (20.4.4)$$

方程(20.4.4)采取它现在的形式是因为只有Goldston极点项在积分中存留了下来. 使用方程(20.4.1)以及流守恒,这可以变成如下形式

$$\langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \\ \times \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{j_r}(x_r) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \alpha \rangle , \qquad (20.4.5)$$

现在对这一公式的两边同时使用算符积展开.在x1,...,xn共同趋于x的极限下,我们发现

$$\sum_{i} U_{i}^{i_{1}\cdots i_{n}}(x_{1}-x,\cdots,x_{n}-x)\langle\beta|\mathcal{O}_{i}(x)|\pi\alpha\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_{\pi}^{0}}F} \times \sum_{r=1}^{n} \sum_{j_{r}} \sum_{i} t_{i_{r}j_{r}} U_{i}^{i_{1}\cdots j_{r}\cdots i_{n}}(x_{1}-x,\cdots,x_{n}-x)\langle\beta|\mathcal{O}_{i}(x)|\alpha\rangle .$$
(20.4.6)

但作为方程(20.4.5)的特殊情况,我们有

$$\langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \pi \alpha \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \sum_j t_{ij} \langle \beta | \mathcal{O}_j(x) | \alpha \rangle .$$
 (20.4.7)

既然对于任意的 $\langle \beta | n | \alpha \rangle$ 所有这些都是成立的,方程(20.4.6)两边 $\langle \beta | O_j(x) | \alpha \rangle$ 的系数必须相等,所以

$$0 = -\sum_{i} t_{ij} U_i^{i_1 \cdots i_n} (x_1 - x, \cdots, x_n - x) + \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} U_i^{i_1 \cdots j_r \cdots i_n} (x_1 - x, \cdots, x_n - x) \quad (20.4.8)$$

这可以重述为如下的条件: $U_i^{i_1\cdots i_n}(x_1-x,\cdots,x_n-x)$ 在t生成的对称变化下不变,并且这一对称变换在下指标上的作用逆步于它在上指标上的作用,即要将t替换成-t^T.如果 J^{μ} 生成的对称性未破缺,这正是我们所期待的关系.

20.5 谱函数求和规则

谱函数求和规则是对各种流的谱函数的约束.^[5]在这里,我们从一组流*J*^a出发,它们除了 是Lorentz4-矢外在其它方面上任意的,在这之后,我们考察更特殊的例子.为了定义它们的谱函 数,利用Lorentz不变性,类比方程(19.2.19)和(19.2.20),我们可以写出

$$\sum_{N} \delta^{4}(p - p_{N}) \langle \text{VAC} | J^{\mu}_{\alpha}(0) | N \rangle \langle \text{VAC} | J^{\nu}_{\beta}(0) | N \rangle^{*} = (2\pi)^{-3} \theta(p^{0}) \\ \times \left[\left(\eta^{\mu\nu} - p^{\mu} p^{\nu} / p^{2} \right) \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(-p^{2}) + p^{\mu} p^{\nu} \rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^{2}) \right] .$$
(20.5.1)

做Fourier变换并利用态|N〉的完备性,这可以写成

$$\langle J^{\mu}_{\alpha}(x) J^{\nu}_{\beta}(0) \rangle_{\text{VAC}} = \int d\mu^{2} \\ \times \left[\eta^{\mu\nu} \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^{2}) - \left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^{2}) + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^{2})/\mu^{2} \right) \partial^{\mu} \partial^{\nu} \right] \Delta_{+}(x;\mu^{2}) , \qquad (20.5.2)$$

其中 $\Delta_+(x;\mu^2)$ 是方程(5.2.7)中定义的函数:

$$\Delta_{+}(x;\mu^{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int d^{4}p \,\theta(p^{0}) \,\delta(p^{2}+\mu^{2}) e^{ip \cdot x} \,.$$
(20.5.3)

假定这些流已经被选成是厄米算符,那么从方程(20.5.1)可以立即得出 $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ 和 $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ 是正定厄 米矩阵. 另外,取 x^{μ} 是类空的(这样 $\Delta_+(x)$ 就是偶函数),并在方程(20.5.2)中使用平移不变形和因果 律,由此我们可以看到 $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ 和 $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ 同时也是对称的.

现在, 在 $x^2 > 0$ 的前提下让 $x \to 0$, 函数 $\Delta_+(x;\mu^2)$ 趋于

$$\Delta_{+}(x;\mu^{2}) \to \frac{1}{4\pi^{2}x^{2}} + \frac{\mu^{2}}{8\pi^{2}} \left[\ln\left(\frac{\gamma\mu\sqrt{x^{2}}}{2}\right) - \frac{1}{2} \right] + O(x^{2}) .$$
 (20.5.4)

其中 γ 是Euler常数.因此,对于 $J^{\mu}_{\alpha}(x)J^{\nu}_{\beta}(0)$ 的展开,这个展开的真空期望值中的前几项是

$$\langle J^{\mu}_{\alpha}(x) J^{\nu}_{\beta}(0) \rangle_{\text{VAC}} \to -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{(x^2)^2} - \frac{4x^{\mu}x^{\nu}}{(x^2)^3} \right] \int d\mu^2 \left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2) + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2)/\mu^2 \right) - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4\pi^2 x^2} \int d\mu^2 \, \rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\mu^2 + \frac{x^{\mu}x^{\nu}}{2\pi^2 (x^2)^2} \int d\mu^2 \left(\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(\mu^2)\mu^2 + \rho^{(1)}_{\alpha\beta}(\mu^2) \right) + O(\ln x^2) \,.$$
 (20.5.5)

因此,如果两点函数的某个线性组合 $\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \langle J^{\mu}_{\alpha}(x) J^{\nu}_{\beta}(0) \rangle_{\text{VAC}} ext{tar} \to 0$ 处的奇异性被证明弱于 $1/x^4$,我们就有

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \left(\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) / \mu^2 \right) = 0 , \qquad (20.5.6)$$

如果它的奇异性同时还弱于1/x²,那么

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int \mathrm{d}\mu^2 \,\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) = 0 \tag{20.5.7}$$

以及

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \, \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 = 0 \,. \tag{20.5.8}$$

方程(20.5.6), (20.5.7)和(20.5.8)已知分别是第一类, 第二类和第三类谱函数求和规则.

现在,我们来看一下这在我们最感兴趣的情况中是如何运作的,即 $J^{\mu}_{\alpha}(x)$ 是类似量子色动 力学的理论中的守恒流.流守恒告诉我们,(20.5.1)与 p_{μ} 守恒后为零,所以 $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^2)$ 必须正比 于 $\delta(-p^2)$,进而它对于任意的 $c_{\alpha\beta}$ 均满足第三类谱函数求和规则(20.5.8).既然 $\rho^{(0)}_{\alpha\beta}(-p^2) \propto \delta(-p^2)$, 对(20.5.1)中的态求和有贡献只有那些构成单个无质量零自旋粒子 B_a 的态 $|B_a\rangle$,而这实际上就 是Goldstone玻色子.对于这样的单粒子态,Lorentz不变性给出

$$\langle \text{VAC}|J^{\mu}_{\alpha}(0)|B_{a}\rangle = \frac{\mathrm{i}F_{\alpha a}\,p^{\mu}_{B}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^{0}_{B}}}.$$
 (20.5.9)

利用关系 $\delta(p^0 - |\mathbf{p}|)/2p^0 = \theta(p^0)\delta(-p^2)$, 我们看到

$$\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) = \delta(-p^2) \sum_{a} F_{\alpha a} F_{\beta a}^* . \qquad (20.5.10)$$

与此相反, $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(-p^2)$ 仅在 $-p^2 > 0$ 时非零.

为了更确切一些,考察可重整的渐进自由规范理论,设该理论有N个无质量(或近无质量)的 自旋1/2费米子,且这些费米子属于规范群的同一表示.量子色动力学符合这一描述,如果我 们忽视u夸克,d夸克和d夸克的质量,这就是N = 3的情况,如果只有u夸克和d夸克被取成无质 量,这就是N = 2的情况.正如我们在第19章所看到的,轻费米子的左手部分和右手部分别按照 表示(N,1)和(1,N)的变换构成了该理论的整体SU(N) × SU(N)对称性,*其中"N"和"1"分别指 代SU(N)的定义表示和恒等表示.左手SU(N)对称性和右手SU对称性的流分别是

$$J_{La}^{\mu}(x) = -i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\lambda_a\psi(x) , \qquad J_{Ra}^{\mu}(x) = -i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\lambda_a\psi(x) , \qquad (20.5.11)$$

其中 λ_a 构成无迹厄米矩阵的一组完备基,它们作用在用来区分这N个夸克的"味"指标上,方程(19.7.2)给出的就是N = 3的情况.这些流的量纲(按质量幂次计)是+3,所以,在两个流乘积的展开(20.3.6)中,对于量纲为 $d(\mathcal{O})$ 的算符 \mathcal{O} ,随着它们变量的间距x趋于零,算符 \mathcal{O} 的系数预期(在去掉对数后)会有一个阶为 $x^{-6+d(\mathcal{O})}$ 的奇点.因此,如果流乘积的某个线性组合的展开中包含单位算

^{*}还存在矢量U(1)对称性,所谓矢量是指该对称变换以相同的方式作用在轻费米场的左手部分和右手部分.这正是 轻夸克数守恒律的来源,我们不会在这里考察它.而拉格朗日量的轴向U(1)对称性,即以不同的方式作用在左手部分和 右手部分上的对称变换,它被23.5节讨论的一个量子效应破缺了.

符, 那么对应的谱函数线性组合会趋于x⁻⁶, 因而一般既不会满足第一类谱函数求和规则也不会满 足第二类谱函数求和规则; 在这个展开的真空期望值中, 如果量纲最低的算符是有一个导数或者 没有导数的费米双线性型, 那么相应的谱函数线性组合会趋于x⁻³或x⁻², 因此它们一般会满足第 一类谱函数求和规则但一般不会满足第二类谱函数求和规则; 在相同的真空期望值中, 如果量纲 最低的算符是有两个或多个导数的费米双线性型或是费米四线性型, 那么相应的谱函数线性组合 的奇异性会低于x⁻², 因而既满足第一类谱函数求和规则又满足第二类谱函数求和规则.

为了分辨出出现在流乘积展开中的是哪个算符,我们需要对乘积中包含的 $SU(N) \times SU(N)$ 表示进行分类,并识别出这些算符是否有不为零的真空期望值,我们必须要问这样的问题:它们中的哪一些是在 $SU(N) \times SU(N)$ 的未破缺子群下不变的.为了回答这些问题,我们注意到,在 $SU(N) \times SU(N)$ 下,流 $J^{\mu}_{La}(x)$ 和 $J^{\mu}_{Ra}(x)$ 分别按照该群的(A,1)表示和(1,A)表示进行变换,其中A和1分别是SU(N)的伴随表示和恒等表示.

另外,我们假定 $SU(N) \times SU(N)$ 中未自发破缺的子群是矢量 $SU(N)_V$ 子群,它的流是 $J_{La}^{\mu}(x) + J_{Ra}^{\mu}(x)$,这正是量子色动力学中的情况也是(正如我们在19.9节看到的)一大类其它理论中的情况. 我们同时假定宇称守恒没有自发破缺.这些未破缺的对称性会给出

$$\rho_{La,Lb}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Rb}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{ab} \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) + \rho_A^{(1)}(\mu^2) \right]$$
(20.5.12)

以及

$$\rho_{La,Rb}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Lb}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{ab} \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2) \right] , \qquad (20.5.13)$$

其中 $\delta_{ab}\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ 和 $\delta_{ab}\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ 是(20.5.2)定义的谱函数,它们对应的流分别是

$$J_{Va}^{\mu} = -i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\lambda_{a}\psi , \qquad \qquad J_{Aa}^{\mu} = -i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_{5}\lambda_{a}\psi , \qquad (20.5.14)$$

其生成元分别为 λ_a 和 $\lambda_a\gamma_5$. 另外,

$$F_{La\,b} = -F_{Ra\,b} = \delta_{ab}F \;, \tag{20.5.15}$$

这里方程(20.5.9)变成

$$\langle \text{VAC}|J^{\mu}_{A\alpha}(0)|B_b\rangle = \frac{\mathrm{i}F\delta_{ab}\,p^{\mu}_B}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0_B}}$$
 (20.5.16)

这使得(20.5.10)变成

$$\rho_{La,Lb}^{(0)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Rb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{La,Rb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{Ra,Lb}^{(0)}(\mu^2) = F^2 \delta(\mu^2) \delta_{ab} .$$
(20.5.17)

分别对手征类的流乘积和非手征类的流乘积进行考察将是方便的.

手征类: 乘积 $J_{La}^{\mu}(x)J_{Lb}^{\nu}(0)$ 和 $J_{Ra}^{\mu}(x)J_{Rb}^{\nu}(0)$ 分别按照 $SU(N) \times SU(N)$ 的 $(A \times A, 1)$ 表示和 $(1, A \times A)$ 表示进行变换,其中A和1分别是伴随表示和恒等表示.对于任何群, $A \times A$ 包含单位表示,所以这些乘积的展开中会有单位算符,并且会有相同的正比于 δ_{ab} 的系数.因此,仅算符积中的无迹部分会满足谱函数求和规则.然而,正如我们所看到的,这些谱函数没有无迹部分,所以手征类的谱函数不可能满足任何求和规则.

非手征类: 乘积 $J_{La}^{\mu}(x)J_{Rb}^{\nu}(0)$ 和 $J_{Ra}^{\mu}(x)J_{Lb}^{\nu}(0)$ 均按照 $SU(N) \times SU(N)$ 的(A, A)表示进行变换. 单位算符(以及 $F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu}$ 这样的算符)显然是 $SU(N) \times SU(N)$ 单态,因而它们无法出现在这些乘

积的展开中.而像 $\bar{\psi}\psi$ 这样的无导数的费米子双线性型,它们按照 $SU(N) \times SU(N)$ 的(\bar{N}, N)表示和(N, \bar{N})表示进行变换,所以它们无法出现在非手征类流乘积的展开中.唯一的规范不变, Lorentz不变并且只有一个导数的费米子双线性型将会包含规范协变的导数算符 $\gamma^{\mu}D_{\mu}$,并且这一算符作用在 ψ 上,而场方程告诉我们它为零.因此,这些谱函数既满足第一类谱函数求和规则又满足第二类谱函数求和规则,而这些求和规则在这里变成

$$\int d\mu^2 \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2) \right] / \mu^2 = F^2$$
(20.5.18)

和

$$\int d\mu^2 \left[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2) \right] = 0 . \qquad (20.5.19)$$

在谱函数求和规则的原始工作中,^[5] 假定了 $SU(2) \times SU(2)$ 谱函数在某些 μ 值处有尖锐的峰, 对于 $\rho_V^1(\mu^2)$,这个 μ 值设为 $m_\rho = 770$ MeV,而对于 $\rho_A^1(\mu^2)$,这个 μ 值被取为某个未知质量 m_A .即,

$$\rho_V^{(1)}(\mu^2) \simeq g_\rho^2 \delta(\mu^2 - m_\rho^2) , \qquad \rho_A^{(1)}(\mu^2) \simeq g_A^2 \delta(\mu^2 - m_A^2) .$$

那么方程(20.5.18)和(20.5.19)就变成**

$$\frac{g_{\rho}^2}{m_{\rho}^2} - \frac{g_A^2}{m_A^2} = F_{\pi}^2$$

和

$$g_{\rho}^2 = g_A^2$$

消掉未知的gA,这给出公式

$$g_{\rho}^{2} = F_{\pi}^{2} \left(\frac{1}{m_{\rho}^{2}} - \frac{1}{m_{A}^{2}} \right)^{-1}$$

最初,在1967年,这一结果再加上公式^[6] $g_{\rho}^{2} = 2F_{\pi}^{2}m_{\rho}^{2}$ (它的证明是不清楚的,但是与 $\rho \rightarrow e^{+} + e^{-}$ 衰 变速率的实验测量值非常一致)被用来导出如下的结果

$$m_A = \sqrt{2}m_\rho$$

很多年以来,质量 $\sqrt{2}m_{\rho}$ 附近可能的与轴矢量流耦合的 a_1 共振的位置依旧是不清楚的,而为了与轴 矢量流耦合, a_1 要有正确的量子数(即,T = 1且C $(a_1^0) = +1$ 的1⁺),而在一个非常合理的估计下,有 这些量子数的共振处在质量1230 MeV = $1.6m_{\rho}$ 处.现在更倾向于把比值 m_A/m_{ρ} 取为输入量,要么 使用特定模型^[7]所建议的值 $\sqrt{2}$,要么使用实验值1.6,然后依此来预测 g_{ρ} .

自1967年起,不仅是 g_{ρ} ,借用电磁流是量子色动力学中SU(3)流的线性组合这个性质,也 对 $SU(3) \times SU(3)$ 流的整个矢量谱函数 $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ 进行了计算,计算的结果与" $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow$ 强 子"截面的测量值在很大的能量范围内精确一致.既然与轻子耦合的强子流与流(20.5.14)的带荷分 量相同,那么原则上, $SU(3) \times SU(3)$ 流的轴矢量谱函数 $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ 可以在" $\bar{\nu} + e \rightarrow$ 强子"的过程中进 行测量. 然而,虽然已经在实验上对反中微子-电子散射进行了研究,但是这些反应速率太低阻碍 我们使用对撞束,这使得电子靶实质上是静止的.为了达到强子特征能量,在质心系下是3 GeV, 那么在实验室参考系下,中微子的能量就得达到(3 GeV)²/2 $m_e \simeq 10$ TeV.很多年来,即使存在过

^{**}像方程(19.7.2)中那样, 取SU(2)生成元 λ_a 为Pauli矩阵, 我们有 $F = F_{\pi} = 184$ MeV.

这种能量的强中微子束, 但是我们从未获得过. 幸运的是, 在" $\tau \rightarrow \nu$ +强子"的过程中研究谱函数 变得可能, 但是强子能量被 $m_{\tau} = 1.7 \,\text{GeV}$ 严格限制了. 同样可能的是用有限手征拉格朗日量计 算 μ^2 值比较小的谱函数, 以及用量子色动力学计算 μ^2 值很大的 $\rho_V^{(1)} - \rho_A^{(1)}$, 这个时候这个差很小. Donoghue和Golowich^[8]在1993年仔细分析了所有输入量, 他们证明了谱函数积分的主导部分确实 是 $\rho \pi_{a_1}$ 共振, 并且给出了与第一类谱函数求和规则和第二类谱函数求和规则相容的的结果.

20.6 深度非弹散射

考察如下的过程: 4-动量为k的电子与4-动量为p的核子N相撞, 然后产生4-动量为k'的电子以及强子态H, 这个强子态一般无法观测而我们要对其求和. 为了计算自旋平均的单举截面, 我们需要知道如下的量

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma_N} \sum_H \delta^4(p_H - p - q) \langle H|J^{\mu}(0)|N\rangle \langle H|J^{\nu}(0)|N\rangle^* , \qquad (20.6.1)$$

其中 J^{μ} 是电磁流(这里除了因子e)而q = k - k'是从电子传到强子的动量. Lorentz不变性告诉我 们 $W^{\mu\nu}(q,p)$ 必须是 $p^{\mu}p^{\nu}, p^{\mu}q^{\nu}, q^{\mu}p^{\nu}, q^{\mu}q^{\nu}$ 以及 $\eta^{\mu\nu}$ 的线性组合,而其系数只能依赖于q和p的两个独 立标量函数: q^2 和 $\nu \equiv -q \cdot p/m_N$. 流守恒则要求 $q_{\mu}W^{\mu\nu} = q_{\nu}W^{\mu\nu} = 0$,所以W必须采取如下形式*

$$W^{\mu\nu}(q,p) = -\left(\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\right) W_1(\nu,q^2) + \frac{1}{m_N^2} \left(p^{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2}q^{\mu}\right) \left(p^{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2}q^{\nu}\right) W_2(\nu,q^2) .$$
(20.6.2)

另外, 方程(20.6.1)表明 $W^{\mu\nu*} = W^{\nu\mu}$, 所以 W_1 和 W_2 是实的, 再加上 $W^{\mu\nu}$ 是正定矩阵, 所以 W_1 和 W_2 都 是正的. 在核子静系中, 微分散射截面是

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{MOTT}} \left(W_2 + 2W_1 \tan^2(\theta/2)\right), \qquad (20.6.3)$$

其中d $\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ 是电子散射方向的立体角,而(d σ /d Ω)_{MOTT}是被一无自旋点粒子弹性散射的 微分截面

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{MOTT}} = \frac{e^4}{4E_e^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} , \qquad (20.6.4)$$

其中 $E_e = -k \cdot p/m_N$ 是入射电子在核子静系中的能量.

可以预期的是, 当 $-p_H^2 = -q^2 + 2m_N\nu + m_N^2$ 保持不变时, 若核子跃迁到的粒子或共振态 所拥有的质量恰好在 $-p_H^2$ 附近, 那么由于微分截面正比于这个跃迁的形状因子, 它应该会随 着 $q^2 \to \infty$ 快速衰减. 让人有些意想不到的是, 在1966年斯坦福直线加速器中心开始运行的两年 后, 由Friedman, Kendall和Taylor^[9]领头的SLAC-MIT合作组发现, 对于固定的 $\omega \equiv 2m_N\nu/q^2 >$ 1, $\nu W_2(q^2,\nu)$ 对于 q^2 粗略是一常数. (更确切一些, 对于质子, 当 $E_e = 10$, 13.5, 16 GeV而 $\theta =$ 6°和10°时, $W_2(q^2,\nu)$ 所拟合的曲线是 $\nu W_2(q^2,\nu) \simeq 0.35 - 0.004\omega$. 由于tan²(10°/2) = 7.6 × 10⁻³, 所以这些实验对 W_1 不敏感.) 注意到在这一极限下, $-p_H^2 \to (\omega - 1)q^2 \to \infty$, 这就是为什么称这一 散射为深度非弹散射的原因.

^{*}我们也可用这个形式理论计算其它轻子的深度非弹散射过程,例如 $\nu_{\mu} + p \rightarrow \mu^{-} + H$,但是在这些过程中字称是不守恒的,所以在 $W^{\mu\nu}(p,q)$ 中有一个正比于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{\rho}q_{\sigma}$ 的额外项.简单起见,我们在这里只研究电子的深度非弹散射.

与此同时, Bjorken^[10]用流代数方法论证了 $W_2(q^2,\nu)$ 和 $W_1(q^2,\mu)$ 满足标度率: 当 q^2 和 ν 共同趋于无穷时,

$$\nu W_2(\nu, q^2) \to F_2(\omega) , \qquad W_1(\nu, q^2) \to F_1(\omega) , \qquad (20.6.5)$$

其中依旧有 $\omega \equiv 2m_N\nu/q^2$. 之后不久, Feynman就给出了一个更加直观的解释.^[11] 他认为对于高度相对论性核子上的深度非弹散射, 设核子动量为**p**, 那么核子的行为就像它是由各种"部分子"构成一样, 用*i*来标记部分子的种类, 设第*i*种部分子的动量处在x**p**与(x+dx)**p**之间的概率为 $\mathscr{P}_i(x)$ dx. 那么, 对于每个*i*

$$\int \mathrm{d}x \,\mathscr{F}_i(x) = 1 \,. \tag{20.6.6}$$

核子总动量为p的条件给出额外的求和规则

$$\int_{0}^{1} \sum_{i} \mathscr{F}_{i}(x) \, x \, \mathrm{d}x = 1 \, . \tag{20.6.7}$$

对于电子(忽略 m_e)在4-动量为xp的部分子上的散射,我们有 $x^2m_N^2 = -(q+xp)^2 = -q^2 - 2\nu m_N x + x^2m_N^2$,所以 $\nu = q^2/2m_N x$.因此,这一模型中的非弹截面是**

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{MOTT}} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \left(1 + \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right)$$
(20.6.8)

其中 Q_i 是第i种部分子所带的电荷,单位为e. (这里的tan²(θ /2)项是为了符合"Dirac"部分子,这样的部分子拥有磁矩 $eQ_i/2m_N x$.) 与方程(20.6.3)比较,这给出

$$W_2(\nu, q^2) = \sum_i Q_i^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \,\mathscr{F}_i(x) \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) = \frac{1}{\nu\omega} \sum_i Q_i^2 F_i\left(\frac{1}{\omega}\right) \,, \tag{20.6.9}$$

$$W_1(\nu, q^2) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \,\mathscr{F}_i(x) \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) = \frac{\omega\nu}{2m_N} W_2(\nu, q^2) \,. \tag{20.6.10}$$

这与Bjorken标度率(20.6.5)一致,其中

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathscr{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right)$$
(20.6.11)

以及

$$F_1(\omega) = (\omega/2m_N)F_2(\omega)$$
. (20.6.12)

Callan和Gross最早导出了方程(20.6.12).^[12]这个结果与实验的误差率为10-15%.

$$\sum_{e,e'} \left(e \cdot e' \right)^2 = 2 + \frac{m^4 (k \cdot k')^2}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} + \frac{2m^2 (k \cdot k')}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} \; .$$

^{**}这也可以从公式(8.7.7)和(8.7.28)推导出来,即在一般Lorentz参考系下,在自旋为1/2,动量为p且质量为m粒子上的Campton散射.由于这个原因要注意推导这个公式所用的规范,初态和末态实极化矢量 e_{μ} 和 e'_{μ} 满足 $e^{2} = e'^{2} = 1$, $e \cdot p = e' \cdot p = e \cdot k = e' \cdot k' = 0$,极化矢量求和给出

若假定质子由两个u夸克,一个d夸克以及任意多个中性部分子构成,而中子由一个u夸克,两个d夸克以及任意多个中性部分子构成,那么方程(20.6.11)和(20.6.6)就给出了W₂的求和规则

$$\int_{1}^{\infty} F_2(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \sum_{i} Q_i^2 = \begin{cases} 1 & p \\ 2/3 & n \end{cases}$$
(20.6.13)

这个积分在 ω 很大时会得到很大的贡献,而这时 F_2 很难测量.如果我们同时假定3个夸克均分了核子的总动量(中性部分子不参与动量分配),那么取代方程(20.6.7),对于每个夸克,我们会有更强的关系 $\int \mathscr{P}_i(x) x \, dx = 1/3$,而这与方程(20.6.11)给出

$$\int_{1}^{\infty} F_{2}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^{2}} = \frac{1}{3} \sum_{i} Q_{i}^{2} = \begin{cases} 1/3 & p \\ 2/9 & n \end{cases}$$

这个积分很容易测量, 而测量结果与求和规则完全不一致, 这表明中性部分子携带了大部分的核子动量.

在前面的现象中,没有一个依赖于特定的场论.正是算符积展开最终提供了一种方式使得我 们可以将底层理论应用于深度非弹散射.特别地,算符积展开使得如下的事实变得显然:我们需要 用渐进自由场论来解释标度假定(20.6.5)(并计算对标度的修正).而这个渐进自由理论最终由量子 色动力学给出.

为了对深度非弹散射使用算符积展开,首先对方程(20.6.1)做Fourier变换.利用平移不变性和 强子态|H>的完备性,这给出

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int d^4 z \, e^{-iq \cdot z} \langle N|J^{\nu}(z)J^{\mu}(0)|N\rangle \,. \tag{20.6.14}$$

因此, $W^{\mu\nu}(q,p)$ 在 $q \to \infty$ 时的渐进行为与算符积在 $z \to 0$ 处的奇点相关.

对算符积展开中的系数函数进行Feynman图计算并不是指直接计算方程(20.6.14)中的矩阵元 展开式,即W^{µν}中的矩阵元展开式,而是计算两点Green函数的矩阵元

$$(m_N/p_N^0)T^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int d^4 z \, e^{-iq \cdot z} \langle N | T\{J^{\nu}(z), J^{\mu}(0)\} | N \rangle \,. \tag{20.6.15}$$

我们可以用T^µ的结构函数表示上式,结构函数的定义类似于方程(20.6.2):

$$T^{\mu\nu}(q,p) = -\left(\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\right)T_1(\nu,q^2) + \frac{1}{m_N^2}\left(p^{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2}q^{\mu}\right)\left(p^{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2}q^{\nu}\right)T_2(\nu,q^2) .$$
(20.6.16)

对于固定的 q^2 , $T_r(\nu, q^2)$ 和 $W_r(\nu, q^2)$ (其中r = 1, 2)之间的关系由色散关系[†]给出^[13]:

$$T_r(\nu, q^2) = \frac{1}{2} W_r(-\nu, q^2) + \frac{1}{2} W_r(\nu, q^2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \frac{W_r(-\nu', q^2) - W_r(\nu', q^2)}{\nu' - \nu} , \qquad (20.6.17)$$

[†]当 $q^2 = 0$ 时,可以像推导向前光子散射的色散关系(10.8.16)那样将这些精确地推导出来.而对于固定的 $q^2 \neq 0$,这个推导要困难一些.

其中被积函数中的分母要理解成主值函数. 除非 $\nu > q^2/2m_N$, 否则函数 $W_r(\nu, q^2)$ 为零, 所以色散 关系可以写成

$$T_r(\nu, q^2) = \frac{1}{2} W_r(-\nu, q^2) + \frac{1}{2} W_r(\nu, q^2) - \frac{1}{2\pi i} \int_{q^2/2m_N}^{\infty} d\nu' W_r(\nu', q^2) \left(\frac{1}{\nu' + \nu} + \frac{1}{\nu' - \nu}\right) .$$
(20.6.18)

对于那些对 T_r 的算符积展开有贡献的算符,我们可以根据它们所属的Lorentz群不可约表示对其进行分类.对于 $p^2 = -m_N^2$ 固定的单个4-矢 p^μ ,它的唯一Lorentz协变函数正比于对称张 量 $p^{\mu_1} \cdots p^{\mu_s}$,所以,对自旋平均的核子期望值有贡献的算符只有对称无迹张量 $\mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \cdots \mu_s}$,其中下标i用来区分拥有这一张量结构的不同算符.(我们同时还在部分子模型中用i标记算符的部分子种类,这样做的原因会在下文中给出.)这些算符拥有如下形式的矩阵元

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma_N} \langle N|\mathcal{O}_{si}^{\mu_1\cdots\mu_s}|N\rangle = (m_N/p_N^0) \Big[p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_s} - \dot{\mathfrak{B}} \Big] \langle \mathcal{O}_{si}\rangle , \qquad (20.6.19)$$

其中 $\langle \mathcal{O}_{si} \rangle$ 是常系数. 这样的算符对 $T^{\mu\nu}$ 的贡献正比于4-动量p的s因子,因此它对 $T_1(\nu, q^2)$ 和 $T_2(\nu, q^2)$ 的贡献分别正比于 $\nu^s n \nu^{s-2}$. (包含 p^2 的项会被因子 m_N^2/q^2 或 $m_N^2/p \cdot q$ 压低,所以我们扔掉了这样的项.)如果我们忽略对数修正,那么在渐进自由理论中,系数对 q^2 的依赖形式分别 是 $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s)/2}$ 和 $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s+2)/2}$,其中d(s,i)是算符 \mathcal{O}_{si} 的量纲.^{††}利用 $\nu \propto q^2 \omega$,我 们看到算符 \mathcal{O}_{si} 对结构函数贡献的渐进形式是

$$T_{1,si} \propto \nu^s (q^2)^{(2-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^s (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2}$$
(20.6.20)

和

$$\nu T_{2,si} \propto \nu^{s-1} (q^2)^{(4-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^{s-1} (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2} , \qquad (20.6.21)$$

其中 $\tau(s,i)$ 是算符 \mathcal{O}_{si} 的"扭度"(twist), 定义为^[14]

$$\tau(s,i) \equiv d(s,i) - s$$
 . (20.6.22)

我们看到对于固定的 ω , 当 $q^2 \to \infty$ 时, 扭度最小的算符贡献了 $T_1 \pi \nu T_2$ 中的主导项. 另外, 方程(20.6.18)表明 $T_r(\nu, q^2)$ 中不存在 ν 的奇次项, 所以只有那些s为偶数的算符才在这里有贡献.

在s阶的对称无迹张量中,量纲最小的是算符

$$(\mathcal{O}_{sf})_{\mu_1\cdots\mu_s} \equiv (\mathbf{i}^{s-2}/s!)\bar{\psi}_f\gamma_{\{\mu_1}D_{\mu_2}^\leftrightarrow\cdots D_{\mu_s\}}^\leftrightarrow\psi_f \tag{20.6.23}$$

和

$$(\mathcal{O}_{s0})_{\mu_1\cdots\mu_s} \equiv (\mathbf{i}^{s-2}/2s!) F_{\alpha\nu\{\mu_1} D_{\mu_3}^{\leftrightarrow} \cdots D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} F_{\alpha\mu_2\}}^{\nu} , \qquad (20.6.24)$$

其中f代表夸克味; D_{μ} 是规范协变导数; 而花括号代表对括号内的时空指标进行置换求和再减掉 迹. (符号↔是指向右作用的导数减掉向左作用的导数再除以2. 我们取导数的差是因为它们的和 在4-动量相等的态之间的矩阵元为零.) 这些算符的量纲为3 + (s - 1) = 4 + (s - 2) = 2 + s, 所 以它们的扭度为 $\tau = 2$. 因此在 $q^2 \rightarrow \infty$ 时会有无限多个算符有贡献, 这些算符对 $T_1 \pi \nu T_2$ 的贡献

^{††}指数中的-4来自于方程(20.6.14)中对z的积分, +6是两个电子流算符的量纲. -s/2和-(s-2)/2分别用来补 偿 $\nu^s n \nu^{s-2} n q^{\mu}$ 的幂函数.

与ω相关但只与q²对数相关.因此,渐进自由保证了Bjorken标度律,所相差的只是一个对数修正. 只保留扭度为2的算符,我们看到(正如我们的符号约定所预言的),对于每个s,只有一个算符与每 个部分子种类相对应,这里*i*取遍夸克种类f(夸克和反夸克合在一起)而*i* = 0对应胶子.

现在我们来考察对数修正. 在渐进自由的理论中, 系数函数的渐进行为由方程(20.3.9)控制. 正如我们在10.4节所讨论的, 当我们忽略电磁辐射修正后, 由于电磁流是守恒的, 它们不需要重整 化因子. 因此方程(20.3.9)中的矩阵 $c_{\ell\ell'}$ 为零. 而矩阵 $c_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}$ 也没有元素可以连接Lorentz变换类型不 同的算符, 这使得在我们所使用的符号约定中, $c_{si,s'i'} = \delta_{ss'}c_{ii'}(s)$. 因此, 方程(20.3.9)采取如下的 形式

$$T_1(\nu, q^2) \to \sum_{sij} \omega^s \mathscr{A}_{si} \left[\left(g_q^2 / g_\ell^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle , \qquad (20.6.25)$$

$$\nu T_2(\nu, q^2) \to \sum_{sij} \omega^{s-1} \mathscr{B}_{si} \left[\left(g_q^2 / g_\ell^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle , \qquad (20.6.26)$$

其中 \mathscr{A} 和 \mathscr{B} 是常数,它们源于算符 \mathcal{O}_{si} 在两个流乘积的算符积展开中的系数函数, $\ell^2 \mathbb{E}q^2$ 的某个特定值,我们用它来定义系数函数,b是一圈重整化群方程(20.3.8)中对应强耦合常数 g_q 的常数,而 $\langle \mathcal{O}_{si} \rangle$ 是矩阵元(20.6.19)中的常系数.

在算符积展开中,系数与问题中所研究的特定过程无关并且不受夸克陷俘的影响,所以,通过 考察一个虚拟的简单过程,例如电子在f味自由夸克上的散射,我们就能计算出系数*A_{si}和B_{si}*.重 整化算符*O_{si}*的一种非常方便的定义方式是,使得算符(20.6.23)和(20.6.24)的单夸克矩阵元由树级 近似给出:

$$\langle f', \sigma' | \mathcal{O}_{sf} | f'', \sigma'' \rangle = \frac{(-1)^{s_i}}{s!} \left(\bar{u}' \gamma^{\{\mu_1 u\}} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_s\}} \delta_{ff'} \delta_{ff''} ,$$
 (20.6.27)

$$\langle f', \sigma' | \mathcal{O}_{s0} | f'', \sigma'' \rangle = 0$$
 . (20.6.28)

对方程(20.6.27)做 $\sigma' = \sigma''$ 的平均并与方程(20.6.19)比较,这给出

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} \frac{m_f}{p^0} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_s} = \delta_{ff'} \frac{(-1)^s i}{2s!} \operatorname{Tr} \left\{ \left(\frac{-i \not p + m_f}{2p^0} \right) \gamma^{\{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_s\}} \right\} ,$$

这使得(对于偶数的s)

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} = \delta_{ff'} / m_f \tag{20.6.29}$$

以及

$$\langle \mathcal{O}_{s0} \rangle_{f'} = 0$$
 . (20.6.30)

在算符*O_{si}*的这一定义下,当重整化动量标度ℓ²足够大,使得我们可以使用树级计算算符积展开函数时,我们可以从电子-夸克散射的树级截面中推出这些函数.回溯方程(20.6.9)和(20.6.10)的部分子模型推导,我们看到对于电子在*f*味夸克上的散射,在树级近似下,*W_r*给定为[‡]

$$\nu W_{2,f} = (m_N/m_f)Q_f^2\delta(\omega - 1) , \qquad (20.6.31)$$

$$W_{1,f} = Q_f^2 \delta(\omega - 1) / 2m_f . \qquad (20.6.32)$$

[†]在方程(20.6.31)中插入因子(m_N/m_f)是因为 ν 的定义是 $-q \cdot p/m_N$ 而不是 $-q \cdot p/m_f$,与此同时出现在方程(20.6.2)中的是 W_2/m_N^2 而不是 W_2/m_f^2 .这样,方程(20.6.32)就可以从方程(20.6.10)中推出. ω 也可以写与质量无关的形式,例如 $\omega = -2q \cdot p/q^2$.

将这些结果代入色散关系(20.6.18), 对于 $\omega \neq 1$, 这给出

$$T_{1,f} = \frac{Q_f^2}{2\pi i m_f} \frac{m_N}{m_f} \frac{1}{\omega^2 - 1} , \qquad (20.6.33)$$

$$\nu T_{2,f} = \frac{2Q_f^2}{2\pi i} \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} , \qquad (20.6.34)$$

这些结果也可以通过计算电子-夸克散射的Feynman图直接获得.利用方程(20.6.29)和(20.6.30), 在重整化点 $q^2 = \ell^2$ 比较方程(20.6.33)和(20.6.34)与方程(20.6.25)和(20.6.26)中 ω °的系数,我们发现

$$\mathscr{A}_{si} = \frac{\mathrm{i}Q_i^2}{2\pi} , \qquad \qquad \mathscr{B}_{si} = \frac{\mathrm{i}m_N Q_i^2}{\pi} , \qquad (20.6.35)$$

其中胶子电荷Q₀显然要取为零.重申一次,尽管我们是从电子-夸克散射中导出这些值的,但 是*A_{si}和 B_{si}*是两个电流乘积的算符积展开中的因子,所以它们不依赖我们在计算该算符积期望值 时所取的态.因此,我们可以在方程(20.6.25)和(20.6.26)中使用方程(20.6.35),由此发现

$$T_1(\nu, q^2) \to \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{sij} \omega^s Q_i^2 \left[\left(g_q^2 / g_\ell^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle , \qquad (20.6.36)$$

$$\nu T_2(\nu, q^2) \to \frac{\mathrm{i}m_N}{\pi} \sum_{sij} \omega^{s-1} Q_i^2 \left[\left(g_q^2 / g_\ell^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle .$$
 (20.6.37)

现在,我们回到最终的结构函数 $W_r(\nu, q^2)$.我们注意到, $T_r(\nu, q^2)$ 中 $\omega^s = (2m_N\nu/q^2)^s$ 的系数 由方程(20.6.18)给出

与方程(20.6.36)和(20.6.37)进行比较,我们发现

$$\int_{1}^{\infty} \mathrm{d}\omega \,\omega^{-1-s} W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i^2 \left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle , \qquad (20.6.38)$$

$$\int_{1}^{\infty} \mathrm{d}\omega \,\omega^{-s} \nu \,W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to m_N \sum_{ij} Q_i^2 \left[\left(g_q^2/g_\ell^2\right)^{8\pi^2 c(s)/b}\right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle \,. \tag{20.6.39}$$

类似部分子模型,满足这些方程的Wr显然可以表示成方程(20.6.9)和(20.6.10)的形式

$$W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \sum_i Q_i^2 \mathscr{F}_i(1/\omega, q^2) , \qquad (20.6.40)$$

$$\nu W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \to \frac{2m_N}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathscr{F}_i(1/\omega, q^2) , \qquad (20.6.41)$$

其中的.罗i是部分子分布函数,现在定义它的动量方程是

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \, x^{s-1} \mathscr{F}_{i}(x,q^{2}) = \frac{1}{2} \sum_{j} \left[\left(g_{q}^{2}/g_{\ell}^{2} \right)^{8\pi^{2}c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle \,. \tag{20.6.42}$$

特别地,我们看到渐进自由不仅给出了Bjorken标度率的修正版,并且给出了 W_1 和 W_2 之间的Callan-Gross关系(20.6.12).

Altarelli和Parisi^[15]给出了动量方程(20.6.12)另一个非常优美的表述,这个表述被广泛地应用 于深度非弹散射的研究中.注意到,加上重整化群方程(20.3.8),方程(20.3.8)可以给出微分方程

$$q^{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^{2}} \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \, x^{s-1} \mathscr{F}_{i}(x,q^{2}) = -g_{q}^{2} \sum_{j} c_{ij}(s) \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \, x^{s-1} F_{j}(x,q^{2}) \,. \tag{20.6.43}$$

加上重整化点化2的初始条件

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \, x^{s-1} \mathscr{F}_{i}(x,\ell^{2}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{O}_{si} \rangle \,, \qquad (20.6.44)$$

这些方程有唯一解,所以它们可以代替动量方程.现在,方程(20.6.43)的解满足买;的微分方程:

$$q^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2} \mathscr{F}_i(x, q^2) = \frac{g_q^2}{4\pi^2} \sum_j \int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} P_{ij}\left(\frac{x}{y}\right) \mathscr{F}_j(y, q^2) , \qquad (20.6.45)$$

其中矩阵函数Pii(z)服从条件

$$\int_0^1 z^{s-1} P_{ij}(z) \, \mathrm{d}z = -4\pi^2 c_{ij}(s) \; . \tag{20.6.46}$$

(因子4π²是习惯上的约定.)

Georgi和Politzer^[16]以及Gross和Wilczek^[17]在量子色动力学中计算出了矩阵*c_{ij}(s)*. 他们假定 有*N*味质量非常小的夸克,这些夸克质量小到可以视为无质量,而剩下的夸克质量非常重使得它 们可以被积掉,这使得除了重夸克对强耦合常数的效应外,他们可以忽视掉重夸克的其它效应. 在 算符(20.6.23)和(20.6.24)所给出的基下,它们的结果是

$$c_{00}(s) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ C_1 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] + \frac{N}{3} C_2 \right\} , \qquad (20.6.47)$$

$$c_{f0}(s) = \frac{1}{\pi^2} C_2 \left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right] , \qquad (20.6.48)$$

$$c_{0f}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s-1)} \right] , \qquad (20.6.49)$$

$$c_{ff'}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] \delta_{ff'} , \qquad (20.6.50)$$

其中0和*f*分别代表算符(20.6.24)和(20.6.23);常数*C*₁和*C*₂由方程(17.5.33)和(17.5.34)定义(其中在 方程(17.5.34)的迹中只有一个夸克味);*N*是夸克味的数目;*C*₃的定义(使用17.4节符号约定)是

$$t_{\alpha}t_{\alpha} = C_3 g^2 1 . (20.6.51)$$

在现实情况中,规范群是SU(3),而夸克处在它的定义表示3中,所以这些数是

$$C_1 = 3$$
, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = \frac{4}{3}$. (20.6.52)

以Altarelli-Parisi函数的形式,这些非常复杂的结果会变得简单一些.可以直接证明,如果

$$P_{ff'} = \delta_{ff'} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} \right) + 2\delta(1-x) \right] , \qquad (20.6.53)$$

$$P_{f0} = x^{2} - x + \frac{1}{2} , \qquad (20.6.54)$$

$$P_{0f} = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{x} - 2 + x \right] , \qquad (20.6.55)$$

$$P_{00} = 6\left[\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \frac{x}{(1-x)_{+}} + \frac{11}{12}\delta(1-x)\right] - \frac{N}{3}\delta(1-x) , \qquad (20.6.56)$$

方程(20.6.46)就是成立的,要注意的是这些函数处在对x的积分中,积分上限是x = 1,而1/(1 - x)+的定义是

$$\frac{f(x)}{(1-x)_{+}} \equiv \frac{f(x) - f(1)}{1-x} .$$
(20.6.57)

对于每个s,矩阵c(s)显然有一个(N-1)重简并的本征值,这个本征值等于 $\delta_{ff'}$ 在方程(20.6.50)中的系数:

$$c(s, \# \mathbb{\hat{m}}) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] , \qquad (20.6.58)$$

而本征算符由算符(20.6.23)的线性组合给出,这些线性组合相互独立且系数 a_f 满足 $\sum_f a_f = 0$,它们属于SU(N)群的伴随表示,这里的SU(N)群正是有N个夸克味的量子色动力学的未破缺整体对称群.另外,对于每个s,还有两个本征算符,它们属于SU(N)的单态表示,由算符(20.6.24)和对f求和的算符(20.6.23)的线性组合给出.通过对角化如下的2 × 2矩阵

$$c(s)_{\text{singlet}} = \begin{bmatrix} c_{00}(s) & c_{0f}(s)N\\ c_{f0}(s) & c(s, \notin \mathbb{R}) \end{bmatrix}, \qquad (20.6.59)$$

我们可以找到这些本征算符以及相应的本征值. 当s = 2时, 这个矩阵采取如下的形式

$$c(2)_{\text{singlet}} = \begin{bmatrix} NC_2/6\pi^2 & NC_3/6\pi^2 \\ C_2/3\pi^2 & C_3/3\pi^2 \end{bmatrix} .$$
 (20.6.60)

它有一个零本征值,相应地,这时 $\mathcal{O}_{20}^{\mu\nu}$ 和 $\sum_{f} \mathcal{O}_{2f}^{\mu\nu}$ 的线性组合等于能动量张量,而这个能动量张量 同 J^{μ} 一样是未重整化的.矩阵(20.6.60)的其它本征值由它的迹给出,即 $NC_2/6\pi^2 + C_3/3\pi^2$.现在, 若给定s,对于任意的s' < s, $c_{ij}(s)$ 的最小本征值至少要和 $c_{ij}(s')$ 的最小本征值一样大,若非如此, 对于充分大的 q^2 ,积分(20.6.42)最终会随着s的增长而增长,这与该积分是s的严格单调减函数这一 事实相矛盾.由于最小本征值在s = 2时为零,我们可以得出,当s > 2时,所有其它本征值都是正 的.事实上,由于s > 2时没有未重整化算符,这些本征值是正定的.因此,仅在 $g_q^2 \to 0$ 的极限下, 严格的Bjorken标度率才是成立的,这时只有能动量张量有贡献.严格Bjorken标度律被破坏的预 言在实验上被证实了,具体来讲,是通过对深度非弹电子-核子散射以及 μ 子-核子散射的详细研究 而被证实的.

20.7 **重整化子**^{*}

在量子场论早期,理论家们就抱有如下的疑问:物理矩阵元的微扰展开是否收敛,如果不收 *本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过. 对于这种n阶项的增长率为n!的级数,我们有一种非常著名的技术来提升它的收敛性,这种技术被称作Borel变换^[19],这个方法要么使得级数收敛,如果没有使得级数收敛,至少可以改善级数的行为,使得在耦合常数的一个很大范围内,我们可以将其用作渐进展开.对于给定级数

$$F(g) = \sum_{n} f_n g^n \tag{20.7.1}$$

我们考察与之相关的级数

$$B(z) \equiv \sum_{n} f_n z^n / n!$$
 (20.7.2)

如果*f_n*的增长速率没有*n*!快,那么*B*(*z*)一般会有一个有限大的收敛半径.问题是,我们能否从重求和级数(20.7.2)中复现处原始级数(20.7.1)?利用熟悉的公式

$$\int_0^\infty \exp(-z/g) z^n \, \mathrm{d}z = n! \, g^{n+1}$$

我们看到,至少在形式上有

$$gF(g) = \int_0^\infty \exp(-z/g)B(z) \,\mathrm{d}z$$
 (20.7.3)

无论B(z)的奇点处在复平面的何处,它总会限制级数(20.7.2)的收敛半径,但是只要这些奇点不在正实轴上,这就不是一个无法解决的问题.为了用方程(20.7.3)计算F(g),我们仅需要当z为小于g或g阶的正实值时的B(z),如果B(z)在复平面上的奇点与原点的距离远大于g,我们就可以通过幂级数(20.7.1)直接获得这些B(z).即使有若干极点 z_1, z_2, \cdots 的模长小于g或者为g阶,我们也可通过 $(z - z_1)(z - z_2) \cdots B(z)$ 的幂级数计算出z为g阶时的B(z),但前提是我们要知道这些极点的位置.

如果*B*(*z*)的奇点处在正实轴上,这些奇点就会破坏方程(20.7.3),与上面相比,这种情况要糟糕的多.这时,我们可以稍微对积分围道做些变形以避开奇点,但这样就会有两种选择:我们是让围道从上方绕开奇点还是从下方绕开奇点?

这一节将会证明: Borel变换*B*(*z*)的一些奇点与场方程的解相关,这些奇点被称为瞬子,而另一些奇点与算符积展开中的项相关,这些奇点则被称为重整化子(*renormalons*). 在量子色动力学中,使用Borel变换对微扰展开进行求和的障碍正是重整化子.

Lipatov^[20]在1976年证明了Borel变换B(z)的一些奇点与场方程经典解的存在性相关.考察由 欧几里得路径积分定义的函数F(g):

$$F(g) \equiv \int [\mathrm{d}\phi] \exp(I[\phi, g]) \ . \tag{20.7.4}$$

(第23章的附录A讨论了欧几里得路径积分的使用方法.)幂级数(20.7.1)中的系数给定为

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int [\mathrm{d}\phi] \oint \mathrm{d}g \ g^{-n-1} \exp(I[\phi, g])$$

= $\frac{1}{2\pi i} \int [\mathrm{d}\phi] \oint \mathrm{d}g \ \exp\left(I[\phi, g] - (n+1)\ln g\right),$ (20.7.5)

其中∮是指复g平面上围绕g = 0的逆时针围道积分. 当n很大时,可以合理地认为这个积分的主导 贡献由方程(20.7.5)最后一行对 ϕ 和g的稳相点给出,记这些点为 ϕ_n 和g_n,它们满足:

$$\frac{\delta I[\phi, g_n]}{\delta \phi(x)}\Big|_{\phi=\phi_n} = 0 , \qquad (20.7.6)$$

$$\left. \frac{\partial I[\phi, g_n]}{\partial g} \right|_{g=g_n} = \frac{n+1}{g_n} \ . \tag{20.7.7}$$

例如, 假定 $I[\phi, g]$ 是无质量标量场的作用量

$$I[\phi,g] = -\frac{1}{2} \int \partial_i \phi \partial_i \phi \,\mathrm{d}^4 x - \frac{g}{24} \int \phi^4 \,\mathrm{d}^4 x \;, \qquad (20.7.8)$$

其中求和取遍欧几里得坐标方向1,2,3,4. 那么,场方程(20.7.6)是

$$\Box \phi_n = \frac{1}{6} g_n \phi_n^3 \ . \tag{20.7.9}$$

稍后我们会看到gn是负的,所以解有

$$\phi_n(x) = (-g_n)^{-1/2} \chi(x) \tag{20.7.10}$$

其中χ(x)与g无关, 它是方程

$$\Box \chi = -\frac{1}{6}\chi^3 \ . \tag{20.7.11}$$

的解. 条件(20.7.7)告诉我们

$$-\frac{1}{24}\int \mathrm{d}^4x\,\phi_n^4 = \frac{n+1}{g_n}$$

以重标度场(20.7.10)的形式,这可以写成

$$g_n = -\frac{1}{24(n+1)} \int d^4x \,\chi^4 \,. \tag{20.7.12}$$

在这一稳相点,作用量(20.7.8)变成

$$I[\phi_n, g_n] = -\frac{1}{2} \int \partial_i \phi_n \partial_i \phi_n \, \mathrm{d}^4 x - \frac{g_n}{24} \int \phi_n^4 \, \mathrm{d}^4 x = \frac{g_n}{24} \int \phi_n^4 \, \mathrm{d}^4 x$$

= -n - 1. (20.7.13)

那么, 当 $n \to \infty$ 时, 方程(20.7.5)在这一稳相点给出值^{**}

$$f_n \approx g_n^{-n-1} \exp\left(I[\phi_n, g_n]\right) = (n+1)^{n+1} \left(-\frac{e}{24} \int \chi^4 \,\mathrm{d}^4 x\right)^{-n-1}$$
$$\approx n! \left(-\frac{1}{24} \int \chi^4 \,\mathrm{d}^4 x\right)^{-n} \,. \tag{20.7.14}$$

^{**}这里的符号"≈"应该理解成"在相差常数因子和n的幂函数意义下渐进相等".这些因子来自(n+1)!的Stirling公式中的因子 $\sqrt{12\pi n}$, (n+1)!与n!的比值,以及对g和 $\phi(x)$ 在稳相点附近涨落的积分.既然我们不打算计算最后一个积分所给出的因子,所以也就没有必要保留前两个因子.



图 20.3 像N!那样增长的N-圈Feynman图的一个例子. 实线是费米子; 波浪线是规范玻色子.

因此, B(z)中的领头奇点是 $z = z_1$ 处的极点, 其中

$$z_1 = -\frac{1}{24} \int \chi^4 \,\mathrm{d}^4 x \;. \tag{20.7.15}$$

由于这个极点是负的,所以它不会妨碍我们计算方程(20.7.3)中的积分.为了计算出极点位置(20.7.15),我们注意到,场方程(20.7.11)有解

$$\chi = \frac{4\sqrt{3}a}{r^2 + a^2} , \qquad (20.7.16)$$

其中 $r = (x_i x_i)^{1/2}$, 而a是任意的参量.场方程的这个解是"瞬子解"的基本例子, 我们会在23.5节进行讨论. (称它们为瞬子是因为, 它们并非集中在世界线附近而是集中在某个时空点附近——在这个例子中就是原点.) 幸运的是, 极点位置并不依赖于a:

$$z_1 = -96\pi^2 a^4 \int_0^\infty \frac{r^2 \,\mathrm{d}r^2}{(r^2 + a^2)^4} = -16\pi^2 \ . \tag{20.7.17}$$

从这个式子中可以我们看到,如果 $g \ll 16\pi^2$,我们就可以在方程(20.7.3)中使用B(z)的微扰展开. 如果 $g/16\pi^2$ 的量级为1或者大于1,我们仍然可以通过($z + 16\pi^2$)B(z)的微扰展开计算出B(z).

我们会在23.5节看到, 在量子色动力学这样的非阿贝尔规范理论中存在瞬子解, 它们同时会给 予*B*(*z*)相对无害的奇点, 这些奇点处在负实轴上. 而量子色动力学中真实问题中, 奇点属于另一 类, 这些奇点被称为重整化子.^[21] 最初发现这些奇点是因为发现^[22]如下的现象: 一个2*n*阶图, 例如 图20.3中的图, 它所给出的贡献可能像*n*!那样增长, 因此, 根据方程(20.7.2), 它会赋予*B*(*z*)额外的 奇点. 在这一特殊情况下, 这个奇点被称为红外重整化子, 之所以称其为红外重整化子, 是因为给 出这个奇点的那部分虚动量远小于用来定义量子色动力学跑动耦合*g*_μ的动量. 幸运的是, 有可能 通过算符积展开来确定这个红外重整化子, 这样就无需考察单个Feynman图.

我们来看一个简单但重要的例子, 在量子色动力学中, 考察插入两个4-矢流 J^{μ}_{α} 和 J^{ν}_{β} 的所有真 空图之和, 其中这两个流携带动量q流入并流出整个图. (П^{µν}(q)给出了电弱真空极化的强子贡献, 而它的虚部给出了 e^+ - e^- 湮灭到强子以及电子-反中微子湮灭到强子的截面.) 正如我们在20.5节看 到的, 在它所得到的贡献中, 行为趋于 $q^2(x^{-6}$ 的Fourier变换)的来自于算符1, 行为趋于 q^{-2} 的来自 于算符 $F^{\mu\nu}_{\alpha}F_{\alpha\mu\nu}$, 行为趋于 q^{-4} 的来自于4费米子算符, 以此类推. (例如, 算符 $F^{\mu\nu}_{\alpha}F_{\alpha\mu\nu}$ 的贡献来自 于图20.3那样的图, 其中流经泡沫图链的动量远小于q.)量纲分析则告诉我们, 还要给那些与动量 相关的因子乘上正比于 Λ^0 , Λ^4 , Λ^6 ...的真空矩阵元.但是, 如果我们用来计算Feynman图的跑动 耦合定义在标度 μ , 而当标度 $\mu \gg \Lambda$ 时, 耦合常数会很小, 这时, 根据方程(18.7.7)

$$\Lambda^{2} = \mu^{2} \exp\left(\frac{12\pi}{(33 - 2n_{f})\alpha_{s}(\mu)}\right) , \qquad (20.7.18)$$

其中 n_f 是质量远小于 ν 的夸克味数目.而在算符积展开中,量纲d > 0的算符所给出的贡献与耦合 常数的相关性是

$$\Lambda^d \propto \exp\left(\frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu)}\right) \ . \tag{20.7.19}$$

在量子色动力学中, 微扰论给出的是 $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ 的幂级数而不是g的幂级数, 所以我们应该将方程(20.7.1)和(20.7.3)写成 α_s 的形式:

$$F(\alpha_s) = \sum_n f_n \alpha_s^n , \qquad (20.7.20)$$

$$\alpha_s F(\alpha_s) = \int_0^\infty \exp(-z/\alpha_s) B(z) \,\mathrm{d}z \;. \tag{20.7.21}$$

在Π^{μν}中出现了与耦合常数的相关性为(20.7.19)的项, 这表明*B*(*z*)必在如下的位置有奇点(不一定 是极点):

$$z_1 = \frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)} \ . \tag{20.7.22}$$

这些奇点处在正实轴上,这使得积分(20.7.21)有歧义.因此我们无法用Borel变换处理量子色动力 学中的低能效应.

虚动量很小的图妨碍了微扰论的使用,但这显然不是什么新鲜事.正如我们在20.2节看到的, 算符积展开的全部要点就在于将每条线都携带大动量的那部分Feynman图分离出来,在渐进自由 的理论中,这部分Feynman图可以通过微扰论进行计算,而对于剩下的图,流经Feynman图的动量 很小,这部分图在渐进自由理论中无法通过微扰论计算.

附录 动量流: 一般情况

在这个附录中, 我们将在一般的可重整理论中考察振幅的渐进行为, 更确切一些, 是振幅 的两条或多条外线的动量变得很大时的渐进行为, 在考察范围内的算符由任意多个场因子和场 导数构成, 但它的量纲至多为N.为了处理这样的问题, 我们还得引入比20.1节和20.2节更复杂 的符号约定.我们用字母ℓ, ℓ'来标记进入或离开的特定种类外线*i*的集合, 这些外线可能属于整 个Feynman图, 也可能只是部分Feynman图的外线. 字母*k*, *k*′则用来标记该线4-动量*k*_i的集合, 它 们要满足条件: 它们的和为某个固定的值*p*. 振幅Γ_{ℓℓ} 是入线为集合ℓ而出线为集合ℓ'的所有图之和, 其中入线携带动量*k*, 出线携带动量*k*′, 并且集合ℓ的裸传播子也要计算进来, 但无需考虑集合ℓ'的 传播子.

援引12.1节的幂次计数定理^[3], 我们可以证明, 若k阶动量仅流经某个子图, 并假定该子图有外 线 $\ell n \ell''$, 那么这部分积分区域给 $\Gamma_{\ell \ell'}$ 的贡献是 $k^{d(\ell,\ell'')}$ 阶的, 其中, $d(\ell,\ell'')$ 是这一子图的量纲(按照质 量或动量的幂次计数):

$$d(\ell, \ell'') = 4 - \sum_{i \in \ell, \ell''} (1 + s_i) - \sum_{i \in \ell} (2 - 2s_i) .$$
(20.A.1)
(方程(20.A.1)中的最后一项来自于集合 *l*中的外线传播子.) 将方程(20.A.1)改写成如下的形式将 是方便的:

$$d(\ell, \ell') = 4 - 4n(\ell) - N(\ell') + N(\ell) , \qquad (20.A.2)$$

其中 $n(\ell)$ 是集合 ℓ 中线的数目, 而 $N(\ell)$ 是这些线所代表的场的总量纲:

$$n(\ell) \equiv \sum_{i \in \ell} 1$$
, $N(\ell) \equiv \sum_{i \in \ell} (s_i + 1)$. (20.A.3)

这里的 s_i 是i类线的自旋,按照12.3节所用的方法进行计数: i类场的量纲是 $1 + s_i$,而这种场的裸传播子会趋于 k^{-2+2s_i} .(对于标量场和规范玻色子, $s_i = 0$;若是自旋1/2粒子,则 $s_i = 1/2$.)

将这些子图对应的渐进行为考虑在内后,我们希望证明,当 $k \to \infty$ (所有分量一起趋于无穷,即在任意方向上都趋于无穷),而k'和p保持不变,在微扰论的每一阶, $\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p)$ 的渐进行为有如下的形式

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) \to \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k) F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) + o\left(k^{4-4n(\ell)+N(\ell)-N}\right) , \qquad (20.A.4)$$

其中要求和的算符 \mathcal{O} 要满足量纲 $N(\mathcal{O}) \leq N$;函数 $U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k)$ 的阶为 $k^{4+N(\ell)-4n(\ell)-N(\mathcal{O})}$;而 $o(k^{A})$ 则代表 比 k^{A} 更快趋于零(至少要快一个因子1/k)的项.

为了分离出量纲 $\leq N$ 的算符的贡献, 我们定义"*N*-不可约"振幅 $I_{\ell\ell'}^N(k,k',p)$, 组成 $I_{\ell\ell'}^N(k,k',p)$ 的 图属于 $\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p)$, 但是对于 I^N 中的图, 我们无法通过剪断任意一组 $N(\ell'') \leq N$ 的内线 ℓ'' 使得集 合 ℓ 中的线与集合 ℓ' 中的线相分离.反过来讲, 组成 $\Gamma - I^N$ 的图就可以用这种方式分割, 它可以写成

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) - I^N_{\ell\ell'}(k,k',p) = \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk'' I^N_{\ell\ell''}(k,k'',p) \Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p) , \qquad (20.A.5)$$

其中 $\sum_{\ell''}^{(N)}$ 是指对 $N(\ell'') \leq N$ 的粒子线集合进行求和,而 $\int dk''$ 是对集合 ℓ'' 中的4-动量分量积分,但 这些动量还要服从和为p的约束.

核 $I_{\ell\ell''}^{N}(k,k'',p)$ 的渐进行为远比 $\Gamma_{\ell\ell''}(k,k'',p)$ 的渐进行为简单得多. 当k''和p保持不变而 $k \rightarrow \infty$ 时, 主导核的渐进行为是每条内线均携带k阶动量的那部分积分区域, 它给出的渐进行为 是 $k^{d(\ell,\ell'')}$, 这是因为, 如果只有一个子区域携带这样大的动量, 那么这个子区域必须通过线 族 ℓ''' 与图的其余部分桥接, 而 ℓ''' 显然有 $N(\ell'') > N \ge N(\ell'')$, 在 $k \rightarrow \infty$ 时, 它至少要小一个因 子 $k^{N(\ell'')-N-1}$. 因此, $I_{\ell\ell''}^{N}$ 对k''或p的任意分量的微分会使得它的渐进行为降低至 $k^{d(\ell,\ell'')-1}$. 但是, 仅当 $d \le N - N(\ell'') + 1$ 时, 微分d次才会将渐进行为降低至 $k^{d(\ell,\ell'')}$, 对于更高阶的导数, 由于导数 全部作用携带k''阶或p阶动量的线上, 上面所说的通过总量纲大于N的线族 ℓ''' 连接的图会给出更 大的贡献. 因此, 为了将带有场导数的算符给出的贡献也计算在内, 我们可以将 I^N 的行为写成

$$I_{\ell\ell''}^N(k,k'',p) = \sum_{\nu:d_\nu + N(\ell'') \le N} I_{\ell\ell''\nu}^N(k) P_{\ell''\nu}(k'',p) + o\left(k^{d(\ell,\ell'') - N + N(\ell'')}\right) , \qquad (20.A.6)$$

其中 $P_{\ell'\nu}(k'',p)$ 是阶为 d_{ν} 的齐次多项式的完备集,它的变量是 $n(\ell'')$ 个动量k''和p,而 $I^{N}_{\ell\ell''\nu}(k)$ 仅是k的函数,它在 $k \to \infty$ 时阶为 $k^{d(\ell,\ell''-d)}$.

我们现在还不能在方程(20.A.5)中使用方程(20.A.6),这是因为k"为k阶的这部分积分区域 对k"的积分有一个很重要的贡献.为了处理这个困难,我们使用数学归纳法:假定直到微扰论的某 个给定阶,方程(20.A.4)都是成立的,然后在方程(20.A.5)的右边使用它,由此我们就可以得到Γ到 微扰论下一阶的渐进行为.我们将方程(20.A.5)改写成如下形式

$$\Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) = I_{\ell\ell'}^{N}(k,k',p)
+ \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk'' I_{\ell\ell''}^{N}(k,k'',p) \left[\Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p) - \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U_{\mathcal{O}}^{\ell''}(k'') F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) \right]
+ \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) \sum_{\ell'':N(\ell'') \leq N} \int dk'' I_{\ell\ell''}^{N}(k,k'',p) U_{\mathcal{O}}^{\ell''}(k'') .$$
(20.A.7)

根据方程(20.A.4), 当 $k'' \to \infty$ 时, 方程(20.A.7)右边第二项中的方括号项会比(k'')^{4-4 $n(\ell'')+N(\ell'')-N$} 为零, 所以, 在乘上阶为 $\nu \le N - N(\ell'')$ 的多项式 $P_{\ell''\nu}(k'')$ 后, 这个因子会比(k'')^{4-4 $n(\ell'')$}更快地趋于 零, 因此对k''的4($n(\ell'') - 1$)个独立分量进行积分会给出有限值.^{*} 如此一来, 我们就可以在这一项 中使用方程(20.A.6), 得到

$$\begin{split} \Gamma_{\ell\ell'}(k,k',p) &\to \sum_{\nu:d_{\nu}+N(\ell') \leq N} I^{N}_{\ell\ell\ell'\nu}(k) P_{\ell'\nu}(k',p) \\ &+ \sum_{\ell''}^{(N)} \sum_{\nu:d_{\nu}+N(\ell'') \leq N} I^{N}_{\ell\ell''\nu}(k) \int \mathrm{d}k'' P_{\ell''\nu}(k'',p) \\ &\times \left[\Gamma_{\ell''\ell'}(k'',k',p) - \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'') F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) \right] \\ &+ \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} F_{\mathcal{O},\ell'}(k',p) \sum_{\ell''}^{(N)} \int \mathrm{d}k'' I^{N}_{\ell\ell''}(k,k'',p) U^{\ell''}_{\mathcal{O}}(k'') , \qquad (20.A.8) \end{split}$$

修正项要比写出来的项小一个1/*k*因子. (当然, 仅当 $N(\ell') \leq N$ 时, 方程(20.A.8)右边的第一项才会 出现.)

现在,对于满足 $d_{\nu} + N(\ell) \leq N$ 的每个 ℓ 值和 ν 值,存在算符O,它有 ℓ 中的线所对应的场因子构成并有 d_{ν} 个导数,这使得在微扰论的零阶,若算符O携带入动量p,而外线 ℓ 携带动量k,那么顶角函数就是多项式 $P_{\ell\nu}(k,p)$.这样,对于重整化算符 $O_R = \sum_{O'} Z_{O,O'}O'$,完整的顶角函数是

$$F_{\mathcal{O},\ell}(k,p) = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'} \left\{ \delta_{\ell_{\mathcal{O}'},\ell} P_{\ell_{\mathcal{O}'}}(k,p) + \int \mathrm{d}k' P_{\ell_{\mathcal{O}'}\nu_{\mathcal{O}'}}(k',p) \Gamma_{\ell_{\mathcal{O}'}\ell}(k',k,p) \right\} , \qquad (20.A.9)$$

其中ℓ₀和ν₀分别标记算符0中的场类型以及时空导数.由此我们可以看到,如果

$$U_{\mathcal{O}}^{\ell}(k) = \sum_{\mathcal{O}'}^{(N)} I_{\ell\mathcal{O}'}^{N}(k) \left[Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}^{-1} - \int dk'' U_{\mathcal{O}'}^{\ell}(k'') P_{\mathcal{O}'}(k'') \right] + \sum_{\ell''}^{(N)} \int dk'' I_{\ell\ell''}^{N}(k,k'') U_{\mathcal{O}''}^{\ell}(k'') , \qquad (20.A.10)$$

^{*}对于方程(20.A.7)右边第二项中的积分, 幂次计数告诉我们, 在所有k"一起趋于无穷的积分区域内, 这个积分是收 敛的, 尽管如此, 却遗漏了这样的可能性: 当n(ℓ") ≥ 3时, 子积分可能发散. 由于这个原因, 除了20.2节所讨论的特殊情 况外, 这个附录中所给出的讨论并不能作为算符积展开的一个证明, 在20.2节, 我们考察的是只有两个外线动量趋于无 穷的特殊情况, 并且我们在幂级数中寻找的项对应的是场的二次型构成的算符.

那么方程(20.A.4)就是满足的,在方程(20.A.10)中我们使用了简写

$$I_{\ell\mathcal{O}}(k) \equiv I_{\ell\,\ell_{\mathcal{O}}\,\nu_{\mathcal{O}}}(k) , \qquad P_{\mathcal{O}}(k) \equiv P_{\ell_{\mathcal{O}}\,\nu_{\mathcal{O}}}(k) . \qquad (20.A.11)$$

(我们忽略掉了 $\Gamma_{\ell_{\mathcal{O}'}\ell'}$ 对p的依赖性,原因与20.2节中的理由相同:无论k''的量级是否与k相同, p与k相比总是可以被忽略的.)我们定义重整化常数 $Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}$,使得在重整化点 $k(\mu), p(\mu)$ 处,函数 $F_{\mathcal{O},\ell}(k(\mu), p(\mu))$ 的值与没有相互作用时的值相同,即为 $\delta_{\ell\ell_{\mathcal{O}}}P_{\mathcal{O}}(k(\mu), p(\mu))$:

$$\delta_{\ell\ell_{\mathcal{O}}} P_{\mathcal{O}}(k(\mu), p(\mu)) = F_{\mathcal{O},\ell}(k(\mu), p(\mu)) = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}$$

$$\times \left\{ \delta_{\ell_{\mathcal{O}'},\ell} P_{\ell\nu_{\mathcal{O}'}}(k(\mu), p(\mu)) + \int \mathrm{d}k' P_{\ell_{\mathcal{O}'}\nu_{\mathcal{O}'}}(k', p(\mu)) \Gamma_{\ell_{\mathcal{O}'}\ell}(k', k(\mu), p(\mu)) \right\} . \tag{20.A.12}$$

当 Γ = 0时, 它有唯一解Z = 1(唯一性是因为, 对于给定的线族,我们假定这个多项式是线性独立的), 所以, 通过延拓, 对于某个有限范围内的耦合常数, 方程(20.A.12)会有唯一解. 这样一来, 对于 一般算符积展开(20.A.4)中的系数函数 $U^{\ell}_{\mathcal{O}}(k)$, 方程(20.A.10)给出了一个递归定义.

习题

1. 考察费米场 ψ 与标量场 ϕ 有相互作用的理论,相互作用的形式为 $\bar{\psi}\psi$ 以及 ϕ^4 . 针对 $\bar{\psi}(x)\psi(0)$ 的算符积展开,列举出系数函数(通过微扰论判断)奇异且在 $x \to 0$ 时不为零的算符. 并描述你如何将这些系数函数计算至一圈阶.

2. 考察有N个无质量夸克的量子色动力学,并将标量夸克双线性型和赝标量夸克双线性的谱函数 定义成

$$\begin{split} \sum_{N} \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \lambda_{\alpha} \psi(0) | \text{VAC} \rangle \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \lambda_{\beta} \psi(0) | \text{VAC} \rangle^{*} \\ &= (2\pi)^{-3} \theta(p^{0}) \rho_{\alpha\beta}^{S}(-p^{2}) , \\ \sum_{N} \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \gamma_{5} \lambda_{\alpha} \psi(0) | \text{VAC} \rangle \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \gamma_{5} \lambda_{\beta} \psi(0) | \text{VAC} \rangle^{*} \\ &= (2\pi)^{-3} \theta(p^{0}) \rho_{\alpha\beta}^{P}(-p^{2}) , \end{split}$$

其中 λ_{α} 是无迹 $N \times N$ 厄米矩阵的完备集,它的归一化满足Tr $(\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}) = 2\delta_{\alpha\beta}$. $\rho_{\alpha\beta}^{S}(\mu^{2}) \pi \rho_{\alpha\beta}^{A}(\mu^{2})$ 的 线性组合所满足的谱函数求和规则是什么?

3. 从Compton散射公式(8.7.7)和(8.7.38)中推导出部分子模型中的(20.6.8).

4. 列举出量子色动力学中所有扭度为4的规范不变且无迹的对称张量.

5. 在相互作用为 $-g\phi^4/24$ (其中g > 0)的无质量标量场论中,你预期函数(20.7.3)的重整化子奇点 会落在复平面的何处?

参考文献

[1] K. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969).

- [2] W. Zimmerman, in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, S. Deser, H. Pendleton, and M. Grisaru编辑, (MIT Press, Cambridge, 1970).
- [3] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1960).
- [4] C. Bernard, A. Duncan, J. LoSecco, and S. Weinberg, Phys. Rev. D12, 792 (1975).
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 18, 507 (1967). 对于一般情况, 参考文献4.
- [6] K. Kawarabayashi and M. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.* 16, 225 (1966); Riazuddin and Fayyazuddin, *Phys. Rev.* 147, 1071 (1966).
- [7] M. Ademollo, G. Veneziano, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 22, 83 (1969).
- [8] J. F. Donoghue and E. Golowich, *Phys. Rev.* **D49**, 1513 (1994).
- [9] 在1968年维也纳的"罗切斯特"会议上报告了这个结果,发表于E. D. Bloom *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969); M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935 (1969).
- [10] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1969).
- [11] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. 23, 1415 (1969); Photon-Hadron Interactions (Benjamin, New York, 1972).
- [12] C. G. Callan and D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 156 (1949). 读者要注意的是, Callan和Gross在那里所用的符号ω是我们这里所用的2/ω.
- [13] N. Christ, B. Hasslacher, and A. H. Mueller, *Phys. Rev.*, **D6**, 3543 (1972).
- [14] D. Gross and S. Treiman, Phys. Rev. D4, 1059 (1971).
- [15] G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B126, 298 (1972).
- [16] H. Georgi and H. D. Politzer, *Phys. Rev.* D9, 416 (1974).
- [17] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.* D9, 980 (1974).
- [18] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* 85, 631 (1952).
- [19] 参看G. N. Hardy, Divergent Series (Oxford University Press, Oxford, 1949).
- [20] L. N. Lipatov, Leningrad Nuclear Physics Institute report, 1976 (未发表); Proceedings of the XVIII International Conference on High Energy Physics at Tbilisi, 1976.
- [21] G. 't Hooft, in The Whys of Subnuclear Physics Proceedings of th 1977 Erice Summer School, A. Zichichi编辑(Plenum, New York, 1978). 关于重整化子和高阶微扰论的论文集,可参看Large Order Behavior of Perturbation Theory, J. C. Le Guillou和J. Zinn-Justin编辑(North-Holland, Amsterdam, 1990). 关于红外重整化子的进一步工作,参看A. H. Mueller, Phys. Lett. B 308, 335 (1993); Nucl. Phys. B250, 327 (1995); A. Duncan and S. Pernice, Phys. Rev. D 51, 1956 (1995), 以及那里引用的文章.

[22] B. Lautrup, Phys. Lett. **76B**, 109 (1977).

第 21 章 自发破缺的规范对称性

破缺的对称性会给出自旋为零的无质量粒子,当这个定理在1961年第一次被发现时,^[1] 它 看上去反而阻碍了寻找自然中的破缺对称性.在此之后没有几年,数位学者就注意到了这个定 理的一个例外,而我们在19.2节也略微提到过:如果破缺的对称性是定域对称性而非整体对称 性,那么Goldstone玻色子就不会出现.^[2] 取代Goldstone玻色子,破缺定域对称性所对应的自由 度会作为矢量粒子的零螺度态呈现出来,而矢量粒子也借此获得了质量.这一现象现在一般被 称作Higgs机制,但在这个机制刚提出的时候,没有一个真实理论用到它,这大概是因为,在20世 纪60年代中期, π介子是近似对称性自发破缺的Goldstone玻色子变得非常明晰,因而也就不在"如 何避免Goldstone玻色子"这个方向上付诸努力.然而,在这之后不久,就如何理解基本粒子的弱相 互作用和电磁相互作用,定域对称性自发破缺提供了自然的框架.

21.1 幺正规范

我们在第19章看到, 若一个理论的整体对称群G破缺到子群H, 对应每个独立的破缺对称性, 就会有一个无质量的"Goldstone"玻色子, 换句话说, 对于G的每个独立的破缺对称性生成元 t_{α} , 无 自旋实场 $\phi_n(x)$ 的质量矩阵 M_{nm}^2 就会有一个本征值为零的本征矢 $\sum_m(t_{\alpha})_{nm}v_m$. (在我们这里所考察的情况中, Goldstone玻色子被包含在无自旋基本粒子中, 这些无自旋基本粒子由拉格朗日量中的标量场或赝标量场 ϕ_n 表示; 我们会在21.4节处理更一般的情况.) 我们还可以看到, 通过对场施 加一个G变换 $\gamma^{-1}(x)$

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}^{-1}(x)\phi_m(x) , \qquad (21.1.1)$$

我们可以转离这些Goldstone模式,使得新场与Goldstone方向正交*

$$0 = \sum_{nm} \tilde{\phi}_n(x) (t_{\alpha})_{nm} v_m , \qquad (21.1.2)$$

其中 v_n 是真空期望值, $v_n \equiv \langle \phi_n(0) \rangle_{VAC}$. 在对场做旋转使得它们满足方程(21.1.2)后, Goldstone玻 色子作为 $\Gamma(x)$ 中的时空相关参量重新浮现出来. 这个处理的要点在于,既然拉格朗日量在 $\gamma(x)$ 为 常数矩阵的变换(21.1.1)下不变,那么除非有导数作用 $\gamma(x)$ 上, 对 $\gamma(x)$ 的其它依赖关系都可以被扔 掉.

另一方面,如果拉格朗日量不仅在常数G变换下不变,并且对于依赖时空位置的G变换也是不变的,那么变换(21.1.1)就是该理论的一个真实对称性,并且拉格朗日量对 $\gamma(x)$ 的所有依赖关系都可以扔掉.这是一种规范选择,确定这个规范是通过给 $\tilde{\phi}(x)$ 附加条件而非给规范场本身附加条件. (例如,在带电标量场 $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$ 的电动力学中,我们可以通过附加条件 $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 来

^{*}在这里,我们在对称代数的可约实表示或不可约实表示下进行处理,对于这样的表示,矩阵it_α是实的.我们会在后 面描述如何转换到复表示.

选择Lorentz规范或Coulomb规范, 但是, 我们同样可以通过给 ϕ 附加条件来选择规范, 例如我们可 以通过令 ϕ 是实场来选择规范, 换句话说, 我们可以通过将2-矢量{Re ϕ , Im ϕ }旋转至1-方向来选择 规范.) 在方程(21.1.2)所定义的规范下, 该理论显然没有像类时规范玻色子这样几率为负的自由 度, 所以这个规范通常被称为幺正规范^[3a]. 更一般地讲, 幺正规范会清楚地告诉我们该理论所包 含的物理粒子是什么.

方程(21.1.2)表明在幺正规范下不存在Goldstone玻色场.既然这个理论是规范不变的,这意味着,无论我们选择的规范是什么,物理的Goldstone玻色子总是不存在的.矢量玻色子又会如何呢?如果*φ_n*是基本正则归一化标量场,拉格朗日量中将会包含如下的项

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\frac{1}{2} \sum_{n} \left(\partial_{\mu} \tilde{\phi}_{n} - i \sum_{m,\alpha} t^{\alpha}_{nm} A_{\alpha\mu} \tilde{\phi}_{m} \right)^{2} , \qquad (21.1.3)$$

其中 t^{α} 取遍规范群G的所有生成元. (从现在起我们将扔掉 ϕ 上的波浪符,在本节的剩余部分我们默认处于幺正规范下.) 我们假定对称性G被 ϕ_n 的真空期望值 v_n 破缺,为了看到粒子谱的性质,我们定义偏移场 ϕ' :

$$\phi_n \equiv v_n + \phi'_n \ . \tag{21.1.4}$$

(在某些情况下, 将方程(21.1.2)和(21.1.4)中的*v*_n取成树级近似下的真空期望值将是方便的.为 了给出有用的微扰论, *v*_n只需在最低阶与真正的真空期望值保持一致.)将方程(21.1.3)展开 至*ϕ*′和*A*的二阶, 我们有:

$$\mathscr{L}_{\phi,\text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_{n} \left(\partial_{\mu} \phi'_{n} - i \sum_{m,\alpha} t^{\alpha}_{nm} A_{\alpha\mu} v_{m} \right)^{2} .$$
(21.1.5)

利用方程(21.1.2), 我们看到φ'-A交叉项为零, 这给出

$$\mathscr{L}_{\phi,\text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_{n} \partial_{\mu} \phi'_{n} \partial^{\mu} \phi'_{n} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu^{2}_{\alpha\beta} A_{\alpha\mu} A^{\mu}_{\beta} , \qquad (21.1.6)$$

其中

$$\mu_{\alpha\beta}^2 \equiv -\sum_{nm\ell} t_{nm}^{\alpha} t_{n\ell}^{\beta} v_m v_\ell . \qquad (21.1.7)$$

结合Yang-Mills拉格朗日量中的二次项 $-\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F^{\mu\nu}_{\alpha}$,我们看到矢量粒子拥有质量矩阵 $\mu^2_{\alpha\beta}$.在我们的符号约定中,生成元 t^{α}_{nm} 正比于规范耦合常数,所以方程(21.1.7)给出的矢量玻色子质量也正比于这些耦合常数.

我们来看一下 $\mu_{\alpha\beta}^2$ 的代数性质.既然 t_{nm}^{α} 是纯虚的且是反对称的(因而也是厄米的),矩阵 $\mu_{\alpha\beta}^2$ 就 是实对称正定矩阵.另外,如果生成元的某个特定实线性组合 $\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}$ 未破缺,那么

$$\sum_{\alpha,m} c_{\alpha}(t_{\alpha})_{nm} v_m = 0 , \qquad (21.1.8)$$

在这一情况下, Kibble注意到,^[2]方程(21.1.7)给出

$$\sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_{\beta} = 0 . \qquad (21.1.9)$$

即, 对于每个未破缺的对称性, 我们仍然有一个无质量规范玻色子. 逆命题同样是成立的; 从方程(21.1.7)我们可以看到, 对于任意的实常数 c_{α}

$$\sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_{\alpha} c_{\beta} = \sum_n \left(\sum_{\alpha,m} c_{\alpha} \cdot i t_{nm}^{\alpha} v_m \right)^2 \ge 0 , \qquad (21.1.10)$$

而上式仅当c_α满足方程(21.1.8)时才会为零.

特别地,如果只有一个未破缺的对称性 $\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}$,那么一般规范场可以写成

$$A^{\mu}_{\alpha} = c_{\alpha}A^{\mu} + \cdots , \qquad (21.1.11)$$

其中"····"代表的是质量肯定不为零的规范场的线性组合, 而 c_{α} 是 t_{α} 在这个未破缺生成元q中的系数,

$$q = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha} , \qquad (21.1.12)$$

这使得场 A_{μ} 在质量项 $\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{2}A_{\alpha}^{\mu}A_{\mu\beta}$ 会有零系数.为了使 $\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})^{2}$ 在规范场拉格朗日 量动能项 $\frac{1}{4}\sum_{\alpha}(\partial_{\mu}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\mu})^{2}$ 中的系数拥有正则值1, c_{α} 也必须归一化

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^2 = 1 . (21.1.13)$$

注意到q是与A_µ耦合的荷,也就是说

$$\sum_{\alpha} t_{\alpha} A^{\mu}_{\alpha} = q A^{\mu} + \cdots , \qquad (21.1.14)$$

其中"····"依旧指代包含有质量规范场的项. 在21.3节研究电弱理论时, 我们将用到这些一般性的 结论.

这里所导出的关于标量场的结果构成了规范群的实表示,但是它们可以直接转换成符合复表示的形式.我们在19.6节看到,若规范群某个表示有厄米生成元*T*_α,那么按照该表示变换的复标量场χ(*x*)可以写成一组实场

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \chi(x) \\ \operatorname{Im} \chi(x) \end{pmatrix} , \qquad (21.1.15)$$

这组实场构成该规范群的实表示,生成元为

$$i t^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} T^{\alpha} & -\operatorname{Re} T^{\alpha} \\ \operatorname{Re} T^{\alpha} & -\operatorname{Im} T^{\alpha} \end{pmatrix} .$$
(21.1.16)

将方程(21.1.15)和(21.1.16)代入(21.1.7)就给出了矢量玻色子质量矩阵

$$\mu_{\alpha\beta}^{2} = \operatorname{Re}\left(\langle\chi\rangle_{\operatorname{VAC}}^{\dagger}, T_{\alpha} T_{\beta} \langle\chi\rangle_{\operatorname{VAC}}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle\chi\rangle_{\operatorname{VAC}}^{\dagger}, \{T_{\alpha}, T_{\beta}\}\langle\chi\rangle_{\operatorname{VAC}}\right) .$$
(21.1.17)

现在我们来更细致的考察矢量场传播子.将Yang-Mills拉格朗日量中的二次项考虑进来,在总的拉格朗日量中,A的二次项部分是

$$-\frac{1}{4}\sum_{\alpha}(\partial_{\lambda}A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}A_{\alpha\lambda})^{2} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{2}A_{\alpha\lambda}A_{\beta}^{\lambda}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}A_{\alpha}^{\nu}\mathscr{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial)A_{\beta}^{\lambda} + \pounds \oplus \mathfrak{B}, \qquad (21.1.18)$$

其中

$$\mathscr{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) = \delta_{\alpha\beta} \Big[\eta_{\nu\lambda} \Box - \partial_{\nu} \partial_{\lambda} \Big] - \mu_{\alpha\beta}^2 \eta_{\nu\lambda} . \qquad (21.1.19)$$

简单起见, 假定所有规范对称性都破缺了, 这使得 $\mu^2_{\alpha\beta}$ 没有零本征值. 根据9.4节所描述的一般规则, 动量空间中的规范场传播子是

$$\Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda} = -(\mathscr{D}^{-1})_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\mathbf{i}k) = \left[(k^2 + \mu^2)^{-1} (\eta_{\nu\lambda} + \mu^{-2}k_{\nu}k_{\lambda}) \right]_{\alpha\beta}.$$
(21.1.20)

由于有 $k_{\nu}k_{\lambda}$ 项, 传播子有渐进行为 $\Delta(k) \sim O(k^0)$, 这使得我们无法使用幂次计数讨论来证明可重整性. 幸运的是, 正如我们在下一节所看到的, 有另一种规范, 在这种规范中可重整性是显然的, 不过这样做的代价是遮掩了理论所含有的粒子细节.

值得注意的是: 在零规范耦合的极限下, 物理频谱中突然出现了Goldstone玻色子, 但是物理 矩阵元在这一极限下完全是连续的. 这是因为, 在幺正规范下, 规范玻色子在零规范耦合时没有完 全退耦. 考察散射过程*A*+*B*→*C*+*D*的矩阵元, 其中*A*和*C*属于规范代数的某个表示, 而*B*和*D*则 属于另一个不同的表示. 交换矢量玻色子给这个*S*-矩阵元的贡献是

$$S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \langle C|J_N^{\nu}_{\alpha}|A\rangle \Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) \langle D|J_N^{\lambda}_{\beta}|B\rangle , \qquad (21.1.21)$$

其中 $k = p_A - p_C = p_D - p_B$, $J_N^{\nu}_{\alpha}$ 是与规范玻色子相耦合的流, 它的下标N是提醒我们要在这一规范下省略Goldstone玻色子极点项, 所以在零规范耦合的极限下, 方程(21.1.21)中幸存的项是那些包含矩阵 μ^{-2} 的项, 而它在这一极限下会变得奇异. 因此对于零规范耦合, *S*-矩阵元是

$$S_{CD,AB} \to i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) k_\nu k_\lambda (\mu^{-2})_{\alpha\beta} \langle C|J_{N_\alpha}^\nu|A\rangle \frac{1}{k^2} \langle D|J_{N_\beta}^\lambda|B\rangle .$$
(21.1.22)

流中的规范耦合常数被矩阵µ²中的规范耦合常数抵消了.

现在我们来比较它与交换Goldstone玻色子给出的贡献. 当规范耦合为零时,存在一组与生成元 t_{α} 相对应的Goldstone玻色子 B_{α} (简单起见,假定所有规范对称性都破缺了),它在拉格朗日量的动能项是 $-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}\partial^{\mu}\phi_{\beta}\sum_{n}Z_{\alpha n}Z_{\beta n}$,其中 $Z_{\gamma n}$ 是Goldstone玻色子 B_{α} 在无自旋场 ϕ_{n} 的分量,由方程(19.2.39)定义.为了使Goldstone玻色场正则归一化,我们还要有

$$\sum_{n} Z_{\alpha n} Z_{\beta n} = \delta_{\alpha \beta} . \qquad (21.1.23)$$

根据方程(19.2.49), Goldstone玻色子与流 $J_{N_{\beta}}^{\mu}$ 相耦合, 耦合常数为 $F_{\alpha\beta}^{-1}$, 而 $F_{\alpha\beta}$ 由方程(19.2.38)定义, 它是生成元 t_{α} 所对应的Goldstone玻色子与流 $J_{N_{\beta}}^{\nu}$ 的耦合. 因此交换Goldstone玻色子会给出散 射矩阵元

$$S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) k_{\nu} k_{\lambda} F_{\alpha\gamma}^{-1} F_{\beta\gamma}^{-1} \langle C | J_{N\alpha}^{\nu} | A \rangle \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\beta}^{\lambda} | B \rangle .$$
(21.1.24)

但方程(19.2.40), (21.1.7)和(21.1.23)所给出的矢量玻色子质量矩阵是

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_n F_{\alpha\gamma} Z_{\gamma n} F_{\beta\delta} Z_{\delta n} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} , \qquad (21.1.25)$$

所以, 在规范玻色子耦合为零的极限下, 交换规范玻色子的矩阵元(21.1.22)与交换Goldstone玻色 子的矩阵元(21.1.24)相同. 这个讨论完全可以颠倒过来, 在零规范耦合下要求连续可以用来推导规 范玻色子质量公式, 并且, 即使其它所有耦合都很强, 这个结论依旧是成立的.

21.2 **可重整**ξ-规范

在1971年, 't Hooft^[4]证明了在自发破缺的规范理论中可以用另一种规范计算路径积分, 在这种规范下, 矢量玻色子传播子在动量 $k \to \infty$ 时以 k^{-2} 的速度趋于零, 这使得这些理论通过了12.2节描述的可重整性幂次计数检测.这里我们将描述另一类很大的规范, 这类规范由任意常数 ξ 参数 化, 这类规范是有Fujikawa, Lee和Sanda^[5]随后引入的.

在一般规范下, 拉格朗日量中关于标量场的动能项(21.1.3) 会包含交叉项

$$\mathrm{i}\sum_{nm\alpha}\partial_\mu\phi_n'\,t_{nm}^\alpha A_\alpha^\mu v_m\ ,$$

其中 v_m 是 ϕ_m 的真空期望值, 而 ϕ'_n 是方程(21.1.4)定义的偏移场. 在幺正规范下, 由于规范条件(21.1.2), 该项为零. 我们在这里采用另一个方法, 这个方法类似于15.5节和15.6节的方法. 在路径积分中引入泛函B[f], 其中

$$B[f] = \exp\left(\frac{-i}{2\xi} \int d^4x \sum_{\alpha} f_{\alpha} f_{\alpha}\right) . \qquad (21.2.1)$$

这等价于给拉格朗日量加上规范固定项

$$\mathscr{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{\alpha} f_{\alpha} f_{\alpha} . \qquad (21.2.2)$$

不像15.5节那样取 $f_{\alpha} = \partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha}$,我们现在将规范固定函数取成

$$f_{\alpha} = \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha} - \mathrm{i}\,\xi(t_{\alpha})_{nm} \phi'_{n} v_{m} , \qquad (21.2.3)$$

这个规范固定函数会使得前面说的(21.1.3)中的交叉项被方程(21.2.2)中的交叉项所抵消. 幺正规 范现在只是一个特殊情况; 当 $\xi \to \infty$ 时, 规范固定函数(21.2.1)在满足幺正规范条件(21.1.2)的 ϕ '值 处变得无限尖锐. $\xi \to 0$ 的极限给出了另一个特殊的规范; 这时规范固定泛函的峰值处在满 足Landau规范条件 $\partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha} = 0$ 的规范场处.

我们同时给拉格朗日量中引入四次势-P(φ), 它服从规范不变性条件

$$\frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n} (t_\alpha)_{nm} \phi_m = 0 . \qquad (21.2.4)$$

当然,我们还得给拉格朗日量引入规范场项

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} F^{\mu\nu}_{\alpha} F_{\alpha\mu\nu} . \qquad (21.2.5)$$

这样, 规范场和标量场的总拉格朗日密度是

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{A,\phi} &\equiv \mathscr{L}_{A} + \mathscr{L}_{\phi} + \mathscr{L}_{gf} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} F^{\mu\nu}_{\alpha} F_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha\beta} (t^{\alpha}\phi)_{n} (t^{\beta}\phi)_{n} A^{\mu}_{\alpha} A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu}A^{\mu}_{\alpha}) (\partial_{\nu}A^{\nu}_{\alpha}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n} \partial_{\mu} \phi'_{n} \partial^{\mu} \phi'_{n} + \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha nm} (t_{\alpha}v)_{n} (t_{\alpha}v)_{m} \phi'_{n} \phi'_{m} \\ &- P(\phi) + i \sum_{\alpha nm} \partial_{\mu} \phi'_{n} (t_{\alpha})_{nm} \phi'_{m} A^{\mu}_{\alpha} + \pounds \Im \mathfrak{Y} \mathfrak{Y} \mathfrak{I} . \end{aligned}$$

$$(21.2.6)$$

正如我们在15.6节看到的,引入规范固定泛函B[f]同时要求引入鬼场 $\omega_{\alpha}(x)$,它的拉格朗日量 依赖于 f_{α} 的规范变换性质.在一般的规范变换下(其中 $\epsilon_{\alpha}(x)$ 是任意函数)

$$\delta A^{\mu}_{\alpha} = -\sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta} A^{\mu}_{\gamma} + \partial^{\mu} \epsilon_{\alpha} , \qquad (21.2.7)$$

$$\delta\phi_n = i \sum_{\alpha m} \epsilon_\alpha(t_\alpha)_{nm} \phi_m , \qquad (21.2.8)$$

我们有

$$\delta f_{\alpha} = \Box \epsilon_{\alpha} - \sum_{\beta \gamma} C_{\alpha \beta \gamma} \partial_{\mu} (\epsilon_{\beta} A^{\mu}_{\gamma}) + \xi \sum_{n \beta} (t_{\alpha} v)_{n} \epsilon_{\beta} (t_{\beta} \phi)_{n} .$$
(21.2.9)

根据15.6节的一般性结论,这给出鬼场拉格朗日量

$$\mathscr{L}_{\omega} = \omega_{\alpha}^{*} \left[\Box \omega_{\alpha} - \sum_{\beta \gamma} C_{\alpha \beta \gamma} \partial_{\mu} (\omega_{\beta} A_{\gamma}^{\mu}) + \xi \sum_{n \beta} (t_{\alpha} v)_{n} \omega_{\beta} (t_{\beta} \phi)_{n} \right] .$$
(21.2.10)

最后,如果理论中还有自旋;前费米子,那么还会有如下的可重整项

$$\mathscr{L}_{\psi} = -\bar{\psi}(\partial - i\mathcal{A}_{\alpha}t_{\alpha}^{(\psi)} + m_0 + \Gamma_n\phi_n)\psi , \qquad (21.2.11)$$

其中, $t_{\alpha}^{(\psi)}$ 是费米子的规范群生成元的矩阵表示(它包含了耦合常数因子), 而 m_0 和 Γ_n 是常数矩阵(一般而言, 它们是Dirac矩阵1和 γ_5 的线性组合), 它们满足规范不变条件

$$\left[t_{\alpha}^{(\psi)}, \gamma_4 m_0\right] = 0 , \qquad (21.2.12)$$

$$\left[t_{\alpha}^{(\psi)}, \gamma_4 \Gamma_n\right] + \sum_m (t_{\alpha})_{mn} \gamma_4 \Gamma_m = 0 . \qquad (21.2.13)$$

(因子 $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ 来自于定义 $\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma_4$, 仅当 $t^{(\psi)}_{\alpha}$ 中包含正比于 γ_5 的项时, 它才是相关的.) 15.5节 和15.6节中证明的一般性定理保证了, 只要*S*-矩阵元是从方程(21.2.6), (21.2.10)和(21.2.11)的和给 出的拉格朗日量中计算出来的, 那么它就与规范固定函数(21.2.3)中的参量ξ无关, 因此, 对于任意 的ξ, 它所给的结果与幺正规范所对应的ξ = ∞给出的结果相同.

为了导出所有这些场的传播子,我们需要拉格朗日量中场的二次项部分:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{QUAD}} &= -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\partial^{\mu} A^{\nu}_{\alpha} - \partial^{\nu} A^{\mu}_{\alpha}) (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\mu}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu^{2}_{\alpha\beta} A^{\mu}_{\alpha} A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha}) (\partial_{\nu} A^{\nu}_{\alpha}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n} (\partial_{\mu} \phi'_{n}) (\partial^{\mu} \phi'_{n}) - \frac{1}{2} \sum_{nm} M^{2}_{nm} \phi'_{n} \phi'_{m} \\ &- \bar{\psi} (\partial \!\!\!/ + m) \psi - \partial_{\mu} \omega^{*}_{\alpha} \partial^{\mu} \omega_{\alpha} - \xi \sum_{\alpha\beta} \mu^{2}_{\alpha\beta} \omega^{*}_{\alpha} \omega_{\beta} \\ &+ \hat{\Sigma} \bar{\Sigma} \Sigma \bar{\Psi}, \end{aligned}$$

$$(21.2.14)$$

其中 $\mu^2_{\alpha\beta}$ 是矢量玻色子质量矩阵(21.1.7):

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = -\sum_n (t^{\alpha}v)_n (t^{\beta}v)_n , \qquad (21.2.15)$$

而*M*²_{nm}和*m*是新的标量质量矩阵和新的费米子质量矩阵:

$$M_{nm}^{2} = \frac{\partial^{2} P(\phi)}{\partial \phi_{n} \partial \phi_{m}} \Big|_{\phi=v} - \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha} (t_{\alpha} v)_{n} (t_{\alpha} v)_{m} ,$$

$$m = m_{0} + \sum_{n} \Gamma_{n} v_{n} .$$
(21.2.16)

我们从方程(21.2.14)中看到, 鬼场的质量与规范相关, 它等于√ξ乘以相应的矢量玻色子的质量.

这些表达式给出了微扰论零阶中的粒子质量.到这一阶,真空期望值 v_n 正是多项式"势" $P(\phi)$ 的极小值点:

$$\left. \frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=v} = 0 \ . \tag{21.2.17}$$

另外, 我们在19.2节看到, 由方程(21.2.4)和(21.2.17)可以得出, 对于所有的α, 我们有

$$\sum_{m} \left. \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi=v} (t_{\alpha} v)_m = 0 .$$
(21.2.18)

由此可以得出,取代质量为零的Goldstone模式,方程(21.2.16)中的标量玻色子质量平方矩阵所拥 有的本征值等于 $\sqrt{\xi}$ 乘以非零的矢量玻色子质量.即,如果 $\mu_{\alpha\beta}^2$ 有一个本征值为 μ^2 的本征矢 c_β ,那 么 $\sum_{\beta} c_{\beta} t_{\beta} v$ 就是 M^2 的本征矢,而它的本征值是 $\xi \mu^2$:

$$\sum_{m} M_{nm}^2 \left(\sum_{\beta} c_{\beta} t_{\beta} v \right)_m = \xi \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_{\beta} (t_{\alpha} v)_n = \xi \mu^2 \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha} v \right)_n .$$
(21.2.19)

这样, M_{nm}^2 的其它本征矢都与这些本征矢正交, 因而与所有的 $t_{\alpha}v$ 正交, 所以这些本征矢以及相应的本征值与矩阵($\partial^2 P(\phi)/\partial \phi_n \partial \phi_m$)的本征矢及本征值相同. 我们看到, 在幺正规范 $\xi \to \infty$ 下, Goldstone玻色子质量变得非常大以至于脱离了这个理论, 而其它的玻色子质量同往常一样.

传播子可以用通常的规则进行计算:如果拉格朗日量中的自由粒子部分(在分部积分后)对于 复场 ζ 采取 $-\zeta^{\dagger} \mathcal{D}(\partial)\zeta$ 的形式,对于实场 ζ 采取 $-\zeta^{T} \mathcal{D}(\partial)\zeta$ 的形式,那么这个场的传播子就是 $\mathcal{D}^{-1}(ik)$. 这给出传播子:

$$A: \qquad \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(k) = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 + \mu^2\xi}\right)\right]_{\alpha\beta} , \qquad (21.2.20)$$

$$\phi: \qquad \Delta_{nm}(k) = (k^2 + M^2)_{nm}^{-1} + \xi \sum_{\alpha\beta} (t_\alpha v)_n (t_\beta v)_m (k^2)^{-1} (k^2 + \xi \mu^2)_{\alpha\beta}^{-1} , \qquad (21.2.21)$$

$$\psi: \qquad \Delta(k) = \left[-ik + m\right] / (k^2 + m^2) , \qquad (21.2.22)$$

$$\omega: \qquad \Delta_{\alpha\beta}(k) = (k^2 + \xi \mu^2)_{\alpha\beta}^{-1} . \tag{21.2.23}$$

方程(21.2.20)中的极点处在正比于ξ的非物理质量平方处,这个极点被方程(21.2.21)中处在相同质量处的极点抵消了.注意到,现在对于有限的ξ,所有传播子的渐进行为与对称性未破缺时的渐进行为相同.特别地,由于矢量传播子中的 $k_{\mu}k_{\nu}$ 项有一个额外的因子($k^{2} + \mu^{2}\xi$)⁻¹,它不再引起可重整性的问题.我们甚至可以通过选择Feynman规范, $\xi = 1$,来扔掉这一项.仅在 $\xi \to \infty$ 的幺正规范下,这个因子失效了,这时它所给出的传播子渐进行为不符合可重整性的要求.

即使有了行为很好的传播子,我们仍然需要证明这些理论中的紫外发散被破缺的规范对称性所约束,进而使得每个无穷大都能被理论中某个场或者某个参量的重整化所抵消.这可以通过17.2节和17.3节中引入的技巧进行证明,其中要注意的是,要将无自旋场的真空期望值当做外场而不是使对称性破缺的固定值.^[5a]

21.3 电弱理论

自发破缺的规范理论的最重要应用是弱相互作用和电磁相互作用的理论.^[3] 在低能时,可以 用有效拉格朗日量很好地描述弱相互作用,这个拉格朗日量像方程(19.4.22)中那样由矢量流(包括 轴矢量流)乘积的和给出.这表明这些相互作用或许像电磁相互作用那样可以用某种规范理论进行 描述.为了确定电子型轻子,μ子型轻子以及重子(或夸克)的各种守恒律,我们可以猜测,已知的电 子型轻子,μ子型轻子和夸克合起来构成了规范群的各个表示.有了这个假定,规范群的结果只有 几种可能性.

我们首先来考察电子型轻子场. 就我们目前所知道的, 它们只构成了电子场e的左手部分和右手部分:

$$e_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$$
, $e_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$, (21.3.1)

以及纯左手的电子-中微子场veL:

$$\gamma_5 \nu_{eL} = \nu_{eL} \;.$$
 (21.3.2)

在规范群的任何表示中,表示内的场必须都有相同的Lorentz变换性质,所以规范群的表示在这里分成了*左手二重态(ν_{eL}, e_L)和右手单态 e_R .那么最可能的规范群是

$$SU(2)_L \times U(1)_L \times U(1)_R$$
,

在这个群下,场的变换是

$$\delta \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = \mathbf{i} \left[\vec{\epsilon} \cdot \vec{t} + \epsilon_L t_L + \epsilon_R t_R \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \qquad (21.3.3)$$

其中的生成元是

$$\vec{t} = \frac{g}{4}(1+\gamma_5)\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$
(21.3.4)

$$t_L \propto (1+\gamma_5) \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (21.3.5)$$

$$t_R \propto (1 - \gamma_5) , \qquad (21.3.6)$$

其中g是后面进行选择的常数.取代tL和tR,考虑如下的生成元将是方便的,

$$y \equiv g' \left[\left(\frac{1+\gamma_5}{4} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array} \right) + \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right]$$
(21.3.7)

^{*}如果我们允许有能够改变电子型轻子数的耦合常数,那么我们就可以引入左手场e_R,使得它与*v*_{eL}和e_L处在规范 群的一个表示下.这是电弱理论的早期SO(3)变种^[6]的基础,而这种可能性被实验排除了.

和

$$n_e \equiv g'' \left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) + \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right]$$
(21.3.8)

其中的g'和g"同g一样是之后进行选择的常数. 生成元y和t₃的一个线性组合在物理中有着非常重要的作用; 它是电荷

$$q = e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{g} t_3 - \frac{e}{g'} y .$$
(21.3.9)

另外, n_e 是电子型轻子数. 我们希望在我们的理论中引入改变荷的弱相互作用(像 β -衰变)以及 电磁力, 所以我们假定存在与t和g耦合的规范场 \vec{A}^{μ} 和 B^{μ} . 另外, 还剩下一个独立的线性组合, 即 t_L 和 t_R 的线性组合, 我们可以按照情形决定是否引入与这个线性组合相耦合的规范场, 这个线 性组合可以取为电子型轻子数(21.3.8). 对于与 n_e 耦合的无质量规范场, 它所能产生的长程力有一 个很强的限制, 所以为了在我们的理论中引入 n_e 相耦合的规范场, 并让它的耦合强度g''与电弱相 互作用的耦合强度不相上下, 我们必须假定这个规范对称性是自发破缺的.** 然而, 在实验上并未 观测到这种耦合产生的弱相互作用(并且有大量的实验证据反对它), 所以我们将 n_e 从规范群的生 成元中排除出去. 那么规范群就是^[8]

$$G = SU(2)_L \times U(1) \tag{21.3.10}$$

其中*t*和*y*分别由方程(21.3.4)和(21.3.7)给出. 耦合常数*g*和*g*′要进行调整, 使得与这些生成元相耦合的规范场*Å*^µ和*B*^µ正则归一化. 这样, 只包含这些规范场以及电子型轻子的拉格朗日量, 并且是规范不变且可重整的拉格朗日量, 它的最一般形式是

$$\mathscr{L}_{YM} + \mathscr{L}_e = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \bar{\ell} (\not\partial - i \vec{A} \cdot \vec{t}_L - i \not B y) \ell .$$
(21.3.11)

(我们在这里使用了如下的性质: $SU(2)_L \pi U(1)$ 的结构常数分别是 $C_{ijk} = -ig \epsilon_{ijk}$ 和零.)

显然, 在与*t*和y相耦合的四个规范场中, 只有它们的一个线性组合是真正无质量的, 即电磁场*A*^µ. 我们因此必须假定*SU*(2)_{*L*} × *U*(1)自发破缺到子群*U*(1)_{em}, 这个子群的生成元由荷(21.3.9)给出. 对称性破缺机制的细节会在后面进行考察. 然而, 无论这个机制是什么样的, 我们知道正则归一化的矢量场对应自旋为1且质量有限的粒子, 这些粒子的成元都有, 电荷为+e而质量为m_W的场:

$$W^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^{\mu} + iA_2^{\mu}) , \qquad (21.3.12)$$

另一个电荷为-e且质量相同的场:

$$W^{\mu*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^{\mu} - iA_2^{\mu}) , \qquad (21.3.13)$$

以及两个质量分别为mz和零的电中性场,它们由A3和B"的正交线性组合给出:

$$Z^{\mu} = \cos\theta \, A_3^{\mu} + \sin\theta \, B^{\mu} \,, \qquad (21.3.14)$$

^{**}要注意的是,存在不破坏电子型轻子整体守恒律的可能.我们必须要假定这个拉格朗日量有两个对称性,一个是在 仅作用在电子型轻子场上的整体相位变换下不变,另一个是在作用在电子型轻子场以及某个标量场上的定域对称性下 不变,而这里的标量场不与轻子相互作用.这个标量的真空期望值破缺了定域对称性,赋予了与n_e耦合的规范玻色子质 量,但与此同时没有破缺整体对称性.

$$A^{\mu} = -\sin\theta \, A^{\mu}_{3} + \cos\theta \, B^{\mu} \,, \qquad (21.3.15)$$

或者等价的

$$A_3^{\mu} = \cos\theta \, Z^{\mu} - \sin\theta \, A^{\mu} \,\,, \tag{21.3.16}$$

$$B^{\mu} = \sin \theta \, Z^{\mu} + \cos \theta \, A^{\mu} \, . \tag{21.3.17}$$

根据一般性结论(21.1.11)—(21.1.12), 未破缺对称性, 即这里的电磁规范不变性, 它的生成元 由上述生成元的线性组合给出, 观察与生成元*t*和y相耦合的正则归一化场, 线性组合的系数与相 对应无质量场在正则归一化规范场中的系数相同. 观察方程(21.3.16)和(21.3.17), 这给出

$$q = -\sin\theta t_3 + \cos\theta y . \qquad (21.3.18)$$

那么,与方程(21.3.9)比较,这给出

$$g = -e/\sin\theta$$
, $g' = -e/\cos\theta$ (21.3.19)

以耦合g和g'形式,完整的轻子-规范玻色子耦合可以表示成:

$$\begin{split} \mathbf{i}\mathscr{L}'_{e} &= -\overline{\begin{pmatrix}\nu_{e}\\e\end{pmatrix}} \left[\sum_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} t_{\alpha}\right] \begin{pmatrix}\nu_{e}\\e\end{pmatrix} \\ &= -\overline{\begin{pmatrix}\nu_{e}\\e\end{pmatrix}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{W}(t_{1L} - \mathbf{i}t_{2L}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{W}^{*}(t_{1L} + \mathbf{i}t_{2L}) \\ &+ \mathcal{Z}(t_{3L} \cos\theta + y \sin\theta) + \mathcal{A}(-t_{3L} \sin\theta + y \cos\theta) \right] \begin{pmatrix}\nu_{e}\\e\end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{e} \,\mathcal{W}\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\right) \nu_{e}\right) + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_{e} \,\mathcal{W}^{*}\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\right) e\right) \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{g^{2} + g^{\prime 2}} \,\bar{\nu}_{e} \,\mathcal{Z}\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\right) \nu_{e} + \frac{(g^{2} - g^{\prime 2})}{2\sqrt{g^{2} + g^{\prime 2}}} \,\bar{e} \,\mathcal{Z}\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\right) e \\ &+ g^{\prime} \bar{e} \,\mathcal{Z}\left(\frac{1-\gamma_{5}}{2}\right) e - e \left(\bar{e} \mathcal{A} e\right) \,. \end{split}$$
(21.3.20)

为了完善这个理论,我们还得对对称性破缺的机制做一些假定.我们希望这个机制不仅赋予 W^{\pm} 和 Z^{0} 质量,还希望它赋予电子质量.现在,在有弱作用耦合的可重整理论中,唯一可能的方法是引入标量场并要求这个标量场与 $\bar{\ell}_R$ 和 ℓ_L 没有导数耦合($\bar{\ell}_L$ 和 ℓ_R 也是如此).那 $\Delta SU(2)_L \times U(1)$ 不变性要求标量场是 ℓ_L 这样的 $SU(2)_L$ 二重态,但要有一个y的偏移即q的偏移.因此我们假定"Yukawa"耦合

$$\mathscr{L}_{\phi e} = -G_e \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \text{H.c.} , \qquad (21.3.21)$$

其中 (ϕ^+, ϕ^0) 是二重态,在这个二重态上, $SU(2) \times U(1)$ 生成元分别表示成矩阵:

$$\vec{t}^{(\phi)} = \frac{g}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$
(21.3.22)

$$y^{(\phi)} = -g'/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (21.3.23)$$

这使得电荷矩阵是

$$q^{(\phi)} = \frac{e}{g} t_3^{(\phi)} - \frac{e}{g'} y^{(\phi)} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (21.3.24)

理论中还有可能存在其它标量多重态,但我们暂且假定这是唯一一个标量多重态.

我们还得给拉格朗日量加上包含标量场和规范场的规范不变项.这种项的最一般形式,且 与SU(2) × U(1)规范不变性,Lorentz不变性以及可重整性相容的最一般形式是

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\frac{1}{2} \left| (\partial_{\mu} - i\vec{A}_{\mu} \cdot \vec{t}^{(\phi)} - iB_{\mu} y^{(\phi)})\phi \right|^{2} - \frac{\mu^{2}}{2} \phi^{\dagger}\phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^{\dagger}\phi)^{2} , \qquad (21.3.25)$$

其中 $\lambda > 0$,且

$$\phi \equiv \left(\begin{array}{c} \phi^+ \\ \phi^0 \end{array}\right) \,. \tag{21.3.26}$$

$$\langle \phi \rangle^{\dagger} \langle \phi \rangle \equiv v^2 = |\mu^2| / \lambda .$$
 (21.3.27)

我们总可以通过一个 $SU(2) \times U(1)$ 规范变换到达幺正规范,这时 $\phi^+ = 0 \pm \phi^0 \pm \mathbb{R}$ 的, $\overline{m}\phi^0$ 的真 空期望值为正. (这就是为什么我们在归一化复二重态 ϕ 时要使得因子 $\frac{1}{2}$ 出现在方程(21.3.25)的动 能项中; $\operatorname{Re}\phi^0$ 是唯一的物理标量场, 而方程(21.3.25)使得这是正则归一化场.) 在幺正规范下, ϕ 分 量的真空期望值是

$$\langle \phi^+ \rangle = 0 , \qquad \langle \phi^0 \rangle = v > 0 . \qquad (21.3.28)$$

这样,标量拉格朗日量(21.3.25)给出了矢量介子质量项

$$-\frac{1}{2} \left| \left(\vec{A}_{\mu} \cdot \vec{t}^{(\phi)} + B_{\mu} y^{(\phi)} \right) \left\langle \phi \right\rangle \right|^{2} = -\frac{1}{2} \left| \left(\frac{g}{2} \vec{A}_{\mu} \cdot \vec{\tau} - \frac{g'}{2} B_{\mu} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ v \end{array} \right) \right|^{2} \\ = -\frac{v^{2} g^{2}}{4} W^{\dagger}_{\mu} W^{\mu} - \frac{v^{2}}{8} (g^{2} + g'^{2}) Z_{\mu} Z^{\mu} .$$
(21.3.29)

我们看到, 正如我们所期待的, 光子质量为零, 而W[±]和Z⁰的质量为

$$m_W = \frac{v|g|}{2}$$
, $m_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + {g'}^2}}{2}$. (21.3.30)

另外,我们从方程(21.3.21)和(21.3.28)中看到,电子被赋予了最低阶质量

$$m_e = G_e v$$
 . (21.3.31)

尽管现在有 $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ 这种散射过程的实验数据,但是研究这种仅发生在电子型轻子之间的反应十分困难.为了使数据精度更高,我们所考察的反应至少要包含 μ 子型电子,例如研究比较细致的 μ 子衰变, $\nu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_{\mu}$.上面模型可以进行扩展使它包含 μ 子型轻子,这个扩展是十分平庸的——只需加上拉格朗日量项 \mathscr{L}_{μ} 和 $\mathscr{L}_{\phi\mu}$,它们类似于方程(21.3.11)和(21.3.21)中的最后一项,所不同的是场 $e^{\mu}\nu_e$ 要换成 μ 子场和 μ 子中微子场 μ^- 和 ν_{μ} , G_e 要换成 $G_{\mu} = G_e(m_{\mu}/m_e)$.观察(21.3.20)以及其中要把 e^{μ} 成 μ 和 ν_{μ} 的项,这些项表明,在低能e型轻子和 μ 型轻子之间交换W粒子给出有效相互作用

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{m_W^2} \left(\bar{e}\gamma^\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e\right) \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mu\right) + \text{H.c.}$$
(21.3.32)

这可以与"V – A"理论的相互作用进行比较,这个理论对µ子衰变有一个很好的描述

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{e} \gamma^{\lambda} (1+\gamma_5) \nu_e \right) \left(\bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} (1+\gamma_5) \mu \right) + \text{H.c.}$$
(21.3.33)

这里的 G_F 是传统的Fermi耦合常数, 从 μ 子衰变速率中可以知道它的值是 $G_F = 1.16639(2) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. 比较这两个表达式, 我们发现

$$g^2/m_W^2 = 4\sqrt{2}\,G_F \ . \tag{21.3.34}$$

由此可以立刻得出真空期望值v,这个值由方程(21.3.30)给出

$$v = \frac{2m_W}{g} = \frac{1}{2^{1/4} G_F^{1/2}} = 247 \,\text{Gev} \;.$$
 (21.3.35)

另外, 方程(21.3.31)表明Ge的值非常小

$$G_e = \frac{0.511 \,\mathrm{Mev}}{247 \,\mathrm{GeV}} = 2.07 \times 10^{-6} \;.$$
 (21.3.36)

从方程(21.3.30)中我们可以看到 $m_Z > m_W$. 在不知道 $g \pi g'$ 的前提下,我们无法用方程(21.3.30)决定 $m_Z \pi m_W$ 的真实值.利用方程(21.3.30)和(21.3.19),我们可以用电弱混合角 θ 来表示 $m_Z \pi m_W$:

$$m_W = \frac{ev}{2|\sin\theta|} = \frac{37.3 \,\text{GeV}}{|\sin\theta|} ,$$
$$m_Z = \frac{ev}{2|\sin\theta||\cos\theta|} = \frac{74.6 \,\text{GeV}}{|\sin2\theta|} .$$

它们是参考文献3中获得的原始结果. 当然,存在着各种各样的辐射修正,它们中的大多数依赖于理论的细节,而我们还没有指定这些细节. 但是有一个特别大的辐射修正不需要进一步的信息就可以计算出来. 上面计算出的 m_W 值和 m_Z 值使用了电荷e的传统定义. 然而,正如18.2节所阐述的,当能量 $E \gg m_e$ 时,在计算各种反应时用这个值并不是特别合适;我们应该使用定义在滑动标度 μ 处的电荷 e_μ ,其中 μ 的量级正是感兴趣的能量范围. 当 μ 的量级为90 GeV时,有效精细结构常数 $e_{\mu}^2/4\pi$ 大约是1/129(它对 μ 的准确值并不敏感),所以前面的 m_W 值和 m_Z 值要乘上 $\sqrt{137/129}$,这给出

$$m_W = \frac{38.4 \,\text{GeV}}{|\sin\theta|} , \qquad (21.3.37)$$

76.9 GeV (21.3.37)

$$m_Z = \frac{100 \text{ GeV}}{|\sin 2\theta|} \ . \tag{21.3.38}$$

无论 θ 的值是多少,这些质量都太大了,在20世纪60年代或者70年代早期根本没有希望探测 到W粒子或Z粒子.电弱理论的实验证据不得不转向去寻找该理论所预言的一类新弱相互作用, 即交换 Z^0 产生的中性流过程.^[9] 第一次发现中性流过程是在1973年,通过气泡室观察 ν_{μ} - e^- 弹性散 射的纯轻子过程.^[10] 尽管这些过程在理论上很容易处理,由于截面正比于质心能量的平方,[†] 这种 事件发生的频率相当低.又过了很多年,这种纯轻子中性流反应才能被用来给出参量sin² θ 一个相

[†]这个截面正比于 G_F^2 ,为了使得截面量纲为(能量⁻²),它必须要正比于某个能量的平方.当质心能量远大于电子质量时,这是这个公式中能出现的唯一能量.

对合理的精细值. 在1994年, 对纯轻子中性流过程的研究, 例如 $\nu_{\mu} + e^{-} \rightarrow \nu_{\mu} + e^{-} \pi \bar{\nu}_{\mu} + e^{-} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + e^{-}$, 给出了0.222±0.011, 而这又给出了 $m_{W} = 81.5 \text{ GeV} \pi m_{Z} = 92.5 \text{ GeV}$.

在中性流发现之前,电弱理论就已经被扩展至强子与强子或强子与轻子的电磁相互作用和弱相互作用.在20世纪60年代中期,大家就已经知道了,若在弱相互作用过程中,轻子和强子之间有电荷交换,那么这个过程在低能下可以很好地由如下有效拉格朗日量描述,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \Big[\bar{e} \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \nu_\mu \Big] J^\lambda + \text{H.c.} , \qquad (21.3.39)$$

其中J^λ是强子流. 在夸克模型下, J^λ的对易性和守恒性使得我们可以将其等同为夸克流

$$J^{\lambda} = \bar{u}\gamma^{\lambda}(1+\gamma_5)d\cos\theta_c + \bar{u}\gamma^{\lambda}(1+\gamma_5)s\sin\theta_c . \qquad (21.3.40)$$

这里的u, d以及s是上夸克,下夸克以及奇异夸克的场,而 θ_c 是另外一个角,被称为Cabibbo(卡比 玻)角^[11].关于 $O^{14} \rightarrow N^{14*} + e^+ + \nu_e \pi K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ 这类过程的实验证实了 G_F 与纯轻子过 程 $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu} + e^+ + \nu_e$ 中测量的值十分接近,并且对于 θ_c 给出了 $\sin \theta_c = 0.220 \pm 0.003$.我们由此自 然地得出,夸克构成了另一个 $SU(2) \times U(1)$ 二重态

$$\mathscr{Q} = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \left[\begin{array}{c} u\\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{array}\right],\tag{21.3.41}$$

以及另一个单态, 而y值要调整到使得夸克拥有电荷2e/3和-e/3. 其本身会引起一个很严重的困难. 与Z⁰玻色子相互作用的夸克中性流是

$$\sum_{\mathscr{Q}} \bar{\mathscr{Q}} \gamma^{\mu} (t_{3L} \cos \theta + y \sin \theta) \mathscr{Q} = \sum_{\mathscr{Q}} \bar{\mathscr{Q}} \gamma^{\mu} (t_{3L} \sec \theta + q \tan \theta) \mathscr{Q} , \qquad (21.3.42)$$

这里的求和取遍类似(21.3.41)这样的夸克二重态*②*. 电荷矩阵q在夸克味下是对角的,但如果(21.3.41)是唯一的夸克二重态,那么包含矩阵 t_{3L} 的项将会包含正比于 $\bar{s}\gamma^{\mu}(1 + \gamma_5)d\pi d\bar{\gamma}^{\mu}(1 + \gamma_5)s$ 的交叉项,这给出了Z交换的有效相互作用,例如 $s + \bar{d} \leftrightarrow d + \bar{s}\pi s + \bar{d} \leftrightarrow \mu^+ + \mu^-$,而其强度与一阶弱相互作用强度差不多. 这会使得 $K^0 - \overline{K^0}$ 振荡和 $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 这种过程的速率要比观测到的高好几个数量级. 另外,即使拉格朗日量中没有中性流项,若一圈图中包含有带荷流(21.3.40)的相互作用(21.3.39),这个一圈图给出的有效相互作用 $s + \bar{d} \rightarrow d + \bar{s}$ 只比普通的一阶弱相互作用小一个因子 $\alpha/2\pi$,这使得 $K^0 - \overline{K^0}$ 振荡的速率仍然要大得多. 为了避免最后一个问题,可以认为 J^{λ} 中还有一项,以现代的记法,这写成

$$\bar{c}\gamma^{\lambda}(1+\gamma_5)[-d\sin\theta_c + s\cos\theta_c], \qquad (21.3.43)$$

其中c是第四个夸克,它像u一样带有电荷2e/3.给(21.3.40)加上(21.3.43),带荷流可以写成

$$J^{\lambda} = (\bar{u}\cos\theta_c - \bar{c}\sin\theta_c)\gamma^{\lambda}(1+\gamma_5)d + (\bar{u}\sin\theta_c + \bar{c}\cos\theta_c)\gamma^{\lambda}(1+\gamma_5)s$$

W与这一流的相互作用使得奇异数不守恒,其原因是c和u的质量不同,这导致了 $u\cos\theta_c - c\sin\theta_c$ 和 $u\sin\theta_c + c\cos\theta_c$ 之间的跃迁.但这意味着有效相互作用 $s + \overline{d} \rightarrow d + \overline{s}$ 的一圈图被额外的因子 m_c^2/m_W^2 (既然 $m_u \ll m_c$)压低,这使得 K^0 - $\overline{K^0}$ 振荡的速率与实验一致.

随后就注意到,^[14]这也解决了改变 Z^0 相互作用的奇异数问题. 在 $SU(2) \times U(1)$ 规范理论下, 组合 $-d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c$ 不可能是单态, 它必须是另一个二重态的一部分

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \begin{bmatrix} c\\ -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{bmatrix}.$$
(21.3.44)

给弱中性流(21.3.42)加入这个二重态,正比于 $\bar{s}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)d\pi d\bar{\gamma}^{\mu}(1+\gamma_5)s$ 的奇异数不守恒项抵消 了,交换 Z^0 给 $K^0-\overline{K^0}$ 振荡和 $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 这种过程的贡献过大的问题也随之解决了.在1974年, 包含c夸克的粒子被发现了,^[15]这个c夸克处在 $c-\bar{c}$ 的束缚态中,并指出质量 $m_c \approx 1.5 \text{ GeV}$.^{††}这补 全了两代夸克和两代轻子:混合在一起的(u,d)夸克双重态和(c,s)夸克双重态,以及两个轻子双重 态 (ν_e, e) 和 (ν_{μ}, μ) .

第三代粒子的第一个迹象是第三类轻子r的发现.^[16]之后,第五种夸克b夸克被发现了,^[17] 其电荷为-e/3而质量约为4.5 GeV.这样一来,电荷为2e/3的第六类夸克在理论上就是必须的, 但过了很长的时间才发现这个夸克,^[18]引用1995年的数据,它的质量是181±12 GeV.^[19]现在, (21.3.39)中的强子流表示成

$$J^{\lambda} = \begin{bmatrix} u \\ c \\ t \end{bmatrix} \gamma^{\lambda} (1+\gamma_5) V \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} , \qquad (21.3.45)$$

其中V是不完全清楚的3×3幺正矩阵,称为Kobayashi(小林)-Maskawa(益川)矩阵.^[20]在 $SU(2) \times U(1)$ 规范理论下,这意味着存在3个夸克二重态:

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \left[\begin{array}{c} u\\ V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \end{array}\right],$$
(21.3.46)

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \left[\begin{array}{c}c\\V_{cd}d+V_{cs}s+V_{cb}b\end{array}\right],$$
(21.3.47)

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \left[\begin{array}{c}t\\V_{td}d+V_{ts}s+V_{tb}b\end{array}\right].$$
(21.3.48)

要意识到,这正是我们期待有三个夸克二重态的一般理由.标量二重态φ_n与夸克的可重整相 互作用,且(*SU*(3) × *SU*(2) × *U*(1))-不变的相互作用,它的最一般形式是

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\sum_{ijn} G_{ij}^{n} \begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{n}^{0} \\ \phi_{n}^{-} \end{pmatrix} U_{jR}$$
$$-\sum_{ijn} H_{ij}^{n} \overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -\phi_{n}^{-\dagger} \\ \phi_{n}^{0\dagger} \end{pmatrix} D_{jR} + \text{H.c.} , \qquad (21.3.49)$$

其中 U_i 和 D_i 是电荷分别为2e/3和-e/3的夸克场, i = 1, 2, 3指三个独立的夸克场, L和R分别指这 些夸克场的左手部分和右手部分, 而 G_{ij}^n 和 H_{ij}^n 是未知常数. 这样, 中性标量的真空期望值就给出了 夸克质量项

$$\mathscr{L}_{m} = -\sum_{ij} \overline{U_{iL}} \, m_{ij}^{U} \, U_{jR} - \sum_{ij} \overline{D_{iL}} \, m_{ij}^{D} \, D_{jR} + \text{H.c.} \quad , \tag{21.3.50}$$

^{††}我们并没有观测到独立夸克, 所以它们的质量不是精确定义的. 这里引用的*c*夸克质量粗略是*J*-ψ粒子质量的一半, 而这个粒子被解释成*c*-*c*束缚态. *b*夸克和*t*夸克太重了, 所以我们不能从包含它们的强子中得到这些夸克明确的质量.

其中

$$m_{ij}^U = \sum_n G_{ij}^n \langle \phi_n^0 \rangle_{\text{VAC}} , \qquad m_{ij}^D = \sum_n H_{ij}^n \langle \phi_n^0 \rangle_{\text{VAC}}^* . \qquad (21.3.51)$$

矩阵 m_{ij}^U 和 m_{ij}^D 没有受到任何限制,所以它有可能是复矩阵且是非对角矩阵,在这种情况下, \mathscr{L}_m 中 会出现宇称不守恒项以及味不守恒项. 然而,我们可以引入新的夸克场 $U'_R = A^U_R U_R, U'_L = A^U_L U_L,$ $D'_R = A^D_R D_R, D'_L = A^D_L D_L, 其中A是3 × 3矩阵,为了保护动能项(19.4.1)的形式,它只需要是幺正$ 的,除此之外,A上没有任何限制.这样一来,当写成带撇夸克场的形式时,质量项(21.3.50)必须采 $取相同的形式,但是矩阵<math>m^U$ 和 m^R 要换成

$$m^{U'} = A_L^U m^U A_R^{U\dagger} , \qquad m^{D'} = A_L^D m^D A_R^{D\dagger} .$$
 (21.3.52)

现在有一个一般性定理:对于任意矩阵*m*,总可以选择幺正矩阵*A*和*B*,使得*AmB*是实对角矩阵. (使用极分解定理将*m*写成*m* = *HU*,其中*H*是厄米矩阵,*U*是幺正矩阵,选择*A* = S^{\dagger} 和*B* = $U^{\dagger}S$,这里*S*是使得*H*对角化的幺正矩阵.)因此我们可以选择矩阵*A*使得*m^U*和*m^D*是实对角矩阵,在这种情况下,夸克场*u*,*c*,*t*,*d*,*s*和*t*可以等同为 $U'_L + U'_R$ 和 $D'_L + D'_R$ 的分量.弱作用二重态现在写成

$$Q_{iL} = \left(\begin{array}{c} (A_L^{U-1}U_L')_i \\ (A_L^{D-1}D_L')_i \end{array}\right) \ .$$

我们也可将二重态取成线性组合 $A_L^U Q_L$,这使得拥有电荷2e/3且质量明确的夸克u, c, t是二重态的上分量,在这一情况下,这些二重态采取形式(21.3.46)—(21.3.48),而

$$V = A_L^U A_L^{D-1} . (21.3.53)$$

在90%的置信界限下, Kobayashi-Maskawa矩阵元绝对值的最新结果(1995)是^[20a]

$$\left(\begin{array}{cccc} 0.9745\text{-}0.9757 & 0.219\text{-}0.224 & 0.002\text{-}0.005 \\ 0.218\text{-}0.224 & 0.9736\text{-}0.9750 & 0.036\text{-}0.046 \\ 0.004\text{-}0.014 & 0.034\text{-}0.046 & 0.9989\text{-}0.9993 \end{array}\right) \ ,$$

其中行用u, c和t标记, 而列用d, s和b标记.

如果只有u夸克, d夸克, c夸克和c夸克所构成的两个夸克二重态, 就有可能选择夸克场的相 位使得所有V_{ij}都是实的,[‡]这使得矩阵V是正交的, 并使得二重态(21.3.46)和(21.3.47)(省略b)分别 采取(21.3.41)和(21.3.44)的形式. 在这一情况下, 规范相互作用会自动使得T和CP守恒. 第三代夸 克的重要性就在于, 现在不总可能通过选择夸克相位使得矩阵V是实矩阵, 因而规范相互作用能 够破坏T守恒和CP守恒. 但是由于未知的原因, 联系第三代夸克与前两代夸克的矩阵元V_{ub}, V_{cb}, V_{td}和V_{ts}都非常小, 所以第三代夸克的出现对前两代夸克的物理影响很小. 这以一种比较自然的方 式解释了为什么Cabibbo假定为什么起到了很好的作用, 以及为什么T破缺和CP破缺为什么这么 弱. 如果有两个或多个标量多重态, 那么标量玻色子相互作用也会破坏T守恒和CP守恒;^[20b] 这里 之所以预期T破缺和CP破缺很弱是因为标量二重态与轻夸克的耦合很弱. 对于3.3节讨论的K⁰衰 变, 究竟是哪个机制引起了其中的T破缺和CP破缺? 这在现在依旧是不清楚的.

[†]调整*d*和*s*的相位使得*V_{ud}*和*V_{us}*是实的. 这样幺正性就会要求*V_{cd}*和*V_{cs}*有相同的相位, 因而可以通过调整*c*的相位消 掉这个相位.

在探测到纯轻子过程 $\nu_{\mu} + e \rightarrow \nu_{\mu} + e$ 之后不久, 就在1973年发现了包含强子的中性流过程,^[21] 例如中微子-核子深度非弹散射. 由于这里靶粒子的质量要大得多, 不久之后就发现有可能观测到 大量的事件, 并用它们来证实电弱理论并测量它的参数. 轻子-强子中性流相互作用的额外信息 来自于对原子物理中宇称破缺的观测. 到1983年, 对sin² θ 的所有直接测量变得一致, 并给出组合 值sin² θ = 0.23, 给出预测 m_W = 80.1 GeV和 m_Z = 91.4 GeV. 然后就在1983年发现了W粒子, 随 后又发现了Z粒子.^[22] 它们的观测质量现在是(1995)

 $m_W = 80.410 \pm 0.180 \,\text{GeV}^{[23]}, \qquad m_Z = 91.1887 \pm 0.0022 \,\text{GeV}^{[24]},$

与电弱理论的预言非常一致.

对Z粒子质量的测量有很高的精确性,这是通过在LEP(CERN的大型电子-正电子对撞机)和SLC(斯坦福直线对撞机)上调节 e^+ - e^- 对撞的能量使之到达Z共振实现的,这改变分析电弱数据的方式.之前是对W质量和Z质量的预测值与观测值进行比较,现在则是将Z质量取为实验输入量,加上从µ子衰变速率获得的Fermi耦合常数 G_F = 1.16639(2) × 10⁻⁵ GeV⁻²(包含了到 α 阶的辐射修正),以及从18.2节描述的低能测量外推出的精细结构常数 $\alpha(m_Z)$ = (128.87±0.12)⁻¹.以这种方式,sin² θ 变成导出量;如果它由方程(21.3.38)定义,它取得值是sin² θ = 0.2312±0.003.有了这些输入量,我们就能用电弱理论对其它量,例如 m_W ,做出很高精度的预测,在这种精度下,电弱辐射修正要考虑进来.^[25]在一圈阶,这些辐射修正会包含t夸克的质量以及标量("Higgs")玻色子的质量,因而可以用来估计这些质量.例如,在t夸克发现之前,若理论与实验保持一致,这会为这些辐射修正设置一个界限,使得顶夸克质量处在130—200 GeV的范围内,^[26]这与随后实验上观测到的值一致.W质量的预测值(1994)是80.29 GeV,它有一个±0.02 GeV的不确定度,这个不确定度来自于输入量 m_Z , G_F 以及 $\alpha(m_Z)$ 的不确定度,它还有一个±0.11 GeV的不确定度,这个不确定度来自于 m_t 和 m_{Higgs} 可能的取值范围.1995年的一项研究^[27]给出 $m_{\text{Higgs}} < 225 GeV.在CERN的LEP2号电子-正电子对撞机上预期会有一个<math>m_W$ 的精确测量,这个测量会给出 m_{Higgs} 一个有用的估计.

* * *

拥有电弱理论的场以及它的SU(3) × SU(2) × U(1)规范对称性的最一般可重整拉格朗日量会 自动给出重子守恒和轻子守恒.由于夸克,反夸克,轻子以及反轻子均属于SU(3)×SU(2)×U(1)的 不同表示,这对于规范相互作用以及裸质量项显然是成立的.若标量均是SU(3)中性,SU(2)二重 态并拥有U(1)量子数±1/2,标量与费米子和/或反费米子的可重整相互作用只能是标量与夸克-反 夸克对或者轻子-反轻子对的相互作用,这显然使得重子数以及轻子数守恒.(以非常类似的方法, 我们看到对于与轻子相互作用的带荷强子流,构成这个流的必然是自发破缺SU(3) × SU(3)对称 性对应的流的线性组合,这正是19.7节中所描述的,而且正如所假定的,我们无需知道原始工作中 对这一破缺对称性的解释.)

这些结果严格依赖于标准模型可重整的假定.但正如我们反复强调的,标准模型的可重整拉格朗日量预期会伴随量纲d > 4的不可重整项,这样的不可重整项会被某个很大的质量M的4-d次方压低.对可重整标准模型预言的领头修正来自于量纲大于4但又尽可能小的项.

用费米场以及标准模型的其它场构建的Lorentz不变且量纲为五的项,这样的项关于费米场最 多是双线性型,除此之外要么包含两个标量,或者一个标量和一个规范导数,或者两个规范导数 但没有标量(包含它们的对易子,一个场强张量). 色*SU*(3)不变性要求在这样的相互作用中,费米 场要么出现在夸克-反夸克双线性中,要么出现在一对轻子和/或反轻子场中. 这种项有很多,但为 了破坏轻子数守恒,它们必须包含两个轻子场的乘积或者两个共轭轻子场的乘积. 左手轻子二重 态 (ℓ_{Li}^-, ν_i) 和右手带电轻子单态 ℓ_{Ri}^- (其中 $i = e, \mu$ 或 τ)分别有U(1)量子数1/2和1,而标量二重态(或 者多个二重态)(ϕ^+, ϕ^0)拥有U(1)量子数-1/2,所以我们可以用两个左手轻子二重态和两个标量二 重态构建量纲为五的U(1)-不变相互作用. 若只有一种标量二重态,满足SU(2)不变性和Lorentz不 变性的项只有一个:^[27a]

$$\sum_{ij} f_{ij} (\overline{\ell_{Li}^c} \phi^+ - \overline{\nu_i^c} \phi^0) (\ell_{Lj} \phi^+ - \nu_j \phi^0) , \qquad (21.3.54)$$

其中i和j是轻子味指标,而c标记电荷共轭场.当能量低于电弱破缺标度时,这给出有效相互作用

$$\sum_{ij} f_{ij} \,\overline{\nu_i^c} \nu_j \,\langle \phi^0 \rangle^2 \,, \qquad (21.3.55)$$

我们预期*f_{ij}*是1/*M*阶的,也许还乘上小耦合常数,所以它给出的使轻子数不守恒的中微子质量至 多是(300 GeV)²/*M*阶.^[27b]我们将会在21.5节看到,*M*预期的量级是10¹⁵–10¹⁸ GeV,所以我们预期 中微子质量处在10⁻⁴–10⁻¹ eV的范围内,如果被小的耦合常数压低,这个值还会更小.这种质量对 于直接测量而言太小了,但是没有什么理由使得中微子质量是对角的,所以在中微子的长途飞行 中,一种中微子会振荡到另一种中微子,我们可以从中探测到中微子质量.

类似的分析表明,存在量纲为6的相互作用,这个相互作用既破坏了重子数守恒又破坏了轻子数守恒,包含三个夸克场和一个轻子场.^[27c]这种相互作用的耦合常数量纲是*M*⁻²,因而会导致质子衰变这样的过程,并且给出正比于*M*⁻⁴的衰变速率.

21.4 定域对称性的动力学破缺*

迄今为止,我们对定域对称性自发破缺的讨论限制在微扰论的意义下.在某种程度上,这种限制是不可避免的.然而,对于整体对称性的自发破缺,关于无质量Goldstone玻色子的存在性以及相互作用,我们有望证明出精确的定理,定域对称性的自发破缺不会给出任何精确的结论.甚至有质量矢量玻色子的存在性都称不上一般定理;对于充分强的规范耦合,这些粒子会快速地衰变,使得它们不能看做自旋*j* = 1的不同共振态.

另一方面,如果像e或g或g'这样的规范耦合足够小,那么定域对称性自发破缺的理论必须非常 接近一个整体对称性自发破缺的理论,关于这一点,我们可以证明一个精确的定理.因此,即使其 它规范耦合都很强,我们也有可能对这样的规范理论导出有用的近似结果.标准SU(2) × U(1)电 弱理论提供了一个例子,在这个例子中,标量自耦合λ很大(标量质量也因此变得很大;参看方 程(21.3.27)).一种更加有趣的可能性是,电弱对称性的破缺是因为与某个新规范群对应的强力, 而这个新规范群作用在一组新费米场上.我们在这里仅考察对于这种理论我们能够获得什么样的 结果,并不涉及自发对称性破缺的特殊机制.^[28]

我们假定, 在规范耦合为零的极限下, 我们的理论在某个整体对称群G下不变, 并且G自发破缺到它的一个子群H. 正如我们在19.5节所讨论的, 在这个理论下, 我们可以将这个理论写成一组Goldstone玻色场 ξ_a , 加上剩下的物质场 $\tilde{\psi}$, 它们的变换性质使得, 如果拉格朗日量是H-不变的, 并且它只是用 $\tilde{\psi}$ 以及方程(19.6.14), (19.6.30)等给出的协变导数 $D_{a\mu}$, $D_{\mu}\tilde{\psi}$ …构建的, 那么这个拉格朗日量就是G-不变的.

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

我们现在"打开"规范耦合.规范群G显然要是理论全体对称群G的某个子群 $G \subset G$,并且 当G自发破缺到H时,G必须自发到子群 \mathcal{H} ,即G与G的交.规范群G的生成元 \mathcal{I}_{α} 可以表示成整个 群G的生成元 T_A 的线性组合:

$$\mathscr{T}_{\alpha} = \sum_{A} e_{\alpha A} T_A , \qquad (21.4.1)$$

系数 $e_{\alpha A}$ 是规范耦合,在这里取得很小.指标A取遍未破缺对称性生成元 t_i 和破缺对称性生成 元 x_a 的指标i和a.(我们在这里按照惯例将生成元 T_A 归一化;即对于表示它们的矩阵,其矩阵元量 级为1.特别地,与 \mathcal{T}_{α} 相反, x_a 和 t_i 的结构常数不包含耦合常数因子.)

在底层理论中, G不变性是线性实现的, 我们引入与其它场 ψ 与规范场 $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ 的耦合, 方法是将 普通导数替换成规范协变导数

$$\left(\partial_{\mu} - i\sum_{\alpha} \mathscr{T}_{\alpha} \mathscr{A}_{\alpha\mu}\right) \psi = \left(\partial_{\mu} - i\sum_{A} T_{A} A_{A\mu}\right) \psi , \qquad (21.4.2)$$

其中

$$A_{A\mu} \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha A} \mathscr{A}_{\alpha \mu} . \qquad (21.4.3)$$

这样,相应的理论在形式定域变换下不变,在这个变换下,场的变换是

$$\psi \to g \,\psi \,\,, \tag{21.4.4}$$

$$\sum_{A} T_A A_{A\mu} \to g\left(\sum_{A} T_A A_{A\mu}\right) g^{-1} - \mathrm{i}(\partial_{\mu}g)g^{-1} , \qquad (21.4.5)$$

其中g(x)是群G的元素并依赖于时空坐标. 变换(21.4.5)一般不保护线性组合(21.4.3)的形式,由此 我们可以看出规范耦合一般会破缺G,所以这是完全形式的不变性. 然而,我们可以暂时忘掉方 程(21.4.3),将 A_A^μ 看做不受约束的经典外场,对物质场以及它们与规范场的相互作用的拉格朗日 量进行分析,要求这个拉格朗日量在定域变换(21.4.4)和(21.4.5)下不变. 以这种方式,我们不仅能 确保这个拉格朗日量在真正的定域对称子群G下不变(当 $e_{\alpha A} \rightarrow 0$ 时则在更大的整体对称群G下不 变),也能确保流,即物质作用量对 $\mathscr{A}_{\alpha}^{\mu}$ 的变分导数,在破缺整体对称群G下有正确的变换性质. 然 后,我们将 A_A^{μ} 约束至形式(21.4.3),并把 $\mathscr{A}_{\alpha}^{\mu}$ 看成量子场,再给拉格朗日量中加上该场合适的动能 项.

为了探索群G破缺到子群H的含义,我们继续我们在19.6节的做法.首先,将 ψ 和A替换成新场 $\tilde{\psi}$ 和 \tilde{A} :

$$\tilde{\psi} = \gamma^{-1}(\xi)\psi , \qquad (21.4.6)$$

$$\tilde{A}_{A}^{\mu} = \sum_{B} D_{AB} \Big(\gamma^{-1}(\xi) \Big) A_{B}^{\mu} , \qquad (21.4.7)$$

其中 $\gamma(\xi)$ 是标准G变换,它消掉了 ψ 中的Goldstone玻色子自由度,而D(g)是G的表示,它由规范场构建:

$$g T_A g^{-1} = \sum_B D_{BA}(g) T_B$$
 (21.4.8)

这些Goldstone自由度重新出现在 $\gamma(\xi)$ 所依赖的时空相关参量 ξ_a 中.利用19.6节的计算,对于定域 变换和整体变换,变换规则(21.4.4)变成变换

$$\xi^a \to \xi^{a\prime} = f^a(\xi, g) , \qquad (21.4.9)$$

$$\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}' = h(\xi, g)\tilde{\psi}$$
, (21.4.10)

其中h和f定义成

$$g\gamma(\xi) = \gamma\Big(f(\xi,g)\Big) h(\xi,g) , \qquad (21.4.11)$$

这里的h处在未破缺子群H中. 我们还需要解出 \tilde{A}_A^{μ} 的变换规则. 回忆, 根据方程(21.4.5), 在这些定 域变换下, 方程(21.4.2)中规范场的线性组合, 它的变换是

$$\sum_{A} T_A A_{A\mu} \to \sum_{A} T_A A'_{A\mu} = g \left[\sum_{A} T_A A_{A\mu} - ig^{-1} \partial_{\mu} g \right] g^{-1} .$$

给左边和右边分别乘以 $\gamma^{-1}(\xi')$ 和 $\gamma(\xi')$,并利用方程(21.4.7), (21.4.8)和(21.4.11),我们可以将其写成

$$i\sum_{A} T_{A}\tilde{A}'_{A\mu} = h(\xi,g) \left[i\sum_{A} T_{A}\tilde{A}_{A\mu} + \gamma^{-1}(\xi)[g^{-1}\partial_{\mu}g]\gamma(\xi) \right] h^{-1}(\xi,g) .$$
(21.4.12)

为了看到如何消掉非齐次项 $g^{-1}\partial_{\mu}g$,我们注意到,给方程(21.4.11)微分一次并左乘它的逆,我们就有

$$\gamma^{-1}(\xi')\partial_{\mu}\gamma(\xi') = h(\xi,g)\gamma^{-1}(\xi)[g^{-1}\partial_{\mu}g]\gamma(\xi)h^{-1}(\xi,g) + h(\xi,g)[\gamma^{-1}(\xi)\partial_{\mu}\gamma(\xi)]h^{-1}(\xi,g) + h(\xi,g)\partial_{\mu}h^{-1}(\xi,g) .$$
(21.4.13)

所以,为了抵消非齐次项,我们必须从方程(21.4.13)中减掉方程(21.4.12)

$$\gamma^{-1}(\xi')\partial_{\mu}\gamma(\xi') - i\sum_{A} T_{A}\tilde{A}'_{A\mu}$$

= $h(\xi,g)\left[\gamma^{-1}(\xi)\partial_{\mu}\gamma(\xi) - i\sum_{A} T_{A}\tilde{A}_{A\mu}\right]h^{-1}(\xi,g)$
 $-\left[\partial_{\mu}h(\xi,g)\right]h^{-1}(\xi,g)$. (21.4.14)

因此,我们定义新的规范协变量9708

$$\sum_{a} i \mathscr{D}_{a\mu} x_{a} + \sum_{i} i \mathscr{E}_{i\mu} t_{i} \equiv \gamma^{-1}(\xi) \partial_{\mu} \gamma(\xi) - i \sum_{A} T_{A} \tilde{A}_{A\mu}$$
(21.4.15)

它们的变换性质是

$$\mathscr{D}_{a\mu} \to \mathscr{D}'_{a\mu} , \qquad \mathscr{E}_{i\mu} \to \mathscr{E}'_{i\mu} , \qquad (21.4.16)$$

其中,同方程(19.6.26)以及(19.6.27)一样,

$$\sum_{a} \mathscr{D}'_{a\mu} x_a = h(\xi, g) \left(\sum_{a} \mathscr{D}_{a\mu} x_a \right) h^{-1}(\xi, g) , \qquad (21.4.17)$$

$$\sum_{a} \mathscr{E}'_{i\mu} t_i = h(\xi, g) \left(\sum_{i} \mathscr{E}_{i\mu} t_i \right) h^{-1}(\xi, g) + i \left(\partial_{\mu} h(\xi, g) \right) h^{-1}(\xi, g) .$$
(21.4.18)

我们可以用是构建物质场的完全协变导数

$$\mathscr{D}_{\mu}\tilde{\psi} = \partial_{\mu}\tilde{\psi} + \mathrm{i}\sum_{i} t_{i}\mathscr{E}_{i\mu}\tilde{\psi}$$
(21.4.19)

以及高阶导数, 例如 $\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$, 等等. 由于方程(21.4.12)中有非齐次项, 我们无法随意地给拉格朗日 量中引入 $\tilde{A}_{A\mu}$ 或是像(21.4.19)那样引入 $\tilde{A}_{\alpha\mu}$ 的协变导数. 然而, 很容易构造一个"旋度", 使得它在 定域 \mathcal{G} 变换以及整体G变换下均是协变的. 这个旋度是

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \equiv \sum_{B} D_{AB} \left(\gamma^{-1}(\xi) \right) \left(\partial_{\mu} A_{B\nu} - \partial_{\nu} A_{B\mu} - \sum_{CD} C_{BCD} A_{C\mu} A_{D\nu} \right) .$$
(21.4.20)

它在形式定域G变换下的变换是

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \to \tilde{F}'_{A\mu\nu} = \sum_{B} \mathscr{D}_{AB} \Big(h(\xi, g) \Big) \tilde{F}_{B\mu\nu} \ . \tag{21.4.21}$$

因此,如果拉格朗日量是作为 $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_{a\mu}$, $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$, $\tilde{F}_{A\mu\nu}$ 以及高阶协变导数的任意函数构建的,并且它满足整体H不变性,那么这个拉格朗日量在形式定域G变换下就是不变的.

现在我们回到真实情况,将 A_A^{μ} 看做有约束形式(21.4.3)的量子场. 方程(21.4.15)和(21.4.20)现 在变成

$$\sum_{a} i \mathscr{D}_{a\mu} x_{a} + \sum_{i} i \mathscr{E}_{i\mu} t_{i}$$
$$= \gamma^{-1} \partial_{\mu} \gamma(\xi) - i \sum_{AB\alpha} T_{A} D_{AB} \Big(\gamma^{-1}(\xi) \Big) e_{\alpha B} \mathscr{A}_{\alpha \mu}$$
(21.4.22)

和

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} = \sum_{B\alpha} D_{AB} \Big(\gamma^{-1}(\xi) \Big) e_{\alpha B} \mathscr{F}_{\alpha\mu\nu} , \qquad (21.4.23)$$

其中

$$\mathscr{F}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathscr{A}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\mathscr{A}_{\beta\mu} - \sum_{\gamma\delta}\mathscr{C}_{\beta\gamma\delta}\mathscr{A}_{\gamma\mu}\mathscr{A}_{\delta\nu} , \qquad (21.4.24)$$

*ピ_{βγδ}*是规范群的结构常数,它与G的结构常数的关系是

$$\sum_{CD} C_{BCD} e_{\gamma C} e_{\delta D} = \sum_{\beta} \mathscr{C}_{\beta \gamma \delta} e_{\beta B} . \qquad (21.4.25)$$

我们给拉格朗日量中引入该场的动能项,即通常的Yang-Mills项

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \mathscr{F}_{\alpha\mu\nu} \mathscr{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu} , \qquad (21.4.26)$$

其中,通过 $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ 的线性变换以及相应的 $e_{\alpha A}$ 的线性变换,我们将 $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}\mathcal{F}_{\beta}^{\mu\nu}$ 的系数调成了 $\delta_{\alpha\beta}$. $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$ 中的线性项就是 $\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\alpha\mu}$,所以方程(21.4.26)使得 $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ 是正则归一化矢量场.因此, 有效拉格朗日量被取成了 $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\psi}$ 和 $\mathcal{D}_{a\mu}$ 的函数,这个函数在整体H变换下不变,其它的可能项使 得 \mathcal{G} 守恒而不是G守恒,而其系数正比于两个或多个 $e_{\alpha A}$ 因子. 现在我们来看一看我们能用这些元素构建出什么样的微扰论. 我们知道, 在 $e_{\alpha A} \rightarrow 0$ 的极限下, 规范玻色子变成无质量粒子, 这时它们与经历对称性自发破缺的物质场退耦. 因此我们可以暂且假定, 当 $e_{\alpha A}$ 很小时, 它们的质量是eM阶的, 其中e是 $e_{\alpha A}$ 的一个特征值(生成元 T_A 已经归一化使得结构常数量级为1), 而M是导致自发对称性破缺的动力学的特征能量标度. 在我们将要考察的一般Feynman图中, 它所包含的规范玻色子以及Goldstone玻色子的能量或动量 $Q \leq eM$, 而所有能量更高的粒子以及质量更大的物质粒子都藏在对有效场论耦合常数的修正中. 这样, 我们的微扰论将是e和Q/M的幂级数展开. 沿用19.4—19.6节的分析, 在这样的图中, e的幂次和Q/M的幂次 的总数是

$$\nu = \sum_{i} V_i(d_i + e_i - 2) + 2L + 2 , \qquad (21.4.27)$$

其中 V_i 是*i*类顶角的个数; d_i 和 e_i 分别是*i*类相互作用中导数的个数和因子 $e_{\alpha A}$ 的个数; 而*L*是圈的 个数. 在约束(21.4.3)下, 场 $A_{A\mu}$ 或 $\tilde{A}_{A\mu}$ 会贡献一个e因子. 方程(21.4.15)表明每个Goldstone玻色 子协变导数 $\mathcal{D}_{a\mu}$ 会给 $d_i + e_i$ 贡献+1, 而方程(21.4.19)和(21.4.15)表明 $\mathcal{D}_{a\mu}$ 的每个额外的协变导数会 给 $d_i + e_i$ 贡献额外的+1. 拉格朗日量中允许的项均有 $d_i + e_i \ge 2$, 所以主导贡献来自于那些完全 由 $d_i + e_i = 2$ 的相互作用构建的树图(L = 0). 这样的相互作用只有Goldstone玻色子动能项

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \mathscr{D}_{a\mu} \mathscr{D}_{b}{}^{\mu} , \qquad (21.4.28)$$

Yang-Mills项(21.4.26), 以及关于 $e_{\alpha A}$ 二阶的可能的对称性破缺非导数项.

为了看到场 ξ_a 的物理含义,注意到 $\mathcal{D}_{\alpha\mu}$ 中的线性项是

$$(\mathscr{D}_{a\mu})_{\rm LIN} = \partial_{\mu}\xi_a - \sum_{\alpha} e_{\alpha a}\mathscr{A}_{\alpha\mu} . \qquad (21.4.29)$$

我们会在本章附录证明,我们总可以选择"幺正规范",使得对于所有的α,

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{\alpha b} = 0 , \qquad (21.4.30)$$

这使得方程(21.4.28)中的交叉项为零.为了阐释这一个条件的含义,考察所有破缺对称性均是规范对称性的特殊情况,任意的x_a均能写成规范生成元以及未破缺生成元的线性组合

$$\begin{aligned} x_a &= \sum_{\alpha} c_{a\alpha} \mathscr{T}_{\alpha} + \sum_i c_{ai} t_i \\ &= \sum_{\alpha} c_{a\alpha} \left(\sum_b e_{\alpha b} x_b + \sum_i e_{\alpha i} t_i \right) + \sum_i c_{ai} t_i \;, \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{\alpha} c_{a\alpha} e_{\alpha b} = \delta_{ab} \ .$$

用 $c_{\alpha b}$ 收缩方程(21.4.30),我们看到 $\xi_a = 0$;所以在这一规范下根本不存在Goldstone玻色子.更一般地,方程(21.4.30)留给我们的Goldstone玻色子不对应规范对称性. 它们中的一些Goldstone玻 色子所对应的G的元素被规范相互作用破缺了,因而它们的质量是规范耦合的二阶;它们被称作 赝Goldstone玻色子. 选择ξ使得幺正规范条件(21.4.30)得以满足,这样,拉格朗日量(21.4.28)的二次项部分就是

$$\mathscr{L}_{\xi})_{\text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \partial_{\mu} \xi_a \partial^{\mu} \xi_b - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \mathscr{A}_{\alpha\mu} \mathscr{A}_{\beta}{}^{\mu} , \qquad (21.4.31)$$

其中

(

$$\mu_{\alpha\beta}^{2} = \sum_{ab} F_{ab}^{2} e_{\alpha a} e_{\beta b} . \qquad (21.4.32)$$

它有两个重要的含义.其一,我们注意到 ξ_a 可以表示成正则正交归一化场 π_a ,即

$$\xi_a = \sum_b F_{ab}^{-1} \pi_b , \qquad (21.4.33)$$

其中 F_{ab} 是正定矩阵 F_{ab}^2 的正平方根. 这表明 F_{ab}^{-1} 是像 F_{π}^{-1} 这种伴随低能Goldstone玻色子发射和吸收的因子. 其二,既然 $\mathscr{A}_{\alpha\mu}$ 已经定义成了正则归一化场,方程(21.4.31)表明 $\mu_{\alpha\beta}^2$ 是矢量玻色子质量矩阵的平方,并且它对规范耦合的二阶是成立的,对于其它所有相互作用,则到任意阶都成立. 通过在方程(21.1.7)中使用(21.4.1),我们很容易看到之前的结果(21.1.7)是方程(21.4.32)的一个特殊情况,即

$$F_{ab}^2 = -\sum_{nml} (x_a)_{nm} (x_b)_{nl} v_m v_l \ .$$

方程(21.4.32)也可以认为是21.1节末尾所概述的连续性讨论(符号约定稍有不同)的基础. 它保证 了交换规范玻色子在零规范耦合极限下幸存的效应等于没有规范耦合时交换Goldstone玻色子产 生的效应.

一般情况下,我们无法计算矩阵 F_{ab}^2 ,但是我们知道这个矩阵在未破缺子群H下是不变的,也就是说

$$\sum_{d} \left[C_{ibd} F_{dc}^2 + C_{icd} F_{bd}^2 \right] = 0 \; .$$

这个条件使得我们可以对规范玻色子质量(21.4.32)施加一些有用的约束.

作为一个例子,我们来考察电弱规范群 $SU(2) \times U(1)$ 自发破缺到电磁规范群U(1)的情况. 三个破缺对称性的生成元 x_a 可以取为SU(2)的三个生成元(记做21.3节中的 t_1, t_2, t_3),这些生成元中不含耦合常数因子g,而未破缺的对称性生成元t可以取成电荷q,其中也不含因子e. 即,轻子双重态上的 x_a 和t表示成矩阵

$$\vec{x} = \frac{1}{4}(1+\gamma_5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},\$$
$$t = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么规范生成元就是

$$\vec{\mathscr{T}} = g\vec{x}$$
, $\mathscr{T}_y = g'(x_3 - t)$. (21.4.34)

即, x_a 在规范生成元 \mathcal{T}_{α} 中的非零系数 $e_{\alpha a}$ 是

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = g$$
, $e_{y3} = g'$.

另外,既然t使得3-矢x2经历了围绕3-轴的旋转,这个未破缺对称性要求矩阵F2加有非零分量

$$F_{11}^2 = F_{22}^2 \equiv F_C^2 \ , \qquad \quad F_{33}^2 \equiv F_N^2 \ .$$

根据方程(21.4.32),规范玻色子的质量平方矩阵就有非零元

$$\begin{split} \mu_{11}^2 &= \mu_{22}^2 = g^2 F_C \ , \qquad \mu_{33}^2 = g^2 F_N^2 \ , \\ \mu_{3y}^2 &= g \, g' \, F_N^2 \ , \qquad \qquad \mu_{yy}^2 = g'^2 F_N^2 \ . \end{split}$$

它的本征值是

$$m_W^2 = g^2 F_C^2$$
, $m_Z^2 = (g^2 + g'^2) F_N^2$, $m_A^2 = 0$. (21.4.35)

为了更进一步, 我们还需要 F_C 和 F_N 之间的关系. 如果在g = g' = 0的极限下, 这个理论在整体对称群G下不变, 其中群G比 $SU(2) \times U(1)$ 更大并自发破缺到子群H, 而H本身包含一个三维旋转使得x在这个旋转下像一个3-矢, 那么这个理论就会提供这样的关系. 这样的未破缺对称性会要求 F_{ab}^2 正比于 δ_{ab} , 因此

$$F_C = F_N$$

任何这样的对称性被称为"监督"对称性. 它使得m_Z/m_W拥有21.3节所讨论的成功公式给出的耦合常数形式

$$m_Z/m_W = \sqrt{1 + g'^2/g^2} = 1/\sin\theta$$
 (21.4.36)

例如, 在*SU*(2) × *U*(1)电弱理论的最简单版本中, 当规范耦合为零时, 标量二重态φ的拉格朗 日量(21.3.28)可以写成

$$(\mathscr{L}_{\phi})_{g=g'=0} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi_n\partial^{\mu}\phi_n - \frac{\mu^2}{2}\phi_n\phi_n - \frac{\lambda}{4}(\phi_n\phi_n)^2 ,$$

其中

$$\phi_1 \equiv \operatorname{Im} \phi^+ , \qquad \phi_2 \equiv \operatorname{Re} \phi^+ , \qquad \phi_3 \equiv \operatorname{Im} \phi^0 , \qquad \phi_4 \equiv \operatorname{Re} \phi^0$$

这个拉格朗日量自动地在"监督" $SO(4) \equiv SU(2) \times SU(2)$ 整体对称群下不变,而这个群被 $\operatorname{Re} \phi^0$ 的 真空期望值自发破缺到近似未破缺SO(3)监督子群.^[29]如果标量二重态不止一个,这时标量拉格 朗日量中的质量项以及相互作用项一般不遵循监督对称性,但是整个推导中只涉及了动能项,而 动能项总是拥有整个SO(4)对称性,所以结果(21.4.36)依旧是成立的.

在其它理论中也发现了监督对称性.例如,考察这样的理论,没有标量场,取而代之,有新的加强矢量规范相互作用,^[30]这样的相互作用称作拟色(technicolor)相互作用,它作用在"拟夸克"(techniquarks) U_r 和 D_r 所构成的新 $SU(2) \times U(1)$ 二重态(U_r, D_r)上,其中r是拟色指标.只要 U_r 和 D_r 的左手部分和右手部分在拟色规范群下均以相同的方式变换,那么在电弱耦合为零的极限下,拉格朗日量在群 $SU(2) \times SU(2)$ 下就是不变的,其中两个SU(2)分别独立地作用在左手拟夸克二重态和右手拟夸克二重态上.根据19.9节中的讨论,既作用在拟夸克二重态的左手部分,又作用在拟夸克二重态的右手部分上的同步SU(2)变换,它们所构成的子群 $SU(2)_V$ 是不会自发破缺的. 正如色相互作用会导致(u夸克和d夸克质量为零的)量子色动力学的手征 $SU(2) \times SU(2)$ 对称性会自发破缺到它的同位旋子群,我们可以很合理地假定拟色相互作用将会导致 $SU(2) \times SU(2)$ 自发破缺到 $SU(2)_V$.在未破缺对称性 $SU(2)_V$ 下,电弱生成元x和⑦像3-矢那样旋转,这又一次给出关系 $F_C = F_N$,从而成功地预测了W质量和Z质量之间的关系. 拟色的想法是很吸引人的, 这是因为, 物理的基本标度一般假定(例如在弦理论中)是Planck质量的能级, 大约为10¹⁸ GeV, 与这个标度相比, 电弱对称性破缺的特征标度非常小, 而拟色提供了一个自然的机制来解释为什么电弱对称性在这个标度破缺. 在这里只需假定, 在基本标度之下只有一个未破缺规范群, 这个规范群由强作用和电弱作用的*SU*(3) × *SU*(2) × *U*(1)群和一个拟色规范群构成, 它们的耦合常数相对较小. 如果拟色相互作用是渐进自由的, 那么同QCD色耦合一样, 拟色耦合会随着能量降低缓慢增强, 在某个远小于基本标度的能量处会变得非常强. 若能量所处的区间使得拟色耦合变得很强, 那么这个能量就为我们的公式(21.4.32)中出现的参量, 即规范玻色子质量, 设置了标度, 因此其量级可以假定为300 GeV. 既然耦合随着能量降低对数增长, 只要拟色耦合β-函数与色耦合β-函数的差大小适中, 这个差就能轻易地填补拟色力变强的标度与色力变强的标度之间的三阶量级差.

不幸的是,尽管拟色为SU(2) × U(1)的自发破缺提供了非常吸引人的图景,但它本身并没有 一个机制可以赋予夸克和轻子质量.由于这个原因,可以增加额外的"扩展拟色"规范相互作用,它 的变换连接了夸克和拟夸克.^[31]这样的理论会有潜在的问题,例如存在改变味的弱相互作用中性 流,尽管这些问题可以被克服,理论为此会变得更加复杂使得它反而不那么吸引人.基本弱耦合标 量以及对称性的动力学破缺到现在依旧是一个公开的问题.

21.5 电弱作用—强作用的统一理论

我们在15.2节看到, 规范理论对于规范群的每个单子群以及每个U(1)子群会有一个独立的 耦合常数.因此,基于规范群 $SU(2) \times U(1)$ 的电弱理论会有两个独立的耦合, $g \pi g'$.为了减 少自由参量的个数,可以认为^[32] $SU(2) \times U(1)$ 规范群嵌入在一个单纯SU(3)规范群中, 这会给 出 $g' = g/\sqrt{3}$, 但这种可能性被实验排除了.在发现量子色动力学之后,理论家面对的是规范 群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, 它有三个独立的规范耦合常数:量子色动力学的耦合 g_s , 以及电弱相互 作用的耦合 $g \pi g'$.为了将这些耦合常数约化至一个自由参量,一般要将 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌 入在各种单Lie群中:* $SU(4) \times SU(4)$,^[33]SU(5),^[34]或SO(10).^[35]这样的模型通常被称为大统一 理论.

幸运的是, 仅对SU(3) × SU(2) × U(1)的耦合常数之比而言, 这些模型以及其它一大类模型所 给出的结果并不依赖于单个模型的细节.^[36] 这类模型可以由如下的性质表征: 观测到的每代夸克 以及轻子是模型中唯一的费米子, 即使不是, 它们至少在SU(3) × SU(2) × U(1)下也要是中性的.

正如15.2节所证明的,对于任何紧致单Lie群,对生成元*T*_α有一个传统的选择使得结构常数全 反对称,这时每个可约表示或不可约表示*D*满足归一化条件:

$$\operatorname{Tr}\{T_{\alpha}T_{\beta}\} = N_D \delta_{\alpha\beta} . \tag{21.5.1}$$

^{*}群SU(4) × SU(4)可以通过在两个SU(4)中引入一个离散对称算符构造出来,这个离散算符的作用是交换两 个SU(4).

我们假定所有左手费米子构成ng代:



SU(3)生成元 $\frac{1}{2}g_s\lambda_3$ 拥有如下的本征值:对于红色夸克二重态和白色反夸克单态拥有本征值+ $\frac{1}{2}g_s$; 对于白色夸克二重态和红色反夸克单态有本征值– $\frac{1}{2}g_s$;对于所有其它左手费米子则有本征值零; 所以它的平方的迹是

$$\operatorname{Tr}(\frac{1}{2}g_s\lambda_3)^2 = 4n_g \times (\frac{1}{2}g_s)^2 + 4n_g \times (-\frac{1}{2}g_s)^2 = 2n_g g_s^2 .$$
(21.5.2)

SU(2)生成元 t_3 拥有如下的本征值: 对于中微子以及带 $\frac{2}{3}$ 电荷的红色夸克, 白色夸克和蓝色夸克有本征值 $\frac{1}{2}g$; 对于带电轻子以及带 $-\frac{1}{3}$ 电荷的红色夸克, 白色夸克和蓝色夸克有本征值 $-\frac{1}{2}g$; 对于其它所有费米子则为零, 所以它的平方有迹

$$\operatorname{Tr}(t_3)^2 = [3n_g + n_g] \times [(\frac{1}{2}g)^2 + (-\frac{1}{2}g)^2] = 2n_g g^2 .$$
(21.5.3)

最后, U(1)生成元 $y = t_3 - q$ 拥有如下的本征值: 对于中微子以及带电轻子为 $\frac{1}{2}g'$; 对于带电反轻子 为-g'; 对于夸克为 $-\frac{1}{6}g'$; 对于带 $-\frac{2}{3}$ 电荷的反夸克为 $\frac{2}{3}g'$; 对于带 $\frac{1}{3}$ 电荷的反夸克为 $-\frac{1}{3}g'$, 所以它的 平方有迹

$$\operatorname{Tr} y^{2} = 2n_{g}(\frac{1}{2}g')^{2} + n_{g}(-g')^{2} + 6n_{g}(-\frac{1}{6}g')^{2} + 3n_{g}(\frac{2}{3}g')^{2} + 3n_{g}(-\frac{1}{3}g')^{2}$$
$$= \frac{10}{3}n_{g}g'^{2} . \qquad (21.5.4)$$

方程(21.5.1)要求迹(21.5.2)—(21.5.4)均相等,所以在这类将SU(3) × SU(2) × U(1)嵌入进一个 单Lie群的模型中,会给耦合常数附加如下的关系

$$g_s^2 = g^2 = \frac{5}{3}g'^2 \ . \tag{21.5.5}$$

现今, 方程(21.5.5)与耦合常数的观测值完全不一致. 比值 $g'^2/g^2 = \frac{3}{5}$ 给出电弱混合角sin² $\theta \equiv g'^2/(g^2 + g'^2) = \frac{3}{8}$, 而实验值是sin $\theta = 0.231$. 更糟的是, 强作用耦合 g_s^2 显然远大于 $g^2 \pi g'^2$.

解决这一问题的方法^[36]是:当单纯规范群自发破缺到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 时,部分规范玻 色子会获得特征质量 $M^{[47]}$,而仅当测量耦合所处的能量标度与M不相上下时,类似方程(21.5.5)这 样的耦合常数关系才是成立的.如果测量耦合所处的能量E远小于M,那么就会一个很大的正比 于 $\ln(M/E)$ 的辐射修正. 正如第19章所强调的, 若耦合是在两个邻近的能量 μ 和 μ – d μ 处测量的, 那么在它们的关系中就没有大对数, 所以, 对这一关系从M往下积到E, 我们就能避开大对数从而计算出能量 $E \ll M$ 处的耦合.为了实现这一点, 我们只需要耦合在整个积分范围内都很小这个条件. 对于有 n_g 代费米子的 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 耦合, 方程(18.7.2)给出**

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_s(\mu) = -\frac{g_s^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{n_g}{3}\right) , \qquad (21.5.6)$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{6} - \frac{n_g}{3}\right) , \qquad (21.5.7)$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g'(\mu) = -\frac{g'^3(\mu)}{4\pi^2} \left(-\frac{5n_g}{9}\right) \ . \tag{21.5.8}$$

这些方程的解是

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{4n_g}{3}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) , \qquad (21.5.9)$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{22}{3} - \frac{4n_g}{3}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) , \qquad (21.5.10)$$

$$\frac{1}{g^{\prime 2}(\mu)} = \frac{1}{g^{\prime 2}(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{20n_g}{9}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) .$$
(21.5.11)

另外, 方程(21.5.5)应该解释成

$$g_s^2(M) = g^2(M) = \frac{5}{3}g'^2(M)$$
 (21.5.12)

因此,我们可以消掉耦合(21.5.12)和代的个数,其一是从方程(21.5.9)中减掉方程(21.5.10):

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu)} = -\frac{11}{24\pi^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) , \qquad (21.5.13)$$

其二是从方程(21.5.10)中减掉3/5倍的方程(21.5.11):

$$\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{3}{5g'^2(\mu)} = -\frac{11}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) .$$
 (21.5.14)

取这两个方程的比值,这给出了sin² $\theta \equiv g'^2/(g^2 + g'^2)$ 的公式:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{6} + \frac{5e^2(m_Z)}{9g_s^2(m_Z)} . \tag{21.5.15}$$

在这个公式中,我们取 μ 为测量sin² θ 的过程的特征能量,即, $\mu \approx m_Z$.它的好处是我们所用的重整 化群方程(21.5.6)—(21.5.8)将处在 m_Z 的上方,在这个能量范围内, $SU(2) \times U(1)$ 对称性破缺对这 些方程的影响不大.综合方程(21.5.13)和(21.5.14),我们还能给出大统一标度M的一个公式:

$$\ln\left(\frac{M}{m_Z}\right) = \frac{4\pi^2}{11e^2} \left(1 - \frac{8e^2(m_Z)}{3g_s^2(m_Z)}\right) , \qquad (21.5.16)$$

^{**}若直接用方程(18.7.2)和(18.7.3)进行计算,那么方程(21.5.6)和(21.5.7)括号中的第二项应该是 $-n_f/6$,这里的 n_f 是 各个SU(N)规范群定义表示中费米子的数目.但是这个计算基于如下的假定:左手费米子和右手费米子处在规范群的 同一表示中.如果我们只计数左手费米子(以及反费米子),那么方程(21.5.6)和(21.5.7)括号中的第二项应该是 $-n_f/12$. 对于SU(3),每代有两个左手夸克三重态和两个左手反夸克三重态,所以 $n_f = 4n_g$,但对于SU(2),每代有3个左手夸 克二重态和一个左手轻子二重态,所以依然有 $n_f = 4n_g$.对于U(1),β-函数是 $g'/24\pi^2$ 乘以左手费米子以及反费米子 的 $U(1)荷的平方和(对比方程(18.2.38)),而根据方程(21.5.4),这是(<math>g'/24\pi^2$)×(10 $n_gg'^2/3$).

其中,为了避免电弱对称性破缺影响重整化群方程,我们依旧取mz阶的µ.

我们在18.2节看到, $e(\mu)$ 在 $\mu \approx m_Z$ 处的值是 $e(m_Z)^2/4\pi = (128.87 \pm 0.12)^{-1}$. 这是用真空极化 定义的电荷, 是传统(Gell-Mann-Low)形式. 为了与 g_s , $g' \pi g$ 进行比较, 更好的做法是使用修正最 小减除(像18.6节中那样)定义的耦合: $e(m_Z)^2/4\pi = (127.9 \pm 0.1)^{-1}$. 方程(21.5.13)和(21.5.14)中 最大的不确定性来自于 $g_s^2(m_Z)$ 的值. 正如我们18.7节讨论过的, 从低能数据外推出的 g_s 给 出 $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118 \pm 0.006$, 但是直接测量 Z^0 到强子的衰变速率给出 $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.120 \pm 0.0025$. 对于 $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118 \pi e(m_Z)^2/4\pi = 1/128$, 方程(21.5.15)和(21.5.16)给出sin² $\theta = 0.203 \pi M \approx 1.1 \times 10^{15}$ GeV.

在描述普通能量下的物理的有效作用量中,不可重整项被压低了,正如我们在21.3节所提及的,我们没有什么理由期待不可重整项依旧使得重子数和轻子数守恒,所以我们预期会出现一个(*SU*(3) × *SU*(2) × *U*(1))守恒的四费米子(3个夸克和1个轻子)相互作用,基于量纲分析,相互作用的系数应该是*M*⁻²阶.依次为基础首次估计出了质子寿命,其量级大约是10³²年.^[36]在参考文献33—35的模型中以及这一类的模型中,交换质量为*M*阶的规范玻色子会给出这种重子数不守恒以及轻子数不守恒的四费米子相互作用.更一般地,一旦标准模型解释了为什么重子数不守恒过程被自然地压低了,就再也没有任何理由相信重子数或轻子数是精确守恒的.

我们看到预测值(21.5.15)与sin² θ 的测量值相当接近. 但是现在测量和计算的精确度都足以表明它们并非完全一致. 超对称理论中出现的额外粒子会移除这个偏差,^[36a]并给出 $M \simeq 2 \times 10^{16}$ Gev, 比之前大约大一个数量级.^[36b] 非常有趣的是, 这个M与10¹⁸ GeV相差的不是特别大, 而这时引力相互作用变强了. 由于质子寿命正比于 M^4 , 这个更大的M还延长了质子寿命.

21.6 超导^{*}

与本书的主要研究对象——基本粒子相比,超导是一个相当不同的现象,但是这个现象值得 我们对此进行一些考察,一方面是因为这是最早的规范对称性自发破缺的真实例子,另一方面,作 为一个特别有启发性的例子,它体现出了有效场论以及拓扑方法在场论中的威力.

所谓超导体,就是电磁规范不变性自发破缺的材料.^{**} 若要解释这一对称性为什么破缺以及 在什么温度破缺,我们还需要细致的动力学理论,但是若目的是推导超导体的最显著特征,例如完 全抗磁性,通量量子化,零电阻,两个不同电压超导体层隙上的交流电,这样的动力学理论是不必 要的.我们将会看到,类似我们对软π介子的处理方法,我们仅依靠Goldstone模式的一般性质就可 以解出这些规范不变性破缺造成的结果.^[39]

任意系统的作用量在规范变换下不变, 而规范变换在cgs单位制下的形式是

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x) ,$$
 (21.6.1)

$$\psi_n(x) \to \exp\left(iq_n\Lambda(x)/\hbar\right)\psi_n(x) ,$$
 (21.6.2)

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

^{**}在历史上,这并非大多数专家对超导体持有的看法.尽管在早期的唯像理论中,电磁规范不变性就已经被破坏了, 但是这一点更多地被看成是一种干扰而不是启发.Bardeen(巴丁),Cooper(库珀)和Schrieffer(施里弗)^[37]的原创性论 文中首次给出了超导体的微观理论,但是对称性破缺却从未提起过.Anderson(安德森)^[38]随后强调了破缺对称性在超 导体中的重要作用,然而,即使在今天,大多数教科书用细致的动力学模型来解释超导,对称性破缺却鲜少提及.

其中 $\Lambda(x)$ 是任意函数, 而 q_n 是场 ψ_n 消灭的电荷. 所有电荷均假定是电子电荷–e的整数倍, 所以规范群是紧致的: Λ 和 $\Lambda + 2\pi\hbar/e$ 被视为等价的相位. 在超导体中, 这个对称群被携带电荷–2e的算符(例如两个电子场的乘积)的真空期望值破缺, 所以存在一个未破缺的 Z_2 子群, 它由 $\Lambda = 0$ 和 $\Lambda = \pi\hbar/e$ 的规范变换构成.

我们引入Goldstone玻色场 $\phi(x)$,方法是将所有带荷场写成

$$\psi_n(x) = \exp\left(iq_n\phi(x)/\hbar\right)\tilde{\psi}_n(x) . \qquad (21.6.3)$$

场 $\phi(x)$ 参数化了陪集空间 $U(1)/Z_2$,所以它被赋予了规范变换性质

$$\phi(x) \to \phi(x) + \Lambda(x)$$
 . (21.6.4)

由于 $\phi(x)$ 参数化的是 $U(1)/Z_2$ 而不是U(1),我们要将 $\phi(x) + \pi\hbar/e$ 等同为 $\phi(x)$.所有 $\tilde{\psi}_n(x)$ 都是 规范不变的,所以积掉它们后留下的拉格朗日量仅是 ϕ 和 A^{μ} 的泛函并且规范不变.由此得出, Goldstone场和电磁场的拉格朗日量可以写成

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_s [A_\mu - \partial_\mu \phi] , \qquad (21.6.5)$$

其中L_s是不完全知道的泛函.这里的电流和电荷密度是

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)} , \qquad (21.6.6)$$

$$J^{0}(x) = -\frac{\delta L_{s}}{\delta A^{0}(x)} = -\frac{\delta L_{s}}{\delta \dot{\phi}(x)}$$
(21.6.7)

那么Goldstone玻色场的运动方程就是

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L_s}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\delta L_s}{\delta \phi(x)} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)} , \qquad (21.6.8)$$

根据方程(21.6.6)和(21.6.7),这等价于电荷守恒律

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} J^0 = 0 \ . \tag{21.6.9}$$

现在,我们来看一下这个形式理论是如何解释超导体的超常性质.关于 L_s ,我们仅需要假定系统在没有Goldstone场或者外电磁场时是稳定的,这使得能量在 $A_{\mu} = \partial_{\mu}\phi$ 处是极小值,并且它对 $A_{\mu} - \partial_{\mu}\phi$ 的二阶导数不为零.

一个显然的结果是,在很大的超导体的内部,边界条件变得不重要的地方,电磁场是纯规范:

$$A_{\mu} = \partial_{\mu}\phi , \qquad (21.6.10)$$

特别地,这使得磁场必须为零.这称为*Meissner*(迈斯纳)效应.对于所谓的"超导体的内部",我们可以稍微做一些定量描述.当方程(21.6.10)满足时,能量是最小值,所以对于比较小的 $|\mathbf{A} - \nabla \phi|$,能量的量级必须是 $|\mathbf{A} - \nabla \phi|^2 L^3 / \lambda^2$,其中 λ 是某种长度,它依赖材料的特性,而 L^3 是超导体的体积.如果一个量级为B的磁场穿透了超导体,那么 $|\mathbf{A} - \nabla \phi|$ 的量级就是*BL*,所以允许磁场进入超导体所耗费的能量在量级是 $B^2 L^5 / \lambda^2$.另一方面,从体积为 L^3 的超导体中将磁场B驱逐出去耗费的能

量在量级上是 B^2L^3 .因此,如果 $B^2L^5/\lambda \gg B^2L^3$,换句话说,如果 $L \gg \lambda$,那么超导体会将弱磁场 从内部驱逐出去.由于这个原因, λ 被称为超导体的穿透深度(*penetration depth*).

基于能量的相同考察告诉我们,对于任何超导材料,存在临界磁场,当磁场强度在此之上时, 超导性就消失了.若材料在零磁场下有超导性,这意味着单位体积材料在正常状态下所拥有的能 量高于它在超导态下拥有的能量,假定这个能量差为Δ.当一个线性尺度远大于λ的超导体处在磁 场B中时,大部分磁场都被排除出去了,单位体积所耗费的能量是*B*²/2.因此,从能量方面考虑, 当且仅当磁场低于临界值

$$B_c = \sqrt{2\Delta} , \qquad (21.6.11)$$

这个材料才能处在超导态上. (这是均匀超导体的情况. 我们会在下面看到, 对于特定种类的超导体, 通过形成狭窄的涡旋线, 可以使得有限范围内的磁场在 B_c 在上, 涡旋线的核心是正常金属, 但大部分材料依旧持有超导性.) 对于 $B < B_c$ 的磁场, 它会渗入超导体, 穿透的深度是 λ , 但这并不会破坏这一层上的超导性; 实际情况也确实如此, 正如场方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$ 所表明的, 超导体中流淌的电流就在表面这层上.

考察一个粗超导线,其厚度远大于 λ ,现在将这个超导线弯成闭合的圈.在线的内部我们可以 指出一个闭合的围道 \mathscr{C} , $|\mathbf{A} - \nabla \phi|$ 在这个围道上必须为零.这并不意味着 \mathbf{A} 或 ϕ 在这个围道上为零, 但我们清楚的是, ϕ 沿着这个围道走一圈必须回到它的等价值,因而只能相差 $n\pi\hbar/e$,其中n是整数. 这样,由Stokes定理可以得出,对于 \mathscr{C} 所围绕的曲面 \mathscr{A} ,穿过 \mathscr{A} 的磁通量必须服从通量量子化规则

$$\int_{\mathscr{A}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_{\mathscr{C}} \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{n\pi\hbar}{e} .$$
(21.6.12)

保持磁通量(21.6.12)的电流流淌在厚度为λ的层中,而这个电流层就在超导体表面的下部. 通量的量子化表明这个电流不能光滑地衰减,但是它可以跳跃式的衰减使得通量(21.6.12)减 少πħ/e的整数倍,所以在超导体中没有通常意义下的电阻.

通过考察超导体中的时间相关效应,我们可以证明,在比闭合圈更普遍的情况中,超导体中依 然没有电阻. 注意到方程(21.6.7)可以解释为如下的陈述: $-J^0$ 正则共轭于 ϕ . 因此哈密顿量 H_s 应 该视为 ϕ 和 J^0 的泛函而非 ϕ 和 ϕ 的泛函,而 ϕ 的时间相关性由哈密顿方程给出

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H_s}{\delta(-J^0(x))}$$
 (21.6.13)

现在,任意点的"电压"V(x)正是是该点能量密度对电荷密度的变化率,所以方程(21.6.13)给出了Goldstone玻色场的时间相关性

$$\dot{\phi}(x) = -V(x)$$
 . (21.6.14)

由此得出,对于一段超导线,若它携带稳定的电流,且场与时间无关,那么它两端的电压差必须为零,若非如此, $\phi(x)$ 就会有一个与时间相关的梯度.电压差对于有限大的电流却为零,这正是零电阻的含义.

现在考察这样的情况:在两片超导体材料之间有一段空隙.由于沿着空隙表面没有任何梯度 或矢量势,规范不变性要求 L_s 只能依赖于两个超导体中Goldstone玻色场的差 $\Delta \phi$:

$$L_{\text{junction}} = \mathscr{A}F(\Delta\phi) , \qquad (21.6.15)$$

其中*A*是结(junction,即两个超导体接合的部分)的面积.更进一步,在不带来任何物理效应的前提下,我们可以将任意一个超导体中的φ偏移πħ/e的整数倍,所以函数F必须是周期的:[†]

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + \pi\hbar n/e) . \qquad (21.6.16)$$

将结放在矢量势**A**中,通过考察这样的情况,我们可以计算出流经空隙的电流.那么,在这样的情况下,规范不变性告诉我们,取代 $\Delta\phi$,函数*F*必须依赖于

$$\Delta_A \phi = \int \mathrm{d} \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \phi - \mathbf{A}) \; ,$$

这个积分取在连接两个超导体的线上. 那么方程(21.6.6)表明电流密度是

$$\mathbf{J} = \frac{\delta L_{\text{junction}}}{\delta \mathbf{A}} = -\mathbf{\hat{n}} F'(\Delta_A \phi) ,$$

其中n是垂直于空隙的单位矢量. 我们现在可以去掉矢量势, 得到电流

$$\mathbf{J} = -\mathbf{\hat{n}}F'(\Delta\phi) \ . \tag{21.6.17}$$

如果我们现在假定两个超导体持有均匀的电压,且电压差是 ΔV ,那么,根据方程(21.6.14), Goldstone玻色场的差会有时间相关性

$$\Delta \phi = -t\Delta V + \Bar{\$} \Bar{\$} \Bar{\$} \Dar{\$} \Dar{\$} (21.6.18)$$

在方程(21.6.17)中使用上式并回顾方程(21.6.16),我们看到电流在振荡,振荡频率是

$$\nu = e|\Delta V|/\pi\hbar . \qquad (21.6.19)$$

这是交流约瑟夫森效应.^[40] 对频率和电压的测量可以有非常高的精确度,所以这个效应为测量常数*e*/ħ提供了一个非常精确的方法.

正如19.6节末尾所指出的,对于对称性破缺的系统,当这个系统被带到破缺对称性即将变成未 破缺对称性的临界点附近,仅用Goldstone模式描述这个系统是不够的.这种情况下,Goldstone模 式在长波长极限下会伴随着几个频率接近于零的模式,这几个模式与Goldstone模式合起来构成了 规范群的一个线性表示,这种表示通常是不可约的,而这些模式被称为序参量.由于任何的非定 域性都由微观距离尺度(例如电子-电子平均间隔)表征,与电磁场和Goldstone场产生变化的尺度 相比,这个尺度要小得多,所以有理由假定,缓慢变化外场中的超导体可以用一个定域序参量进行 描述.对于超导体,这个序参量的性质没有什么疑问.U(1)群的非平庸不可约线性表示只能是一 个实2-矢 ψ_n ,或者等价的Goldstone模式 ϕ 和模长场 ρ ,它们的关系是

$$\psi_1 + \mathrm{i}\psi_2 = \rho \exp\left(2\mathrm{i}e\phi/\hbar\right) \equiv \psi$$
 (21.6.20)

为了使得 ψ_n 在 $\Lambda = \pi\hbar/e$ (没有更小的 Λ)的规范变换下标不变,指数中i ϕ 的系数必须是 $2e/\hbar$.对于近 似均匀且时间无关的系统,当其处在对称性破缺相变附近时,序参量很小并且在空间中的变化很 小,所以外矢势**A**中的拉格朗日量可以近似(从现在起使用 $\hbar = 1$ 的自然单位值)为

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \left(\nabla \psi_n - 2ie \, t_{nm} \mathbf{A} \psi_m \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \psi_n \psi_n - \frac{1}{4} g(\psi_n \psi_n)^2 \right] \,, \tag{21.6.21}$$

[†]Josephson计算出了这个函数,^[40] 他发现这个函数正比于 $\cos(2e\Delta\phi/\hbar)$,但这是个近似结果,不过周期性是精确的.
其中t是厄米U(1)生成元

 $t = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{array}\right) \;,$

为了给出有下界的哈密顿量, g必须取成正数. 这是超导性的 Ginzburg-Landau 理论.^[41] 从下面将 要呈现的超导体的微观理论出发, 假定短程势并假定温度在材料将要丢失超导性的临界温度附近, Gor'kov^[42]在这一情况下导出了这个理论.

以ρ和φ的形式, 方程(21.6.21)变成

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-2e^2 \rho^2 \left(\nabla \phi - \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{2}m^2 \rho^2 - \frac{1}{4}g\rho^4 - \frac{1}{2} \left(\nabla \rho \right)^2 \right] , \qquad (21.6.22)$$

那么场方程变成

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = 4e^2 \rho^2 (\boldsymbol{\nabla} \phi - \mathbf{A}) , \qquad (21.6.23)$$

$$\nabla^2 \rho = -m^2 \rho + g\rho^3 + 4e^2 \rho (\nabla \phi - \mathbf{A})^2 . \qquad (21.6.24)$$

如果场方程对于 $\rho \neq 0$ 是满足的, 那么U(1)对称性就破缺了, $m^2 > 0$ 的无外场各项同性材料就是这样的情况, 在这种情况下 ρ 取值 $\langle \rho \rangle = m/\sqrt{g}$. 前面穿透深度 λ 的定义是 $-\frac{1}{2}(\nabla \phi - \mathbf{A})^2$ 系数的平方根的倒数, 所以

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4e^2 \langle \rho \rangle^2}} = \frac{\sqrt{g}}{2em} \ . \tag{21.6.25}$$

根据方程(21.6.23),这个长度表征了磁场开始发生变化的距离.另一方面,表征模长ρ发生变化的 距离尺度称为关联长度,根据方程(21.6.24),它是^{††}

$$\xi = 1/m\sqrt{2} . \tag{21.6.26}$$

另外, $\rho = \langle \rho \rangle$ 的超导态与 $\rho = 0$ 的正常态相比, 它每单位体积所拥有的能量要少

$$\Delta = \frac{1}{2}m^2 \langle \rho \rangle^2 - \frac{1}{4} \langle \rho \rangle^4 = m^4/4g . \qquad (21.6.27)$$

从方程(21.6.25)—(21.6.27)中消掉参量 $m \pi g$,我们发现了可观测量 λ , $\xi \pi \Delta$ 之间一个重要的近似 关系:

$$\Delta \simeq \frac{1}{8e^2\lambda^2\xi^2} \ . \tag{21.6.28}$$

在超导涡旋线的动力学中, 模长场变得非常重要. 对于特定类型的超导体, 当其所处的磁场足够强使得在能量上允许磁通量管可以穿透材料, 它们就会出现, 而这种磁通量管被称为涡旋线.^[43] (涡旋线出现的条件会在下面进行讨论.) 我们围绕通量管在距离远大于穿透深度的地方画一条闭合的曲线%, 在这里磁场为零, 重复方程(21.6.12)中的讨论, 我们看到穿过%围绕的面积 \checkmark 的磁通量等于围绕曲线的荷 ϕ , 因而等于通量量子 π/e 的整数倍, 与流经一个厚超导环的磁通量相同. 在这里这个通量不为零, 在每个通量管内部都必须有一条线使得电磁规范不变性在这条线上是未破缺的. 为了看到这点, 注意到, 如果我们将曲线%收缩至强磁场区域, $\nabla \phi = \mathbf{A}$ 不再成立, 但是 ϕ 围绕曲线的变化必须仍然是 π/e 的整数倍, 所以, 根据连续性, 它是不可能发生变化的. 因此, 我们最后必然会遇到一条线(可想象的有限厚度), ρ 在这条线上为零, 这使得 ϕ 的定义变得病态的. (这是

^{††}给m乘了因子 $\sqrt{2}$ 是因为方程(21.6.24)中的函数 $-m^2\rho + g\rho^3$ 在 $\rho = \langle \rho \rangle$ 处的导数是 $2m^2$.

我们将在第23章所要使用的一类拓扑推理中的一个基础例子.) 在这条线附近我们必须将ρ和φ视 为动力学变量.

磁通量量子化表明, 拥有最小通量 π/e 的超导涡旋线是稳定的. 拥有更高通量的涡旋线无法简简单单地凭空消失, 但是磁通量量子化自身并不能阻止这个涡旋线分裂成通量更小的涡旋线. Bogomol'nyi^[43a]证明了, 仅当 $\lambda > \xi$ 时, 对于通量 $n\pi/e$ 的涡旋线, 其中n > 1, 它分裂成n个通量为 π/e 的涡旋线会更稳定.

由于这个原因以及其它几个原因,可以方便地将超导体分为两类: $\xi > \lambda$ 的I型超导体(除了铌 以外的绝大多数纯金属),以及 $\lambda > \xi$ 的II型超导体(铌以及绝大多数合金).在电弱标准模型中,相 应的区分是标量质量(类似于1/ ξ)是小于还是大于W以及Z质量(类似于1/ λ).

从关联长度ξ以及穿透深度λ的定义中,我们可以推出,模长参量将会从涡旋中心线处的零往 上升,当它从中心线往外走大约关联长度ξ这样长的距离后到达它的均衡值 $\langle \rho \rangle$,而磁场会从中心线 往外开始衰减,大约到穿透深度λ处就几近为零.因此,在 $\xi \gg \lambda$ 的I型超导体中,涡旋解的结构是: 内部的细圆柱接近正常的金属,在这层中磁场掉落至零,外层环绕的圆筒很厚,模长参量在这个圆 筒中升至它的渐进值 $\langle \rho \rangle$.与之相反的是,涡旋在 $\lambda \gg \xi$ 的II型超导体中的结构是:内部的圆柱中是 常磁场,模长参量在这层中升至它的渐进值 $\langle \rho \rangle$,而外层环绕的是厚得多的超导材料,这层中磁场 掉落至零.对于两种超导体以及任意的磁场,涡旋解总是存在的,但是正如我们即将要看到的,仅 对于II型超导体以及有限范围的磁场强度,从能量上看才是倾向产生涡旋线的.

每个涡旋线横截面面积大约是 $\pi\xi^2$ 的量级,在截面内,材料处在正常态或者接近正常态,所以 为了制造这些涡旋线单位体积所要求的额外能量大约是 $\mathcal{N}\pi\xi^2\Delta$,这里 \mathcal{N} 是单位面积中涡旋线的 数目.涡旋线的密度限制在 $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$,若非如此,正常金属的圆柱层会重叠,而这时视材料处在 它的正常态上.如果 $\mathcal{N} < 1/\pi\lambda^2$,1 – $\mathcal{N}\pi\lambda^2$ 的材料中的磁场会被排除出去,如果 $\mathcal{N} > 1/\pi\lambda^2$,全 部材料中的磁场会被排除出去,所以,相对于无磁场时的超导态,单位体积涡旋态的能量是

$$W_V \approx \mathcal{N}\pi\xi^2 \Delta + \frac{1}{2}B^2 \times \begin{cases} 1 - \mathcal{N}\pi\lambda^2 & \mathcal{N} \le 1/\pi\lambda^2 \\ 0 & \mathcal{N} \ge 1/\pi\lambda^2 \end{cases} .$$
(21.6.29)

(这里保留 $\frac{1}{2}$ 和π这样的数值因子是为了提醒读者这些表达式的起源,但不宜过分看重.)相较于超导态,正常金属单位体积能量超出的部分是 $W_N = +\Delta$,而为了将所有磁场从超导体中排除出去,单位体积需要的能量是 $W_S = B^2/2$.对于给定的磁场,通过找出 W_S , W_N 和 W_V 中最小的那一个,我们可以决定出材料处在那个态上.

在I型超导体中,我们必须要对大于临界值 $B_c \equiv \sqrt{2\Delta}$ 的磁场和小于临界值 B_c 的磁场进行 区分. 回忆起我们有 $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$,而I型超导体又有 $\xi > \lambda$,所以我们有 $\mathcal{N} < 1/\pi\lambda^2$.因此 当 $B < B_c$ 时,方程(21.6.29)给出 $W_V > \frac{1}{2}B^2 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)\Delta > W_S$,所以不可能存在超导态.另 外,对于这样的场, $W_N > W_S$,所以材料处在超导态上.另一方面,当 $B > B_c$ 时,方程(21.6.29)给 出 $W_V > \Delta[1 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)] > W_N$,所以这时同样没有涡旋线.另外,对于这样的场, $W_S > W_N$, 所以材料处在它的正常态上.

在II型超导体中,我们需要将磁场划分成3个范围: $B < B_{c1}, B_{c1} < B < B_{c2}, 以及<math>B > B_{c2},$ 其中 B_{c1} 和 B_{c2} 是一对临界场,它们的量级大约是

$$B_{c1} \approx \sqrt{2\Delta} \, \xi / \lambda \, , \qquad \qquad B_{c2} \approx \sqrt{2\Delta} \, \lambda / \xi \, .$$

正如我们所看到的, 对于II型超导体, 唯一的稳定涡旋线是那些拥有最小通量[‡] π/e 的涡旋线, 所 以在磁场B中, 我们应该设方程(21.6.29)中的单位体积涡旋线数目*N*等于*eB*/ π . 当*B* < *B*_{c1}时, 我们可以用方程(21.6.28)证明*eB*/ π < 1/ $\pi\lambda^2$. 因此, 方程(21.6.29)中涡旋线密度的系数 $\pi\xi^2\Delta - \frac{1}{2}B^2\lambda^2$ 是正值, 所以这时 $W_V > W_S$, 因此在*B* < *B*_{c1}时没有涡旋线. 另外, 对于这样的场, $W_N > W_S$, 所以材料是完全超导的. 当*B* > *B*_{c1}时, 方程(21.6.28)表明涡旋密度*N* = *eB*/ π 大于1/ $\pi\lambda^2$, 所 以在涡旋态中, 磁场完全穿透了超导体, 单位体积的能量由方程(21.6.29)和(21.6.28)给出, 它是

$$W_V \approx \mathscr{N} \pi \xi^2 \Delta = eB\xi^2 \Delta \approx (B/B_{c2})W_N \approx (B_{c1}/B)W_S$$
.

因此当 $B_{c1} < B < B_{c2}$ 时,我们有 $W_V < W_N$ 和 $W_V < W_S$,所以材料处在它的涡旋态上.当 $B > B_{c2}$ 时,我们仍然有 $W_V < W_S$ 但现在 $W_N < W_V$,所以涡旋消失了并且所有超导性被破坏了.从前面的推导中可以看出 $\lambda \gg \xi$ 的II性超导体能够携带远高于临界值 $B_c \approx \sqrt{\Delta}$ 的磁场,这在超导体的工程应用中非常重要,高能加速器中的磁铁就是其中的一个例子.

仅当材料处在正常态和超导态的相变点附近时, Ginzburg-Landau理论才是成立的, 所以我们 在涡旋线的中心使用它, 这里 ρ 掉落至零.在涡旋线中心附近, 我们可以忽视它的曲率并假定柱对 称性.将场**A** – $\nabla \phi$ 取成只有方位角分量:

$$\left(\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi\right)_{\theta} = A(r) , \qquad (21.6.30)$$

这使得磁场只有轴向分量:

$$B_z = \left(\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi)\right)_z = A'(r) + A(r)/r , \qquad (21.6.31)$$

而ρ只是r的函数. 这样, 涡旋线的结构就由如下这对耦合微分方程控制:

$$A''(r) + r^{-1}A'(r) - r^{-2}A(r) = \frac{\rho^2(r)A(r)}{\lambda^2 \langle \rho \rangle^2} , \qquad (21.6.32)$$

$$\rho''(r) + r^{-1}\rho'(r) + \frac{1}{2\xi^2} \left(\rho(r) - \frac{\rho^3(r)}{\langle \rho \rangle^2}\right) = 4e^2\rho(r)A^2(r) .$$
(21.6.33)

当r与关联长度 ξ 以及穿透深度 λ 相比都很小时,我们就可以忽略方程(21.6.32)和(21.6.33)中正比于 $1/\xi^2$ 的项和正比于 $1/\lambda^2$ 的项,由此发现简化方程

$$A'' + A'/r - A/r^2 = 0 , \qquad (21.6.34)$$

$$\rho'' + \rho'/r = 4e^2 A^2 \rho . (21.6.35)$$

方程(21.6.34)有通解

$$A(r) = \frac{Br}{2} + \frac{C}{2er} , \qquad (21.6.36)$$

[†]前面给出的通量量子化推动针对的是单个孤立涡旋线的情况,这个推导在这里不完全适用.我们将会看到, 当 $B > B_{c1}$ 时,涡旋线的间隔小于穿透深度 λ ,所以我们无法通过在一个到涡旋的距离远大于 λ 的地方围着涡旋线画一 个圈,使得在这个围道 \mathscr{C} 上有 $\mathbf{A} - \nabla \phi = 0$.取而代之,我们在这里不得不诉诸连续性考察.(M. Tinkham,私人通讯.) 假定我们用任意连续曲线连接任意两个涡旋线的中心.我们将在下面证明,在这条曲线上,矢量 $\mathbf{A} - \nabla \phi$ 将会非常接近 其中的一个涡旋,但是指向曲线的另一边.因此,在每个这样的曲线上至少有一点会有 $\mathbf{A} - \nabla \phi = 0$.因为 $\mathbf{A} - \nabla \phi$ 是规 范不变的,它必须连续,所以围绕着每个涡旋线存在一个闭合围道 \mathscr{C} ,使得在 \mathscr{C} 上有 $\mathbf{A} - \nabla \phi = 0$.

其中*B*是常数,根据方程(21.6.31)它是沿着涡旋线的磁场,而*C*是待定实常数.将其代入方程(21.6.35)后发现,当 $r \to 0$ 时, $\rho(r)$ 的解是 $r^{|C|}$ 和 $r^{-|C|}$ 的线性组合.序参量 $\rho \exp(2ie\phi)$ 必须是位置的光滑函数,所以我们推出|C|是正整数,记为 ℓ ,那么在 $r \to 0$ 时就有 $\rho \propto r^{\ell}$ 和 $\phi = \pm \ell \varphi/2e$ +常数.注意到, ϕ 的这个解与 $C = \pm \ell$ 的方程(21.6.36)是一致的; $\nabla \phi$ 的方位角分量在 $r \to 0$ 时趋于 $\pm \ell/2e$ r,而解析性要求A的方位角分量在 $r \to 0$ 时为零.通过一个非奇异的规范变换,我们可以令空间中所有的 $\phi = \pm \ell \varphi/2e$,所以,基于与方程(21.6.12)相同的原因,对于远大于穿透深度的超导体,其中单个涡旋线所携带的磁通量是 $\pm \pi \ell/e$.正如我们所预期的,我们看到序参量不仅在涡旋线中心处为零,并且它作为r的幂函数趋于零时,幂次等于以 π/e 为单位的磁通量的绝对值.

 ϕ 的解服从"量子化"条件, 即 $\phi(2\pi) - \phi(0)$ 是 π/e 的整数倍, 而这个条件暗示了磁通量的量子化. 对于基于方程(21.6.5)的Goldstone玻色子以及电磁场的理论, ϕ 的条件必须手动加在场方程的解上, 而对于Ginzburg-Landau方程, 由于这些方程基于序参量的一个近似选择, 所以它们"知晓"这个条件.

* * *

从电磁规范不变性自发破缺的假定出发,我们可以直接推导出超导体的大部分显著性质,尽管如此,为了理解超导是怎样发生的以及何时发生的,我们还需要超导的微观理论.利用类似于我们在19.5节和21.4节所用的幂次计数方法,Bardeen,Cooper和Schrieffer^[37]对微观超导理论的推导可以重述为有效场论的语言.^[44,44a]为此,假定我们积掉了超导体中离子所附带的自由度,^{‡‡}仅剩下电子之间的有效相互作用.简单起见,我们将在零温下进行处理,并假定在开始的时候没有外场,这使得拉格朗日量在平移以及时间反演算符T下不变.我们同时假定力与自旋无关,那么对于仅作用在自旋指标上的*SU*(2)变换,这使得拉格朗日量在这个变换下不变,但是对于作用动量上的旋转,我们不需要假定拉格朗日量在这个变换下不变.这样,电子就由动量**p**以及自旋指标 $s = \pm \frac{1}{2}$ 表征,并由湮灭算符 $a(\mathbf{p}, s, t)$ 和产生算符 $a^{\dagger}(\mathbf{p}, s, t)$ 描述,其拉格朗日量的形式为

$$L = -\sum_{s} \int d^{3}p \, a^{\dagger}(\mathbf{p}, s, t) \left[-i\frac{\partial}{\partial t} + E(\mathbf{p}) \right] a(\mathbf{p}, s, t) + \sum_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}} \int d^{3}p_{1} \, d^{3}p_{2} \, d^{3}p_{3} \, d^{3}p_{4} \, V_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}}(\mathbf{p}_{1}, \mathbf{p}_{2}, \mathbf{p}_{3}, \mathbf{p}_{4}) \times a^{\dagger}(\mathbf{p}_{1}, s_{1}, t) a^{\dagger}(\mathbf{p}_{2}, s_{2}, t) a(\mathbf{p}_{3}, s_{3}, t) a(\mathbf{p}_{4}, s_{4}, t) \delta^{3}(\mathbf{p}_{1} + \mathbf{p}_{2} - \mathbf{p}_{3} - \mathbf{p}_{4}) + \cdots,$$
(21.6.37)

其中"…"代表的是包含6个或者更多产生湮灭算符的项, $E(\mathbf{p})$ 是电子能量减去化学势. 对于自由电子, $E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m_e - E_F$, 其中 E_F 是电子在费米面处的能量. 相互作用必然会改变这一函数, 但是, 既然当动量**p**处在球面|**p**| = $\sqrt{2m_e E_F}$ 上时, 自由电子的 $E(\mathbf{p})$ 为零, 我们理应期待, 在有相互作用之后, $E(\mathbf{p})$ 仍然会在某个闭合费米面*S*上为零:

$$E(\mathbf{p}) = 0 \qquad 对于 \mathcal{S} 上的 \mathbf{p} . \tag{21.6.38}$$

^{‡‡}严格来讲,积掉电子以外的所有自由度是不可能的,这是因为声子是Goldstone玻色子,它的频率在波长很大时为零,类似于相对论性理论中的无质量粒子.但是,声子相互作用的效应不能解释成被离子质量的负幂次所压低的有效电子-电子相互作用

根据后面将要阐明的原因,除了费米面周围一个厚度为κ的薄层外,我们将积掉所有电子[‡](在后面我们会通过引入重整化电子-电子势去掉截断κ.)剩下的自由度是动量形式如下的电子

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})\ell , \qquad (21.6.39)$$

其中**k**在费米面*S*上, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})$ 是**k**处垂直于费米面的单位矢量, 且有 $0 \leq \ell \leq \kappa$. 对于这样的动量,

$$E(\mathbf{p}) = v_F(\mathbf{k})\ell , \qquad (21.6.40)$$

其中

$$v_F(\mathbf{k}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \cdot \left(\nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}) \right)_{\mathbf{p} = \mathbf{k}}.$$
(21.6.41)

那么, 波数-频率空间中的电子传播子是

$$\frac{1}{\omega - v_F(\mathbf{k})\ell + \mathrm{i}\epsilon}$$
 (21.6.42)

我们现在来考察一般的连通矩阵元在 $\kappa \to 0$ 时对 κ 的标度率.我们对于每个圈有一个对频率的积分,对于每个内线有一个传播子,所以,传播子之积对所有的频率的积分与 ℓ 的关系将 $\mathcal{E}\ell^{L-I}$,其中L是圈的数目,I是内线的数目.在计算 ℓ 积分的个数时,要注意的是,对于一般动量, 方程(21.6.37)中的相互作用项,它的 δ -函数约束的是k而不是 ℓ .(例如,如果动量守恒要求两个电子 线的动量 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 有总动量 $\mathbf{P} \neq 0$,那么 \mathbf{p}_1 的积分区域是两个厚度为 κ 的球壳的交集,这两个球壳的 中心则分别是 \mathbf{P} 和零.这些球壳的交集是厚度为 κ 的闭环,所以我们要对一个 \mathbf{k} -分量和两个 ℓ 积分,其中 \mathbf{k} -分量指定了围绕环的位置,而两个 ℓ 指定了环截面内的位置.)因此存在I个对 ℓ 的积分,又因 为被积函数趋于 ℓ^{L-I} ,所以矩阵元的形式为

$$M \propto \kappa^L$$
 . (21.6.43)

圈的数目,内线的数目以及i类顶点数目Vi之间有熟悉的关系

$$L = I - \sum_{i} V_i + 1 . (21.6.44)$$

另外,内线的数目,顶点的数目以及外线的数目E之间有另一个熟悉的关系

$$2I + E = \sum_{i} n_i V_i , \qquad (21.6.45)$$

其中n_i是i类相互作用中电子算符的数目.从方程(21.6.44)和(21.6.45)中消掉I,这给出

$$L = 1 - \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\sum_{i}V_{i}(n_{i} - 2) . \qquad (21.6.46)$$

在作用量中, $n_i = 2$ 的项仅仅改变了函数 $E(\mathbf{p})$, 所以它的效应只是偏移了费米面. 真正的相互作用 有 $n_i > 2$, 因此从方程(21.6.43)和(21.6.46)可以看出, 它们在矩阵元中产生的项在 $\kappa \to 0$ 时所给出 的贡献相对而言可以忽略. 以18.5节的语言, 这意味着所有相互作用都是无关算符. 这也是为什么 在普通金属中费米面附近的电子行为很像自由粒子的原因.

[†] 对于与自旋相关的力,将会存在两个费米面,每个费米面对应矩阵*E*_{s's}(**p**)的一个本征值,这时我们将积掉每个自旋本征态中相应费米面薄层以外的所有电子.

然而,这一结论有一例外.如果一对电子线湮没在真空中,那么平移不变性要求这两条线的动量大小相等且方向相反,所以,如果其中一个动量处在费米面附近,那么另一个动量也是如此.(时间反演性要求 $E(\mathbf{p})$ 是**p**的偶函数,所以,即使一般的费米面不是球形的,如果 $E(\mathbf{p}) = 0$ 那 $\Delta E(-\mathbf{p}) = 0$ 依旧成立.)这样,对其中一条线的动量**p**积分就是对厚度为 κ 的球壳积分,换句话说,就是对两个k和一个 ℓ 积分.对于任何相互作用,如果它包含两条这样的线,那么对 ℓ 的积分是一个而不是两个,这使得矩阵元的量级并非方程(21.6.43)和(21.6.46)表现出的那样要减去一个 κ 因子,这样的相互作用实际上对矩阵元的量级没有影响.换句话说,对于包含4个电子算符的相互作用,如果它们所在的电子线最终湮没在真空之中,那么它们就会变成临界算符而非无关算符.

为了看到这个例外所造成的后果,使用名为Hubbard-Stratonovich变换的技巧将是有帮助的, 我们在10.7节曾简单介绍过这个技巧.现在,我们将引入缓慢变化的外电磁场,这样一来在坐标空 间下进行处理将是方便的.那么,规范不变性告诉我们拉格朗日量(21.6.37)变成

$$L = -\sum_{s} \int d^{3}x \,\psi_{s}^{\dagger}(\mathbf{x},t) \left[-i\frac{\partial}{\partial t} - A_{0}(\mathbf{x},t) + E\left(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right) \right] \psi_{s}(x,t) + \sum_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}} \int d^{3}x_{1} \,d^{3}x_{2} \,d^{3}x_{3} \,d^{3}x_{4} \,V_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}}(\mathbf{x}_{1},\mathbf{x}_{2},\mathbf{x}_{3},\mathbf{x}_{4}) \times \psi_{s_{1}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{1},t) \psi_{s_{2}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{2},t) \psi_{s_{3}}(\mathbf{x}_{3},t) \psi_{s_{4}}(\mathbf{x}_{4},t) , \qquad (21.6.47)$$

其中

$$\psi_s(\mathbf{x},t) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3 p \, \exp(\mathrm{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \, a(\mathbf{p},s,t) \, . \tag{21.6.48}$$

对于那些包含超过4个电子算符的项,由于它们均是无关的,所以我们将扔掉这些项.我们给这个 拉格朗日量加上如下的项

$$\Delta L = \frac{1}{4} \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^4 x_4 \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ \times \left[\Psi_{s_2 s_1}^{\dagger}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) - \psi_{s_1}^{\dagger}(\mathbf{x}_1, t) \psi_{s_2}^{\dagger}(\mathbf{x}_2, t) \right] \\ \times \left[\Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) - \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t) \right]$$
(21.6.49)

并对新的"配对"场 $\Psi(\mathbf{x}, s, \mathbf{x}', s', t)$ 和电子场 ψ 做路径积分.这是允许的,由于 ΔL 是配对场的二次型,并且二次项的系数与场无关,那么根据第9章的附录,对 $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ 的路径积分仅仅只是 令 $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ 等于拉格朗日量的稳定点 $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \psi_s(\mathbf{x}, t) \psi_{s'}(\mathbf{x}', t)$,在这一点, $\Delta L = 0$.选择这样的附加项是为了使得 $L + \Delta L$ 中电磁场的4次项互相抵消,只留下这些场的二次项:

$$L + \Delta L$$

$$= -\sum_{s} \int d^{3}x \,\psi_{s}^{\dagger}(\mathbf{x},t) \left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} - A_{0}(\mathbf{x},t) + E\left(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right) \right\} \psi_{s}(\mathbf{x},t)$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}} \int d^{3}x_{1} \,d^{3}x_{2} \,d^{3}x_{3} \,d^{3}x_{4} \,V_{s_{1}s_{2}s_{3}s_{4}}(\mathbf{x}_{1},\mathbf{x}_{2},\mathbf{x}_{3},\mathbf{x}_{4})$$

$$\times \left[\psi_{s_{1}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{1},t)\psi_{s_{2}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{2},t)\Psi_{s_{3}s_{4}}(\mathbf{x}_{3},\mathbf{x}_{4},t) + \Psi_{s_{2}s_{1}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{2},\mathbf{x}_{1},t)\psi_{s_{3}}(\mathbf{x}_{3},t)\psi_{s_{4}}(\mathbf{x}_{4},t) - \Psi_{s_{2}s_{1}}^{\dagger}(\mathbf{x}_{2},\mathbf{x}_{1},t)\Psi_{s_{3}s_{4}}(\mathbf{x}_{3},\mathbf{x}_{4},t) \right].$$

$$(21.6.50)$$

现在所有的准备工作都完成了.我们已经证明了,对于相互作用V,仅当它所作用的一对电子线湮没在真空中时,V才不是无关的.若我们计算的是有缓慢变化配对场Ψ_{ss'}(**x**, **x**', *t*)时的量子 有效作用量Γ[Ψ],这意味着我们只计算那些剪断任意一条Ψ内线就会变得不连通的图,但是量子 有效作用量的一般定义则告诉我们,如果一个图在剪断它的任意内线后变成非连通图,我们就要 扔掉这样的图.因此,我们根本不能引入任何Ψ内线.由于电子场在方程(21.6.50)中是二次型的形 式,我们在对电子场积分时,幸存的图只有一个单顶角图和一个单圈图,其中单顶角图来源于方 程(21.6.50)方括号中的最后一项,对于单圈图,与16.2节中的推理相同,它通过对电子场二次项系 数的行列式取对数得到:

$$\Gamma[\Psi] = \frac{1}{4} \int dt \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^3 x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ \times \Psi^{\dagger}_{s_2 s_1}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) \\ - \frac{i}{2} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\dagger} & -A^T \end{pmatrix} + \ddot{\mathbb{B}} \mathfrak{Y}.$$
(21.6.51)

其中A和B是"矩阵":

$$A_{\mathbf{x}'s't',\mathbf{x}st} \equiv \delta_{s's} \left\{ -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x},t) + E\left(-\mathrm{i}\mathbf{\nabla} + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right) \right\} \delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\delta(t'-t) , \qquad (21.6.52)$$

$$B_{\mathbf{x}'s't',\mathbf{x}st} \equiv -\Delta_{s's}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\delta(t'-t) , \qquad (21.6.53)$$

而 Δ 是能隙函数(gap function):

$$\Delta_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma'\sigma} \int \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{d}^3 y' \, V_{s's\sigma'\sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \, \Psi_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \,. \tag{21.6.54}$$

(在这里以及下面的讨论中, 我们将忽视掉Γ中的额外常数, 这个常数来源于被积掉的模式.) 这里 有一个问题: 在不对拉格朗日量中的相互作用大小做任何假定的前提下, 我们能否计算出有效作 用量.

为了简化我们下面的讨论,我们现在只考察自旋单态配对场的情况

$$\Psi_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Psi_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) , \qquad (21.6.55)$$

其中下标+和-分别代表自旋指标+1/2和-1/2.th利用在自旋指标旋转下的不变性,我们这里所 需要的势分量就是

$$V_{+-+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) - V_{+--+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -V_{-++-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + V_{-+-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$$

$$\equiv 2V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) . \qquad (21.6.56)$$

那么方程(21.6.54)给出

$$\Delta_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Delta_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) , \qquad (21.6.57)$$

$$\Delta_{++}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \Delta_{--}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = 0.$$
(21.6.58)

^{th在液态He³中, 配对场的非零分量构成自旋三重态, 其分量为 $\Psi_1 = \Psi_{++}, \Psi_0 = \sqrt{2}\Psi_{+-} = \sqrt{2}\Psi_{-+}, \Psi_{-1} = \Psi_{--}.$}

量子有效作用量(21.6.51)现在是

$$\Gamma[\Psi] = \int dt \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$$

$$\times \Psi^{\dagger}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t)$$

$$- i \ln \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \mathscr{B}^{\dagger} & -\mathscr{A}^T \end{pmatrix}$$
(21.6.59)

其中

$$\mathscr{A}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} \equiv \left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x},t) + E\left(-i\mathbf{\nabla} + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right) \right\} \delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\delta(t'-t) , \qquad (21.6.60)$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} \equiv -\Delta(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\delta(t'-t) , \qquad (21.6.61)$$

以及

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \int \mathrm{d}^3 y \, \mathrm{d}^3 y' \, V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \, \Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \,. \tag{21.6.62}$$

我们先用这个结果考察平移不变且没有外电磁场的情况. 这样, 配对场以及能隙场可以表示成Fourier变换

$$\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \int d^3 p \, e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \Psi(\mathbf{p}) , \qquad (21.6.63)$$

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3 p \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \Delta(\mathbf{p}) \,, \qquad (21.6.64)$$

而电子-电子势以如下的形式的出现

$$\int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^3 x_4 e^{\mathbf{i}\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4)} V(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$$
$$\equiv \mathscr{V}_4 V(\mathbf{p}',\mathbf{p})$$
(21.6.65)

其中1/4是时空体积

$$\mathscr{V}_4 \equiv \int \mathrm{d}^3 x \int \mathrm{d}t \, 1 \, . \tag{21.6.66}$$

转至波数-频率空间, 这样"矩阵"(21.6.60)和(21.6.61)就变成了对角矩阵, 对其行列式的计算就变 得非常平庸. 16.1节定义的有效势V[Ψ](不要与电子-电子势混淆)就是单位时空体积中有效作用量 的相反数:

$$V[\Psi] \equiv -\Gamma[\Psi]/\mathscr{V}_{4}$$

$$= -\int \mathrm{d}^{3}p \,\mathrm{d}^{3}p' \,\Psi^{*}(\mathbf{p}')V(\mathbf{p}',\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})$$

$$+ \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^{4}} \int \mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}^{3}p \,\ln\left(1 - \frac{|\Delta(\mathbf{p})|^{2}}{\omega^{2} - E^{2}(\mathbf{p}) + \mathrm{i}\epsilon}\right)$$
(21.6.67)

其中

$$\Delta(\mathbf{p}) = -\int \mathrm{d}^3 p' \, V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Psi(\mathbf{p}') \,. \tag{21.6.68}$$

(i ϵ 项可以从电子圈图的Feynman规则中推断出来,并且如9.2节所证明的那样,它的根本来源 是 $t \to \pm \infty$ 时附加在电子场上的条件.) Wick旋转,积掉 ω ,并将 Ψ 表示成 Δ ,它变成

$$V[\Delta] = -\int d^3 p \, d^3 p' \, \Delta^*(\mathbf{p}') V^{-1}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Delta(\mathbf{p}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left[\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta(\mathbf{p})|^2} - E(\mathbf{p}) \right] .$$
(21.6.69)

正如我们在16.1节所看到的那样,场方程就是有效作用量处在稳定状态的条件,在我们的情况中, 这给出平衡态能隙函数 $\Delta_0(\mathbf{p})$ 著名的能隙方程:

$$0 = \frac{\delta V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{p})} \Big|_{\Delta = \Delta_0}$$

= $-\int \mathrm{d}^3 p' V^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}') - \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Delta_0(\mathbf{p})}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta_0(\mathbf{p})|^2}}$

或者, 写成它更为人熟知的形式,

$$\Delta_0(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 p' \, \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}')}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}') + |\Delta_0(\mathbf{p}')|^2}} \,. \tag{21.6.70}$$

自始至终,所有对动量的积分都不言自明地理解成对形式限制为(21.6.39)的动量积分,积分的 范围是费米面附近厚度为κ的薄层.因此,有效势(21.6.69)就是

$$V[\Delta] = -\kappa^2 \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2 k \, \mathrm{d}^2 k' \Delta^*(\mathbf{k}') V^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\kappa \mathrm{d}\ell \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2 k \left[\sqrt{\ell^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - \ell v_F(\mathbf{k}) \right] .$$
(21.6.71)

作为泛函的有效势,现在它被理解成仅依赖于费米面上的能隙函数Δ.

既然 κ 是任意的, 势 $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ 对 κ 的依赖关系要使得 $V[\Delta]$ 是 κ -无关的. 重整化群方法在超导体中的绝大数应用都沿用12.4节概述的Wilson方法, 导出 $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ 对 κ 的微分方程, 并研究解在 $\kappa \to 0$ 时的行为. 为了灵活性, 注意到我们也可使用Gell-Mann和Low的方法, 引入重整化电子-电子势^[44a]

$$V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \equiv -\frac{\delta^2 V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{k}') \delta \Delta(\mathbf{k})} \bigg|_{\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(\mathbf{k})^* = \mu} , \qquad (21.6.72)$$

其中, 与18.2节引入的 μ 相同, 这里的 μ 是滑动重整化标度. 通过将原始的电子-电子势表示成 V_{μ} , 方程(21.6.71)变成

$$V[\Delta] = -\int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^{2}k \,\mathrm{d}^{2}k' \,\Delta^{*}(\mathbf{k}') V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int_{0}^{\kappa} \mathrm{d}\ell \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^{2}k \left[\sqrt{\ell^{2} v_{F}^{2}(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^{2}} - \ell v_{F}(\mathbf{k}) - \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^{2}}{2(\ell^{2} v_{F}^{2}(\mathbf{k}) + \mu^{2})^{1/2}} + \frac{\mu^{2} |\Delta(\mathbf{k})|^{2}}{4(\ell^{2} v_{F}^{2}(\mathbf{k}) + \mu^{2})^{3/2}} \right].$$
(21.6.73)

现在,如果我们取截断κ为无穷,对ℓ的积分就是收敛的,并给出

$$V[\Delta] = -\int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2 k \, \mathrm{d}^2 k' \, \Delta^*(\mathbf{k}') V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2 k \, \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{v_F(\mathbf{k})} \left[\ln\left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\mu}\right) - 1 \right] \,.$$
(21.6.74)

 $V[\Delta]$ 在 $\Delta = \Delta_0$ 处稳定这一条件给出了能隙方程一个更加有用的形式

$$\Delta_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2 k' \, V_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}') v_F^{-1}(\mathbf{k}') \Delta_0(\mathbf{k}') \ln\left(\frac{|\Delta_0(\mathbf{k}')|}{\mu}\right) \,. \tag{21.6.75}$$

在方程(21.6.74)中使用上式,它们表明超导态中的能量密度要小于正常态中的能量密度,相差的量为

$$\Delta \equiv V(0) - V(\Delta_0) = \int_{\mathscr{S}} d^2k \, \frac{|\Delta_0(\mathbf{k})|^2}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})} \,. \tag{21.6.76}$$

当然, 电子-电子势V_μ对μ的依赖性要进行选择, 使得它所满足的重整化群方程能够确保有效 势(21.6.74)独立于任何重整化标度μ:

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\delta^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})}$$

或者,等价地,

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2 k'' V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') v_F^{-1}(\mathbf{k}'') V_{\mu}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) .$$
(21.6.77)

以厄米核的形式

$$K_{\mu}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} v_F^{-1/2}(\mathbf{k}') v_F^{-1/2}(\mathbf{k}) V_{\mu}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) , \qquad (21.6.78)$$

它可以有效地重写成

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} K_{\mu} = K_{\mu}^2 \,. \tag{21.6.79}$$

这样, $K_{\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ 的本征矢 $u_n(\mathbf{k})$ 就独立于 μ , 而本征值则采取 $1/\ln(\Lambda_n/\mu)$ 的形式, 其中 Λ_n 是积分常数, 类似于量子色动力学中的 Λ . 因此, 电子-电子势采取如下的形式

$$V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2(2\pi)^{3} v_{F}^{1/2}(\mathbf{k}) v_{F}^{1/2}(\mathbf{k}') \sum_{n} \frac{u_{n}(\mathbf{k}) u_{n}^{*}(\mathbf{k}')}{\ln(\Lambda_{n}/\mu)} , \qquad (21.6.80)$$

其中,我们已经将本征矢选成了正交的本征矢,这使得完备关系采取如下的形式

$$\sum_{n} u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}') = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') .$$
 (21.6.81)

那么,有效势(21.6.74)就可以重写为

$$V[\Delta] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^2 k \, \mathrm{d}^2 k' \, \sum_n \frac{\Delta^*(\mathbf{k}')u_n^*(\mathbf{k}')\Delta(\mathbf{k})u_n(\mathbf{k})}{\sqrt{v_F(\mathbf{k}')v_F(\mathbf{k})}} \left[\ln\left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\Lambda_n}\right) - 1 \right] \,. \tag{21.6.82}$$

对于拥有定域旋转不变性的材料,费米面是球面,本征矢 $u_n(\mathbf{k})$ 是球面坐标的球谐函数,但对于方程(21.6.82)而言,即使不对旋转不变性做任何假定,它也是成立的.

我们现在可以用这一形式理论来了解超导是在什么情况下发生的.对于非常小的 Δ ,方程(21.6.82)中的对数是很大的负数,对于非常大的 Δ ,这个对数是很大的正数,所以,随着 Δ 的整体标度从零升至无穷, $V[\Delta]$ 从零掉落至一个负值然后再升至正无穷.因此,对于任意的电子-电子势,我们总可以使得一个不为零的 Δ 使其达到最小值.当我们把截断 κ 取至无穷时,方程(21.6.73)中的积分是实际上在 $|\Delta|/v_F$ 阶的 ℓ 处截断了,费米面的半径量级则是 k_F ,而8 $\pi k_F^3/3(2\pi)^3$ 等于电子数密度.既然我们假定了这里所考察的电子处在费米面附近的一个薄层内,这个推导仅在 $|\Delta| \ll \omega_D$ 才是成立的,其中 ω_D 是Debye频率 k_Fv_F .特别的,如果拥有旋转不变性并且能隙函数与方向无关,那么这一情况下的有效势在 $\Lambda_{s \text{ wave}}$ 阶的能隙函数处达到一个定域最小值,所以,只要 $\Lambda_{s \text{ wave}} \ll \omega_D$,对称性就自发破缺了.这个结果的另一种陈述是:对于s-波超导体,如果电子-电子势(21.6.80)在标度 $\mu \approx \omega_D$ 进行了重整化,那么它的s-波投影必须是是吸引势.然而,需要注意的是,这个重整化吸引势到底有多强并不重要.

超导性的这一特征,即无论这个吸引势有多弱总会形成Goldstone玻色子,其根源是费米面的存在,费米面增强了长程效应.在量子场论中,如果没有类似于21.5节的无自旋基本粒子,除非相互作用有多强,我们无法像往常一样期待对称性在空白空间中会自发破缺.

现在,我们回到有外电磁场的情况.像往常一样,通过将该理论的每个带荷场写成一个规范参量为 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作用在相应的规范不变场上,我们可以引入Goldstone玻色场 $\phi(\mathbf{x},t)$,在这里带荷场就 是能隙场 $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$,或者等价的配对场 $\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$,我们用波浪波来区分变换前后的场:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \exp\left(-\mathrm{i}\phi(\mathbf{x}, t)\right) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \exp\left(-\mathrm{i}\phi(\mathbf{x}', t)\right) \,. \tag{21.6.83}$$

那么,将方程(21.6.83)代入方程(21.6.59)就给出了有效作用量.通过一个规范变换,即将方程(21.6.60)中的 $A_{\mu}(x)$ 替换成 $A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\phi(x)$,我们可以去掉方程(21.6.83)中的 ϕ 相关性.当材料处在超导态,并且与正常态和超导态之间的相变点相距甚远时,我们也可以积掉 $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ 所附带的规范不变自由度,而这就意味着将其换成它的平衡态值 $\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$.这样,依赖于Goldstone玻色场以及外电磁场的那部分有效作用量就是

$$\Gamma[\phi, A] = \Gamma_{\Delta=0}[A] - i \ln \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \mathscr{B}^{\dagger} & -\mathscr{A}^T \end{bmatrix} + i \ln \operatorname{det} \begin{bmatrix} \mathscr{A} & 0 \\ 0 & -\mathscr{A}^T \end{bmatrix}, \quad (21.6.84)$$

其中,现在有

$$\mathscr{A}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \left[-i\frac{\partial}{\partial t} + eA_0(\mathbf{x},t) - e\dot{\phi}(\mathbf{x},t) + E\left(-i\mathbf{\nabla} + e\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - e\mathbf{\nabla}\phi(\mathbf{x},t)\right) \right] \\ \times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t) , \qquad (21.6.85)$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \Delta_0(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t) . \qquad (21.6.86)$$

通过将方程(21.6.84)展成 $A_0(\mathbf{x},t) - \dot{\phi}(\mathbf{x},t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - \nabla \phi(\mathbf{x},t)$ 的幂级数,我们可以读出^[46]类似于 穿透深度这样的定量性质.

附录 一般幺正规范

我们将在这个附录中证明,在一般的规范对称性自发破缺的理论中,总可能选择"幺正"规范, 使得Goldstone玻色场满足方程(21.4.30):

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \,\xi_a e_{\alpha b} = 0 \ . \tag{21.A.1}$$

对所有群使用指数参数化,我们首先注意到G中的元素,至少是在单位元附近的有限邻域内的 元素,可以写成如下的形式

$$g = \exp\left(-i\sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathscr{T}_{\alpha}\right) \exp\left(i\sum_{a} \phi_{a} x_{a}\right) \exp\left(i\sum_{i} \mu_{i} t_{i}\right) , \qquad (21.A.2)$$

其中φ_a对于所有的α服从线性约束

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \phi_a \, e_{\alpha b} = 0 \ . \tag{21.A.3}$$

很容易看到,当g无限靠近单位元时.任何这样的g可以写成

$$g = 1 + i \sum_{a} \phi_a^0 x_a + i \sum_{i} \mu_i^0 t_i , \qquad (21.A.4)$$

其中 ϕ_a^0 和 μ_i^0 是无限小量. 等级地,

$$g = 1 + i \sum_{i} \phi_a x_a + i \sum_{i} \mu_i t_i - i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathscr{T}_{\alpha} , \qquad (21.A.5)$$

其中 θ_{α} 是任意的无限小量,且

$$\phi_a(\theta) \equiv \phi_a^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha a} , \qquad (21.A.6)$$

$$\mu_i(\theta) \equiv \mu_i^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha i} , \qquad (21.A.7)$$

对于任何给定 ϕ_a^0 ,我们可以选择 θ_α 使得如下的正定量最小

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \phi_a(\theta) \phi_b(\theta) . \qquad (21.A.8)$$

在它的最小值处, (21.A.8)相对于变量 θ_{α} 是稳定的, 所以 $\phi_{a}(\theta)$ 满足方程(21.A.3). 对于无限小的 ϕ , $\mu \pi \theta$, 方程(21.A.5)与方程(21.A.2)相同, 因此, 我们看到形式为(21.A.2)(其中 ϕ_{a} 满足方程(21.A.3))所有g的集合包含所有无限接近于单位元的g. 那么, 有连续性就可以得出, 至少在单位元附近的某个有限邻域内, 相同的结论对所有g依旧成立.

现在,考察特定的群元

$$g = \gamma(\xi) = \exp\left(i\sum_{a}\xi_{a}x_{a}\right)$$
 (21.A.9)

并将其写成(21.A.2)的形式:

$$\gamma(\xi) = \exp\left(-i\sum_{\alpha} \theta_{\alpha}(\xi)\mathscr{T}_{\alpha}\right)\gamma(\phi(\xi))\exp\left(i\sum_{i} \mu_{i}(\xi)t_{i}\right) , \qquad (21.A.10)$$

其中 $\phi_a(\xi)$ 满足方程(21.A.3). 这告诉我们, 规范变换exp $\left(i\sum_{\alpha}\theta_{\alpha}(\xi)\mathscr{T}_{\alpha}\right)$ 将 ξ_a 变换至

$$\xi'_a = \phi_a(\xi)$$
. (21.A.11)

现在扔掉撇号,因此,我们成功地构建了一个规范,使得 ξ_a 在这个规范下满足方程(21.A.1),这正是我们所要证明的.

习题

1. 在"一般幺正规范"下计算有效鬼场拉格朗日量, 其中B[f]像往常一样由方程(15.5.22)给出, 但 在这里 $f_{\alpha}(x) = i\phi_n(x)(t_{\alpha})_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{VAC}, \phi_n$ 是实标量场, t_{α} 是表示规范群Lie代数的反对称虚矩 阵. 鬼场传播子是什么? 这部分拉格朗日量是否可重整?

2. 在*SU*(2) × *U*(1)电弱理论中, 如果破缺对称性的真空期望值是实三重态 $\vec{\phi} = (\phi^+, \phi^0, \phi^-)$ 中的某 个场 ϕ_3 的真空期望值, 而非通常的复二重态(ϕ^0, ϕ^-)中场的真空期望值, 那么会有什么样的结果.

3. 考察标准电弱理论, 并且其中的标量场部分是一个标量二重态. 在一圈阶, 计算交换Z⁰和中性标量在µ子反常磁矩上的效应.

4. 在标准电弱理论中, W+粒子以及Z⁰粒子的最低阶磁矩是什么?

5. 我们在21.5节讨论了强作用和电弱作用的统一理论,如果发现了第四代夸克和轻子,对于这些 理论所给出的预言会有些什么影响.

6. 在超导体中, 假定电荷值不相称的那几个场拥有不为零的真空期望值. 那么这会对21.6节中讨论的超导体性质有什么影响?

参考文献

- J. Goldstone. Nuovo Cimento 9, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. 127, 965 (1962).
- [2] P. W. Higgs. Phys. Lett. 12, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964); Phys. Rev. 145, 1156 (1966); F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. 13, 321 (1964); G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964); T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 18, 507 (1967): footnote 7.
- [3] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1264 (1967). A. Salam, in *Elementary Particle Physics*, N. Svartholm编辑(Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1968): p. 367.
- [3a] 一般规范理论在幺正规范下的Feynman规则参看S. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1068 (1973).
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B35, 167 (1971); B. W. Lee, Phys. Rev. D5, 823 (1972).
- [5] K. Fujikawa, B. W. Lee and A. Sanda, *Phys. Rev.* D6, 2923 (1972).
- [5a] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* D5, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* D7, 1049 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* B50, 318 (1972); B. W. Lee, *Phys. Rev.* D9, 933 (1974).
- [6] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* 28, 1494 (1972).
- [7] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* 98, 101 (1955).
- [8] 拥有不完整SU(2) × U(1)对称性的模型是由如下几人提出的, S. L. Glashow, Nucl. Phys.
 22, 579 (1961); A. Salam and J. Ward, Phys. Lett. 13, 168 (1964). 另见J. Schwinger, Ann. Phys. (N.Y.) 2, 407 (1957).

- [9] 关于可能的中性流的猜测要回到如下几人的工作, G. Gamow and E.Teller, *Phys. Rev.* 51, 288 (1937); N, Kemmer, *Phys. Rev.* 52, 906 (1937); G. Wentzel, *Helv. Phys. Acta* 10, 108 (1937); S. Bludman, *Nuovo Cimento* 9, 433 (1958); J. Leites-Lopes, *Nucl. Phys.* 8, 234 (1958).
- [10] 中性流最早是在CERN上的一次p_µ-e⁻散射事件中发现的, F. J. Hasert *et al.* (Aachen-Brussels-CERN-EcolePolytechnique-Milan-Orsay-London collaboration), *Phys. Lett.* 46, 121 (1973).
- [11] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [12] I. S. Towner, E. Hagberg, J. C. Hardy, V. T. Koslowsky, and G. Savard, Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995).
- [13] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev.* D2, 1285 (1970).
- [14] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 27, 1688 (1971); Phys. Rev. 5, 1413 (1972).
- [15] J. J. Aubert et al., Phys. Rev. Lett. 74, 2626 (1995); S. Abachi et al., Phys. Rev. Lett. 74, 2632 (1995).
- [16] M. L. Perl et al., Phys. Rev. Lett. 35, 1489 (1975).
- [17] S. W. Herb et al., Phys. Rev. Lett. 39, 252 (1977).
- [18] F. Abe et al., Phys. Rev. Lett. 74, 2626 (1995); S. Abachi et al., Phys. Rev. Lett. 74, 2632 (1995).
- [19] 费米实验室的CDF小组和D0小组给出的值分别是176±8±10 GeV(F. Abe *et al.*,参考文献18)和199⁺¹⁹₋₂₁±22 GeV(S. Abachi *et al.*,参考文献18),其中,第一个误差是统计误差,第二个误差是系统误差. J. Ellis, G. L. Fogli和E. Lisi解释了这些结果给出了组合值181±12 GeV, CERN-BARI preprint hep-ph/9507424.
- [20] M. Kobayashi and K. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49, 282 (1972).
- [20a] F. J. Gilman, K. Kleinknecht, and B. Renk, Carnegie Mellon-Mainz preprint CMU-HUP95-10-DOE-ER/40682-107 (1995), 发表在1995年的*Review of Particle Properties*.
- [20b] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 657 (1976). 标量场使得CP和T不守恒的早期模型可参 看T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D8**, 1226 (1973); *Phys. Rep.* **9C**, 143 (1974).
- [21] F. J. Hasert et al., Phys. Lett. 46B, 138 (1973); P. Musset, Jour. de Physique 11/12, T34 (1973). 与此同时,费米实验室的Harvard-Pennsylvania-Wisconsin-Fermilab小组也看到了中性流事件,但是他们的论文推迟发表了,所以他们利用这个机会重建他们的探测器,但最初并没有发现相同的信号. 这个小组发布的中性流证据在A. Benvenuti et al., Phys. Rev. Lett. 32, 800 (1974).

- [22] G. Arnison et al., Phys. Lett. 122B, 103 (1983); 126B, 398 (1983); 129B, 273 (1983); 134B, 469 (1984); 147B, 241 (1984).
- [23] F. Abe *et al.* (CDF collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **75**, 11 (1995). 在这里, W的质量是通过 观察衰变W → μ + ν以及W → e + ν获得的.
- [24] CERN report LEPEWWG/95-01, 未发表(1995).
- [25] M. Green and M. Veltman, Nucl. Phys. B169, 137 (1980); V. A. Novikov, L. B. Okun', and M. I. Vysotsky, Nucl. Phys. B397, 35 (1992). 关于之后的研究, 参看P. Langacker, in Precision Tests of the standard Model (World Scientific, Singapore, 1994); P. Bamert, C. P. Burgess, and I. Maksymyk, McGill-Neuchatal-Texas preprint hep-ph/9505339 (1995); W. Hollik, Karlsruhe preprint hep-ph/9507406 (1995).
- [26] S. Fanchotti, B. Kniehl, and A. Sirlin, *Phys. Rev.* D48, 307 (1973), 以及那里所引用的参考 文献.
- [27] J. Ellis, G. L. Fogli, and E. Lisi, 参考文献19.
- [27a] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1566 (1979).
- [27b] 例如,在所谓的跷跷板(see-saw)机制中,这一阶的中微子质量通过交换质量为M的中性重轻子产生;参看M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, in *Supergravity*, P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman编辑(North Holland, Amsterdam, 1979): p. 315; T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* B135, 66 (1978).
- [27c] S. Weinberg, 参考文献27a; F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1571 (1979). 另见S. Weinberg, *Phys. Rev.* D22, 1694 (1980).
- [28] 关于一般的形式理论,可参看S. Weinberg, *Phys. Rev.* D13, 974 (1976). 规范理论中的动力
 学对称性破缺的早期工作,可参看R. Jackiw and K. Johnson, *Phys. Rev.* D8, 2386 (1973);
 J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Phys. Rev.* D8, 3338 (1973).
- [29] L. Susskind解释了标准模型的这个结果,参考文献30.
- [30] S. Weinberg, 参考文献28和Phys. Rev. D19, 1277 (1979); L. Susskind, Phys. Rev. D19, 2619 (1979). Susskind给出"拟色"(technicolor)这个术语.
- [31] S. Dimopoulos and L. Susskind, Nucl. Phys. B15, 237 (1979); E. Eichten and K. Lane, Phys. Lett. 90B, 125 (1980); S. Weinberg, Eichten和Lane引用的未发表工作. 关于综述, 参看E. Farhi and L. Susskind, Phys. Rep. 74, 277 (1981).
- [32] S. Weinberg, *Phys. Rev.* D5, 1962 (1972).
- [33] J. Pati and A. Salam, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 275 (1973).
- [34] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).

- [35] H. Georgi, in *Particles and Fields* 1974, C. Carlson编辑(Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).
- [36] H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974).
- [36a] S. Dimopoulos and H. Georgi, Nucl. Phys. B193, 150 (1981); J. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B260, 131 (1991); U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstmann, Phys. Lett. B260, 447 (1991). 对该数据更近期的分析, 参看P. Langacker and N. Polonsky, Phys. Rev. D47, 4028 (1993); D49, 1454 (1994); L. J. Hall and U. Sarid, Phys. Rev. Lett. 70, 2673 (1993).
- [36b] S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D24**, 1681 (1981).
- [37] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [38] P. M. Anderson, *Phys. Rev.* **130**, 439 (1963).
- [39] S. Weinberg, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 86, 43 (1986).
- [40] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* 1, 25 (1962).
- [41] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *JETP (USSR)* 20, 1064 (1950).
- [42] L. P. Gor'kov, Soviet Phys. JETP 9, 1364 (1959).
- [43] A. A. Abrikosov, Soviet Phys. JETP 5, 1174 (1957).
- [43a] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976). 关于数值计算, 参看E. B. Bogomol'nyi and A. I. Vainshtein, Sov. J. Nucl. Phys. 23, 558 (1976).
- [44] G. Benfatto and G. Gallavotti, J. Stat. Phys. 59, 541 (1990); Phys. Rev. 42, 9967 (1990); J. Feldman and E. Trubowitz, Helv. Phys. Acta 63, 157 (1990); 64, 213 (1991); 65, 679 (1992); R. Shankar, Physica A117, 530 (1991); Rev. Mod. Phys. 66, 129 (1993); J. Polchinski, in Recent Development in Particle Theory, Proceedings of the 1992 TASI, J. Harvey and J. Polchinski编辑(World Scientific, Singapore, 1993).
- [44a] S. Weinberg, Nucl. Phys. B413, 567 (1994).
- [45] R. L. Stratonovich, Sov. Phys. Dokl. 2, 416 (1957); J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. 3, 77 (1959).
- [46] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, I. Ye. Dzyaloshinskii, Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics, 2nd edn., D. E. Brown翻译(Pergamon Press, Oxford, 1965).
- [47] 为了给出质量M的精确含义,就要把重整化群方程(21.5.6)—(21.5.8)的两圈修正,以及条件(21.5.5)的一圈"阈值"修正考虑在内.参看S. Weinberg, *Phys. Lett.* 82B, 387 (1979).

第 22 章 反常

在对称性对量子场论的应用中, 那些在经典理论中没有对应的部分存在着一些微妙.即使在 可重整理论中, 量子场论中的无穷大要求在实际计算使用某种正规化子或截断. 正规化子有可能 会破坏理论的对称性, 并且即使在计算的末尾移除了正规化子, 依旧可能留下对称性遭到破坏的 痕迹. 这一问题最初是在尝试理解中性π介子的衰变速率时浮现出来的, 具体形式是一个反常, 这 个反常破坏了强相互作用的整体对称性. 反常也能破坏规范对称性, 但在这一情况下, 理论会变得 不相容, 这使得反常相消的条件要作为约束附加在物理规范理论上. 在下一章, 当我们在场构型拓 扑不平庸的情况下研究反常的非微扰效应时, 反常的重要性会变得更加显然.

22.1 π^0 衰变问题

在20世纪60年代中期, π 介子被视为与强相互作用的 $SU(2) \otimes SU(2)$ 对称性自发破缺相联系的Goldstone玻色子,这个图景取得了数个成功,而在本书的第19章我们对其进行了概述.然而,这个图景也有几个显然的失败之处.其中最需要处理的是中性 π 介子的主要衰变模式的速率,即 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的速率.也正是对这一问题的解答引领了对称性破缺反常的发现.

在积掉所有重粒子以及俘获粒子后,我们预期 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的有效作用量拥有规范不变性和Lorentz不变性,并且所含导数不超过两个,这样的项只有一个:

$$\mathscr{L}_{\pi\gamma\gamma} = g\pi^0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} , \qquad (22.1.1)$$

其中g是量纲为[质量]⁻¹的未知常数. 那么, 我们就可以用3.4节的方法算出 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的速率

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi} .$$
 (22.1.2)

我们可以想当然地期待g的量级是

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi} , \qquad (22.1.3)$$

其中 $F_{\pi} \simeq 190$ MeV用来标记强相互作用的特征标度. 插入因子 $1/8\pi^2$ 是因为给出 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的图至 少要包含一个圈. 例如,在1949年,利用 π 介子和核子相互作用拉格朗日量为i $G_{\pi N} \pi \cdot \bar{N} 2 t \gamma_5 N$ 的 旧QCD理论, Steinberger^[1]计算出了只有一个质子圈的三角图对g的贡献

$$g_{\Delta} = \frac{e^2 G_{\pi N}}{32\pi^2 m_N} \ . \tag{22.1.4}$$

由于Goldberger-Treiman关系(参看19.4节)给出了 $G_{\pi N} = 2m_N g_A / F_{\pi}$,所以它在数值上与方程(22.1.3)相差得并不大.

这个对 $\pi^0 \to 2\gamma$ 振幅的估计遗漏了 $SU(2) \otimes SU(2)$ 对称性附加的特殊约束. 电磁相互作用破坏 了大部分 $SU(2) \otimes SU(2)$ 对称性, 但至少在形式上它对该群的电中性生成元生成的 $U(1) \times U(1)$ 子 群没有影响. 当这一子群的无穷小赝标量群元作用在夸克上时, 它有如下的效应:

$$\delta u = i\epsilon\gamma_5 u , \qquad \delta d = -i\epsilon\gamma_5 d , \qquad (22.1.5)$$

这使得电流是不变的:

$$\delta \left[\frac{2}{3} \bar{u} \gamma^{\mu} u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^{\mu} d \right] = 0 . \qquad (22.1.6)$$

(在量子色动力学出现之前, Sutherland^[2]和Veltman^[3]就给出了这个讨论, 不过在他们的讨论 中u夸克和d夸克换成了质子和中子.) 因为 π^0 是与对称性相联系的Goldstone玻色子, 像(22.1.1)这 样的非导数相互作用, 它的来源只能是夸克质量所造成的对称性破缺, 因此必须正比于 $m_{\pi}^2 \propto m_u + m_d$. 出于这种考虑, 我们预期常数g会被一个额外的因子 m_{π}^2/m_N^2 压低:

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2}\right)$$
 (22.1.7)

(取代 m_N , 我们也可以用19.3节讨论的手征对称性破缺标度 $2\pi F_{\pi} = 1200$ MeV, 但这对结果的影响 很小.) 也会有手征不变有效 $\pi^0 \gamma \gamma$ 相互作用会包含 π^0 场的导数. Lorentz不变性要求它们至少要包 含两个额外的导数. 利用齐次Maxwell方程 $\partial_{\mu}F_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}F_{\mu\lambda} = -\partial_{\lambda}F_{\mu\nu}$ 并分部积分, 我们看到只有两 个额外导数的独立手征不变耦合只有一个, 这个耦合通过在方程(22.1.1)中的 π^0 场上作用一个达朗 贝尔算符得到. 在 π 介子质量壳上, 这等同于给相互作用(22.1.1)乘以额外的因子 m_{π}^2 , 因此给出了 相同的估计(22.1.7). 有时会称手征对称性禁止了 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的衰变, 但更精确的表述是: 手征对称性 使得这一过程的速率在 $m_{\pi} \rightarrow 0$ 时趋于 m_{π}^2 而不是 m_{π}^3 .

困难在于, 观测到的 $\pi^2 \rightarrow 2\gamma$ 速率远大于从方程(22.1.7)出发所预期的, 实际上, 它反而更接近于从想当然的结果(22.1.3)推断出来的值. 更确切一些, 从方程(22.1.7)和方程(22.1.2), 我们预期衰变速率是

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^7 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2 m_N^4} = 1.9 \times 10^{13} \,\mathrm{s}^{-1} \,\,, \tag{22.1.8}$$

用方程(22.1.3)取代方程(22.1.7)给出的则是

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^3 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2} = 4.4 \times 10^{16} \,\mathrm{s}^{-1} \,\,, \tag{22.1.9}$$

观测到的速率是 $\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = (1.19 \pm 0.08) \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$,它与未经加工的粗略估计(22.1.9)符合的 非常好,但是比"改良"后的结果(22.1.8)要高三个数量级!我们不得不得出这样的结论:这里发生 了某种反常,它破坏了手征对称性,使得我们无法引入g中的额外因子 m_{π}^2/m_N^2 .在试图去理解其它 一些过程的速率时,例如 $n^0 \to \gamma + \gamma$ 的速率,也出现了类似的问题.

在1969年, Bell和Jackiw^[4]找到了这一反常的根源:为了推导中性轴矢量流守恒对于单 圈Feynman图的结果,我们需要引入正规化子,而这个正规化子破坏了手征对称性. Adler在研究 量子电动力学中的轴矢量Ward恒等式时独立地发现了手征反常,他证实了Bell和Jackiw的结果并 推广至高阶.^[5]随后,在1979年,Fujikawa^[6]意识到,在场论的路径积分形式体系中,手征对称性破 缺反常只出现在定义费米场路径积分所需的测度. 我们会在下一节看到,这一方法使得计算这一 反常产生的 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 振幅至微扰论的任意阶变得非常简单.在此之后,我们转向在更一般理论中如 何直接计算反常的问题,并讨论它的各种应用.

22.2 测度的变换: 阿贝尔反常

我们现在转向与π⁰衰变相关的那类反常的计算.为此,我们采用Fujikawa对反常的解释^[6]:无 法对费米场变量积分定义合适的不变测度就意味着反常的出现.Fujikawa对这一问题的分析基于 欧几里得空间中的路径积分,以及将费米变量的积分展成规范不变Dirac算符的本征函数,在4维 欧几里得空间中,它是厄米的.在这里,我们先给出一个不太严格的推导,这个推导基于我们更加 熟悉的闵可夫斯基路基积分,它使得我们进行很少的处理后就能获得正确的结果.我们会在本节 的末尾简略地讨论欧几里得方法,并用它推导著名的指标定理.

我们从计算测度变换中的反常出发,对于一列无质量自旋为1/2的复费米场 $\psi_n(x)$,假定它们与一组规范场 $A^{\mu}_{\alpha}(x)$ 之间相互作用不是手征的(例如,在计算 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的速率时,u夸克和d夸克与电磁矢势 $A^{\mu}(x)$ 的相互作用),在这列 $\psi_n(x)$ 的任意定域矩阵变换 $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$ 下,测度会有相应的变换,从中会出现反常.它们是费米变量,所以测度在变换后要乘的不是变换矩阵的行列式,而是行列式的逆:

$$[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \to (\mathrm{Det}\,\mathscr{U}\,\mathrm{Det}\,\mathscr{\bar{U}})^{-1}[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] , \qquad (22.2.1)$$

其中

$$\mathscr{U}_{xn,ym} \equiv U(x)_{nm} \delta^4(x-y) , \qquad (22.2.2)$$

$$\mathscr{U}_{xn,ym} \equiv [\gamma_4 U(x)^{\dagger} \gamma_4]_{nm} \delta^4(x-y)$$
(22.2.3)

 $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ 是用来定义 $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma_4$ 的矩阵. 指标n,m跑遍味指标和Dirac自旋指标.

在当前的讨论中,读者可能会好奇,我们为什么会因为在方程(22.2.3)中引入了因子 γ_4 而担忧, 它们只不过表明了幺正变换不应该影响行列式. 答案是,为了使得计算是有意义的,我们发现在计 算传播子和行列式时必须要对费米子模式和做正规化,并且我们会发现因子 γ_4 确实会影响正规化 行列式. 因此,是否引入因子 γ_4 取决于我们使用的正规化方法是否使得这些掩人耳目的操作是否 有意义. 我们引入因子 γ_4 是因为我们希望Lorentz不变性在正规化过程中会保留下来,而这里所感 兴趣的情况中,像标量那样变换的是 $\gamma_4 U(x)^{\dagger}\gamma_4$ 而非 $U(x)^{\dagger}$.

首先,我们来考察U(x)是非手征幺正变换的情况

$$U(x) = \exp[i\alpha(x)t] , \qquad (22.2.4)$$

其中t是通常的厄米矩阵(不包含 γ_5 , 但不一定无迹)而 $\alpha(x)$ 是x的任意实函数. 在这一情况下, \mathscr{U} 是 赝幺正的:

$$\bar{\mathscr{U}}\mathscr{U} = 1 , \qquad (22.2.5)$$

所以测度在这类变换下不变. 特别地, 在规范群自身下的对称性, 即*t*是非手征生成元*t*_α中的一个, 这个对称性没有被任何反常损坏.

接下来,考察定域手征变换,其中

$$U(x) = \exp[i\gamma_5\alpha(x)t] , \qquad (22.2.6)$$

t依旧是通常的厄米矩阵, 而 $\alpha(x)$ 依旧是x的任意实函数. 在这一情况下, \mathscr{U} 是赝厄米的:

$$\bar{\mathscr{U}} = \mathscr{U} , \qquad (22.2.7)$$

测度在这个手征变换下并非不变的;相反,我们有

$$[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \to (\mathrm{Det}\,\mathscr{U})^{-2}[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] , \qquad (22.2.8)$$

我们现在专注于无限小定域手征变换的情况. 取方程(22.2.6)中的α(x)为无穷小量, 这时我们 有

$$[\mathscr{U} - 1]_{nx,my} = i\alpha(x)[\gamma_5 t]_{nm}\delta^4(x - y) . \qquad (22.2.9)$$

利用恒等式Det $M = \exp \operatorname{Tr} \ln M$ 以及极限公式: $x \to 0$ 时, $\ln(1 + x) \to x$. 现在, 测度的变换性质 是

$$[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \to \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\alpha(x)\mathscr{A}(x)\right\}[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] ,\qquad(22.2.10)$$

其中𝒜(x)是反常函数:

$$\mathscr{A}(x) = -2 \operatorname{Tr}\{\gamma_5 t\} \,\delta^4(x - x) \,\,, \qquad (22.2.11)$$

这里的"Tr"是指对Dirac指标和种类指标求迹.测度 $[d\psi][d\bar{\psi}]$ 会伴随权重因子exp{ $i \int d^4x \mathscr{L}(x)$ }出现在路径积分中,所以测定变换规则(22.2.10)中的因子exp{ $i \int d^4x \alpha(x) \mathscr{A}(x)$ }就等同于拉格朗日密度在这一变换下并非不变,而是有 $\mathscr{L}(x) \to \mathscr{L}(x) + \alpha(x) \mathscr{A}(x)$.因此,当我们使用一个费米子自由度已经积掉的有效作用量时,为了将反常考虑在内,我们必须要引入一个非不变项使得

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(x) \to \mathscr{L}_{\text{eff}}(x) + \alpha(x)\mathscr{A}(x)$$
 (22.2.12)

现在,剩下的问题就是计算反常函数*A*(x).

乍看起来,我们似乎无法从这一反常中得到任何有限的结果.δ-函数是无限的,但是迹却为零.为了做的更好些,我们必须要引入正规化子使得 $\delta^4(x-x)$ 有意义.在δ-函数的变量趋于零之前,通过在δ-函数上面作用一个微分算符 $f(-D_x^2/M^2)$,我们可以以规范不变的方式实现这点:

$$\mathscr{A}(x) = -2 \Big[\operatorname{Tr} \left\{ \gamma_5 t \, f(-\not{\!\!\!D}_x^2/M^2) \right\} \delta^4(x-y) \Big]_{y \to x} \,. \tag{22.2.13}$$

这里的 D_x 是存在规范场 $A^{\mu}_{\alpha}(x)$ 时的Dirac微分算符:

$$(D_x)_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \mathrm{i}t_{\alpha}A_{\alpha\mu}(x) \ .$$
 (22.2.14)

另外, *M*是某个很大的质量, 最终会取成无穷, 而f(s)是光滑函数, 仅服从如下的条件,^{*}随着s从0到 ∞ , f(s)从1掉落至0:

$$f(0) = 1$$
, $f(\infty) = 0$, (22.2.15)

$$sf'(s) = 0$$
, $\forall \exists f = 0 \exists s = \infty$. (22.2.16)

注意到,由于我们希望保护规范不变性,所以我们不能把正规化子函数取成 ∂ 的函数,同时,由于我们需要这个正规化子不仅正规化行列式,也要正规化费米传播子 D^{-1} ,所以我们也不能把它取成 $D^{\mu}D_{\mu}$ 的函数.

*例如, 我们可以取 $f(s) = e^{-s^2}$, 最初Fujikawa就是这么做的, 或者取f(s) = 1/(1+s).

为了计算(22.2.13), 我们使用δ-函数的Fourier表示, 将反常函数写成

$$\mathscr{A}(x) = -2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \left[\mathrm{Tr} \left\{ \gamma_5 t f(-D_x^2/M^2) \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot (x-y)} \right]_{y=x} \\ = -2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \, \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_5 t f\left(-[\mathrm{i}k + D_x]^2/M^2\right) \right\} \,.$$

(相对x的导数作用在第二个表达式最右边时为零,但是当它作用在 $A_{\alpha\mu}(x)$ 上时不为零.) 对动 量 k^{μ} 放缩一个因子M,这是

$$\mathscr{A}(x) = -2M^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 \, t \, f\left(-[\mathrm{i} \not k + \not D_x/M]^2\right)\right\} \,. \tag{22.2.17}$$

截断函数的变量可以写成

$$-\left[\mathrm{i}\not\!k + \frac{\not\!\!D_x}{M}\right]^2 = k^2 - \frac{\mathrm{i}k \cdot D_x}{M} - \left(\frac{\not\!\!D_x}{M}\right)^2. \tag{22.2.18}$$

在*M*→∞的极限下,在*f*(-[i*k*+ D_x/M]²)的展开中,只有那些1/*M*因子不超过4个的项以及那些 至少包含4个Dirac-γ矩阵的项才会对方程(22.2.17)有贡献,若非如此,对Dirac指标的迹就会为零. 这样就只剩下了 D_x^2 的二阶项:

现在,它独立于正规化子质量M.

为了计算对*k*的积分,就像在计算Feynman图中那样,我们对*k*⁰的围道做同一类旋转,这使 得*k*⁰要换成*ik*⁴, 而*k*⁴要从-∞取到+∞. (实际上,只有从开始阶段就用欧几里得路径积分进行处 理,我们才能证明这一步的合理性.) 那么,这个积分实际上是

$$\int d^4k \, f''(k^2) = i \int_0^\infty 2\pi^2 \kappa^3 \, d\kappa \, f''(\kappa^2) \,. \tag{22.2.20}$$

先用方程(22.2.16)再用方程(22.2.15), 重复做分部积分, 这是

$$\int d^4k \, f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds \, s \, f''(s) = -i\pi^2 \int_0^\infty ds \, f'(s) = i\pi^2 \,. \tag{22.2.21}$$

为了计算这个迹,我们写下

 D_x^4 中对Dirac指标的迹有贡献的项只有包含4个Dirac矩阵乘积的那一项,它给出

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{D}}\left\{\gamma_{5}\left[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\right]\left[\gamma_{\rho},\gamma_{\sigma}\right]\right\} = 16\,\mathrm{i}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\,,\qquad(22.2.23)$$

其中"tr_D"是指仅对Dirac指标求迹, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 同往常一样是 $\epsilon^{0123} = +1$ 的全反对称张量. 在方程(22.2.19)中使用方程(22.2.21)—(22.2.23), 那么这给出反常函数

$$\mathscr{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}_{\alpha}(x) F^{\rho\sigma}_{\beta}(x) \operatorname{tr}\{t_{\alpha} t_{\beta} t\} , \qquad (22.2.24)$$

这里的"tr"是指只对费米子的种类指标求迹. 在t是单位矩阵的特殊情况下, (22.2.24)被称为*Chern-Pontryagin*密度(陈-庞特里亚金密度).

这一结果可以表示与反常对称性对应的流.简单起见,如果我们假定,在 α 为无限小常数的对称变换 $\psi(x) \rightarrow \psi(x) + it\gamma_5 \alpha \psi(x)$ 下,拉格朗日量不变,那么,就像7.3节中讨论的那样,当我们把这个变换的参量变成时空相关参量 $\alpha(x)$ 时,作用量的变化就可以写成 $\delta I = \int d^4x J_5^{\mu}(x) \partial_{\mu} \alpha(x)$,其中 $J_5^{\mu}(x)$ 是流,当场算符满足动力学方程,即要求作用量相对场的任意变分都为零所给出的方程,这个流是守恒的.当我们取变量变分为 $\delta \psi(x) = it\alpha(x)\psi(x)$,费米场路径积分的变化是

$$\delta \int [\mathrm{d}\psi] [\mathrm{d}\bar{\psi}] \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I} = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \int [\mathrm{d}\psi] [\mathrm{d}\bar{\psi}] [\mathscr{A}(x)\alpha(x) + J_5^{\mu}(x)\partial_{\mu}\alpha(x)] \mathrm{e}^{\mathrm{i}I} \,, \qquad (22.2.25)$$

但这只是一个变量代换,所以对于任意的α(x),它不会影响路径积分.因此,对于任意的规范场

$$\langle \partial_{\mu} J_{5}^{\mu} \rangle_{A} = \mathscr{A} = -\frac{1}{16\pi^{2}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}_{\alpha}(x) F^{\rho\sigma}_{\beta}(x) \operatorname{tr}\{t_{\alpha} t_{\beta} t\} , \qquad (22.2.26)$$

其中对于任何算符O, (O)A是O在固定背景场A^µ(x)中的量子平均:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_A \equiv \frac{\int [\mathrm{d}\psi] [\mathrm{d}\bar{\psi}] \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I} \,\mathcal{O}}{\int [\mathrm{d}\psi] [\mathrm{d}\bar{\psi}] \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I}} \,. \tag{22.2.27}$$

顺便一提, 方程(22.2.26)不可能重写为守恒条件. 考察如下的特殊情况: tr{ $t_{\alpha} t_{\beta} t$ }正比于 $\delta_{\alpha\beta}$, 即

$$\operatorname{tr}\{t_{\alpha} t_{\beta} t\} = N\delta_{\alpha\beta} . \qquad (22.2.28)$$

定义流:

$$G^{\mu} \equiv 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_{\gamma\nu}\partial_{\lambda}A_{\gamma\rho} + \frac{1}{3}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\nu}A_{\beta\lambda}A_{\gamma\rho} \right] = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_{\gamma\nu}F_{\gamma\lambda\rho} - \frac{1}{3}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\nu}A_{\beta\lambda}A_{\gamma\rho} \right] , \qquad (22.2.29)$$

它被称为Chern-Simons类(陈-西蒙斯类),它满足恒等式

$$\partial_{\mu}G^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\gamma\mu\nu}F_{\gamma\lambda\rho} . \qquad (22.2.30)$$

方程(22.2.30)使得我们可以将方程(22.2.26)重写成条件

$$\partial_{\mu}K^{\mu} = 0$$
, (22.2.31)

其中

$$K^{\mu} \equiv \left\langle J_{5}^{\mu} \right\rangle_{A} + \frac{N}{8\pi^{2}} G^{\mu} . \qquad (22.2.32)$$

然而,我们不能仿照我们上一节的做法,用流 K^{μ} 的守恒论证过程 $\pi^{0} \rightarrow 2\gamma$ 被抑制了,这是因为,在 这样的论证中,我们不仅要假定与轴矢量流守恒对应的手征对称性,还要假定电磁规范不变性,而 我们从方程(22.2.29)看到:流 K^{μ} 虽然是守恒的,但是它不是规范不变的.

我们对反常函数(22.2.24)的推导表明,如果我们在方程(22.2.13)用微分算符 $f(-\partial_x^2/M^2)$ 计算反常函数,而不是 $f(-D_x^2/M^2)$,那么我们的反常函数就为零.事实上,在这个正规化处理下,轴矢

量流是*K*^µ, 而不是*J*^µ. 正如之前所提及的, 这一处理的问题在于正规化子算符不再是规范不变的, 这导致了*K*^µ中出现了非规范不变项. 对于费米子传播子以及行列式, 不存在既规范不变又手征不 变的正规化处理.

现在,我们可以回到最早给出的反常的那个问题,并用我们的结果计算过程 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的真实速率.对于我们这里所感兴趣的对称性,它由轻夸克场的电中性手征变换生成:

$$\delta u = i\alpha\gamma_5 u$$
, $\delta d = -i\alpha\gamma_5 d$. (22.2.33)

在纯量子色动力学中,由于u夸克和d夸克属于色规范群的同一表示,对于对称性(22.2.33)的反常, 这使得它们对反常中胶子-胶子项的贡献抵消了,所以这个对称性是无反常的.另一方面,当存在 电磁场*A^µ(x*)时,这一对称性有如下的反常

$$\mathscr{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \operatorname{tr}\left\{q^2 \tau_3\right\} \,,$$

其中q是夸克电荷矩阵, τ_3 是2 × 2对角矩阵, 它对于u有元素+1, 对于d则是-1. 如果我们假定 fN_c 个电荷为2e/3的u夸克, 以及 N_c 个电荷为-e/3的d夸克, 那么迹就是

$$\operatorname{tr}\left\{q^{2} \tau_{3}\right\} = N_{c}\left(\frac{2e}{3}\right)^{2}(+1) + N_{c}\left(\frac{-e}{3}\right)^{2}(-1) = \frac{N_{c}e^{2}}{3}$$

所以这里的反常函数是

$$\mathscr{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \;. \tag{22.2.34}$$

这样,我们就必须在有效拉格朗日量中引入一项,使得它在手征变换(22.2.33)下拥有变换(22.2.12),即

$$\delta \mathscr{L}_{\text{eff}}(x) = \alpha \mathscr{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \alpha . \qquad (22.2.35)$$

在变换(22.2.33)下, π介子场的变换是

$$\delta \pi^0 = \alpha F_\pi \quad , \tag{22.2.36}$$

其中 $F_{\pi} = 184 \,\text{MeV}$ 是第19章引入的 π 介子衰变振幅. (我们对对称性生成元的定义是 $\gamma_5 \tau_3 = 2\gamma_5 t_3$, 这固定了该常数的归一化约定.) 由此得出, 我们在拉格朗日量中必须要引入的项是

$$\frac{\pi^0(x)\mathscr{A}(x)}{F_\pi} = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi} \,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \,\pi^0(x) \;. \tag{22.2.37}$$

 $\pi^2 \rightarrow 2\gamma$ 衰变的有效作用量,它的一般公式是(22.1.1),比较这两个式子,我们发现方程(22.1.1)中的g必须有如下的值^[5]

$$g = \frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi} \ . \tag{22.2.38}$$

(这表明我们上一节的粗略估计仅比这个结果大6/Nc倍.因此, π介子衰变速率预期是

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{N_c \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1.11 \times 10^{16} \,\mathrm{s}^{-1} \,. \tag{22.2.39}$$

观测到的速率是 $\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = (1.19 \pm 0.08) \times 10^{16} \text{ s}^{-1},$ 仅当 $N_c = 3$ 时, 理论结果(22.2.39)才与其符合的非常好. 这一计算的成功是夸克色有三个的首批坚实证据中的一个.

引人注目的是,正如我们在上一节所看到的,在发现 π^0 不久之后,Steinberger从单质子圈 图中计算了g,获得结果 $g = e^2G/32\pi^2m_N$,其中G是赝标量 π 介子-核子耦合常数.如果我们 用 $g_A = 1$ 的Goldberger-Treiman关系令 $G = 2m_N/2F_{\pi}$,这一结果就与 $N_c = 3$ 的方程(22.2.38)精确 一致.正确结果要比Steinberger的结果大一个因子 $g_A^2 = 1.56$.Steinberger距离正确结果如此之近 的原因是,这个结果由三角反常决定,而三角反常正比于tr{ $q^2\tau_3$ }.对于单个质子,这个迹的值 是 e^2 ,这与前面发现的三个夸克色所给出的夸克值相同.

* * *

正如之间所提及的,通过使用欧几里得时空下的路径积分,我们可以给出这个反常一个更加严格的推导.(在第23章的附录会简要讨论欧几里得路径积分的使用方法.)我们引入欧几里得4-坐标 $x_4 = ix^0 = -ix_0$,以及相应的, $\partial_4 = -i\partial_0$, $\gamma_4 \equiv i\gamma^0 \pi A_{4\alpha} = iA^0_{\alpha}$.那么,时空体积元就表示成d⁴ $x = -i(d^4x)_E$,其中(d⁴ $x)_E$ 是欧几里得体积元(d⁴ $x)_E = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.在欧几里得时空中,场 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 必须视为完全独立的,定域手征变换定义成 $\delta\psi(x) = i\alpha(x)t\gamma_5\psi(x), \delta\bar{\psi}(x) = -i\alpha(x)\bar{\psi}(x)t\gamma_5$.这样,测度的变换还是由方程(22.2.10)给出,而反常函数 $\mathscr{A}(x)$ 还是由方程(22.2.11)给出.像之前一样,引入正规化子函数,这再次给出 $\mathscr{A}(x)$ 的公式(22.2.13).欧几里得方法的一个巨大优点在于,由于 x_4 和 $A_{4\alpha}$ 是实的,方程(22.2.13)中的Dirac算符iD就是厄米的:

$$i D = \left[i \partial_i + t_\alpha A_{i\alpha} \right] \gamma_i , \qquad (22.2.40)$$

其中i, j等在这里要对1,2,3,4求和.因此,它有正交旋量本征函数 $\varphi_{\kappa}(x)$:

$$i D \!\!\!/ \varphi_{\kappa} = \lambda_{\kappa} \varphi_{\kappa} , \qquad (22.2.41)$$

$$\int (\mathrm{d}^4 x)_E \,\varphi^{\dagger}_{\kappa}(x)\varphi_{\kappa'}(x) = \delta_{\kappa\kappa'} \,\,, \qquad (22.2.42)$$

其中 λ_{κ} 是实本征值. 贯穿本节始终, 我们还假定t与iD对易, 这样我们就可以选择 φ_{κ} 使得 $t\varphi_{\kappa} = t_{\kappa}\varphi_{\kappa}$. 这些本征函数满足完备关系

$$\sum_{\kappa} \varphi_{\kappa}(x) \varphi_{\kappa}^{\dagger}(y) = \delta^4(x-y) 1 , \qquad (22.2.43)$$

其中"1"是4×4矩阵.因此,反常函数现在可以表示成一个显然收敛的和的极限

$$\mathscr{A}(x) = -2 \lim_{M \to \infty} \operatorname{Tr} \left\{ \gamma_5 t f(-\not{D}^2/M^2) \sum_{\kappa} \varphi_{\kappa}(x) \varphi_{\kappa}^{\dagger}(x) \right\}$$
$$= -2 \lim_{M \to \infty} \sum_{\kappa} t_{\kappa} f(\lambda_{\kappa}^2/M^2) \left(\varphi_{\kappa}^{\dagger}(x) \gamma_5 \varphi_{\kappa}(x) \right) .$$
(22.2.44)

利用我们推导反常函数公式(22.2.24)的方法,我们可以在这里证明

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^E_{ijkl} F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \operatorname{tr}\{t_{\alpha} t_{\beta} t\} , \qquad (22.2.45)$$

其中 ϵ_{ijkl}^{E} 是 ϵ_{1234}^{E} = +1的全反对称张量. (方程(22.2.24)和(22.2.45)之间的符号差异的来源是, 与方程(22.2.24)相比, 方程(22.2.45)要少两个i因子: 一个i因子来自于方程(22.2.23), 原因是

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{D}}\{\gamma_{5}[\gamma_{i},\gamma_{j}][\gamma_{k},\gamma_{l}]\} = 16 \,\epsilon^{E}_{ijkl} \,,$$

而另一是因为方程(22.2.20)中的d⁴k被换成了(d⁴k)_E.)

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{D}}\{\gamma_{5}[\gamma_{i},\gamma_{j}][\gamma_{k},\gamma_{l}]\}=16\,\epsilon_{ijkl}^{E}\,,$$

现在,对于iD和t的任意给定本征函数 $\varphi_{\kappa}(x)$,只要它的本征值 $\lambda_{\kappa} \neq 0$,就存在另一个归一化本 征函数 $\varphi_{\kappa^{-}}$,它的本征值是 $\lambda_{\kappa^{-}} = -\lambda_{\kappa}$ 和 t_{κ} ,这个本征函数由 $\varphi_{\kappa^{-}}(x) = \gamma_{5}\varphi_{\kappa}(x)$ 给出.(回忆,在本书 所使用的符号约定中, γ_{5} 是厄米矩阵 $\gamma_{5} = i\gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}\gamma_{0} = \gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}\gamma_{4}$.)因为 $\varphi_{\kappa}(x)$ 和 $\varphi_{\kappa^{-}}(x)$ 是同一算 符的两个本征值不同的本征矢,它们互相正交,所以 $\int d^{4}x \left(\varphi_{\kappa}^{\dagger}(x)\gamma_{5}\varphi_{\kappa}(x)\right) = 0$.这使得剩下的是 对 $\lambda_{\kappa} = 0$ 的本征函数求和.这些本征函数一般不会两两配对;相反,由于 γ_{5} 与iD反对易,它们可以 选成iD和 γ_{5} 的同步正交函数 φ_{u} 和 φ_{v} ,使得对于iD,它们的本征值为零,对于 γ_{5} ,它们的本征值分别 是+1和-1.

$$i\mathcal{D}\varphi_u = 0 , \qquad \gamma_5\varphi_u = \varphi_u ,$$

$$i\mathcal{D}\varphi_v = 0 , \qquad \gamma_5\varphi_v = -\varphi_v .$$
(22.2.46)

利用f(0) = 1的性质, 方程(22.2.44)变成

$$\mathscr{A}(x) = -2\left[\sum_{u} t_u \left(\varphi_u^{\dagger}(x)\varphi_u(x)\right) - \sum_{v} t_v \left(\varphi_v^{\dagger}(x)\varphi_v(x)\right)\right] .$$
(22.2.47)

现在,既然 φ_u 和 φ_v 是像方程(22.2.42)中那样归一化的,方程(22.2.47)的积分给出

$$\int (\mathrm{d}^4 x)_E \mathscr{A}(x) = -2 \left[\sum_u t_u - \sum_v t_v \right] \,, \qquad (22.2.48)$$

其中对u和v的求和分别跑遍算符iD的左手模和右手模.特别地,对于t是单位矩阵的特殊情况,通过方程(22.2.45),它关联了规范场的一个泛函与Dirac算符手征性确定的零模的个数,这个关系表示成:

$$-\frac{1}{32\pi^2} \int (\mathrm{d}^4 x)_E \,\epsilon^E_{ijkl} \,F_{\alpha ij} \,F_{\beta kl} \,\operatorname{tr}\left[t_\alpha t_\beta\right] = n_+ - n_- \,\,, \tag{22.2.49}$$

其中,这里的n_±是D的零模个数,它对于γ₅有本征值±1.这是著名的Atiyah-Singer指标定理(阿蒂亚-辛格指标定理).^[6a]此外,它表明了,随着规范场的变化,方程(22.2.49)左边的积分不能光滑地变化,它的变化只能是一个整数,所以这个积分只能依赖于规范场的拓扑.它与拓扑的关系将在23.5节进行讨论.

22.3 反常的直接计算: 一般情况

我们在22.2节看到, 在量子色动力学这样的规范理论中, 如何用漂亮的Fujikawa方法计算手 征对称性的反常, 在这种规范理论中, 规范相互作用是非手征的并且费米子也不守恒. 这一方法也 可用来处理更一般的问题, 但是在那种情况, 它就没有那么直接了.^[7] 在本节, 我们将通过直接计 算来处理反常, 这也是处理反常的最初方法. 这将会为反常提供另一个有用的视角, 随之, 这使得 我们在讨论一般理论中的反常是不会有太多额外的麻烦.

为了处理这个一般情况,我们将把所有左手费米场(包括反费米子,在这里作区分是有意义的)写进单个列矢量χ中.例如ψ是包含所有夸克场和轻子场(与之对照的就是反夸克和反费米



图 22.1 这两个三角图给出了流j^µ_µ(x)中的反常. 实线是费米子; 波浪线代表的是与流耦合的虚拟规范场.

子)的列矢量,那么

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\\ \frac{1}{2}[\beta\mathscr{C}(1-\gamma_5)\psi]^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\\ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\beta\mathscr{C}\psi^* \end{bmatrix} , \qquad (22.3.1)$$

其中&是5.4节定义的矩阵

$$\mathscr{C}\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}^{-1} = -\gamma_{\mu} \; ,$$

引入这个矩阵是为了让χ的所有分量均在Lorentz群的同一个(1/2,0)表示下. 在费米子数(例如, 重子数或重子数减去轻子数)守恒的无限小规范变换下:

$$\delta\psi = i\theta_{\alpha} \Big[\frac{1}{2} (1+\gamma_5) t_{\alpha}^L + \frac{1}{2} (1-\gamma_5) t_{\alpha}^R \Big] \psi$$
(22.3.2)

这个列矢量的变换是

$$\delta\chi = i\epsilon_{\alpha}T_{\alpha}\chi , \qquad (22.3.3)$$

其中

$$T_{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{\alpha}^{L} & 0\\ 0 & -t_{\alpha}^{R*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{\alpha}^{L} & 0\\ 0 & -(t_{\alpha}^{R})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} .$$
(22.3.4)

在这里, 我们不会将自身限制在那些费米子数守恒的理论中, 所以现在的*T*_α将是规范群的任意厄 米表示, 不一定是分块对角形式(22.3.4). 目前, 我们只考察无质量费米子, 随后会回到费米子质量 所产生的影响.

我们在这里所考察的是单圈三点函数:

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \equiv \langle T\{j^{\mu}_{\alpha}(x), j^{\nu}_{\beta}(y), j^{\rho}_{\gamma}(x)\}\rangle_{\text{VAC}} , \qquad (22.3.5)$$

其中jä是费米子流,写成自由场则是:

$$j^{\mu}_{\alpha} = -i\bar{\chi}T_{\alpha}\gamma^{\mu}\chi \ . \tag{22.3.6}$$

图22.1的两个Feynman图给出

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = -i \operatorname{Tr} \left[S(x-y)T_{\beta}\gamma^{\nu}P_{L}S(y-z)T_{\gamma}\gamma^{\rho}P_{L}S(z-x)T_{\alpha}\gamma^{\mu}P_{L} \right] - i \operatorname{Tr} \left[S(x-z)T_{\gamma}\gamma^{\rho}P_{L}S(z-y)T_{\beta}\gamma^{\nu}P_{L}S(y-x)T_{\alpha}\gamma^{\mu}P_{L} \right] , \qquad (22.3.7)$$

其中PL是左手费米场上的投影算符

$$P_L = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{22.3.8}$$

而S(x)是无质量费米场的传播子:

(关于Feynman规则这一用法的进一步注解,参看本节末尾.) 收集所有的因子,方程(22.3.7)现在写做

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 \, d^4k_2 \, e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} \, e^{ik_1\cdot y} \, e^{ik_2\cdot z} \int d^4p \\ \times \left\{ \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_1 + \not a}{(p-k_1+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not a}{(p+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not k_2 + \not a}{(p+k_2+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\mu} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\ \times \operatorname{tr} \left[T_{\beta} T_{\gamma} T_{\alpha} \right] \\ + \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_2 + \not b}{(p-k_2+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not b}{(p+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not k_1 + \not b}{(p+k_1+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\mu} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\ \times \operatorname{tr} \left[T_{\gamma} T_{\beta} T_{\alpha} \right] \right\},$$

$$(22.3.10)$$

其中,取决于变量,tr分别指对Dirac指标或群指标求迹.我们引入两个任意的4-矢常数a和b是因为,尽管表达式(22.3.10)是收敛的,也随之独立于内线所携带的动量,但是在计算 $\partial_{\mu}\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}$ 时要处理一个发散积分,而这个积分却会依赖标记内线的动量.我们将会看到,选择 a^{μ} 和 b^{μ} 的自由度对应于将反常从一个流移向另一个流的自由度,但这并不会使得我们能够同时消掉这些流上的反常.

为了取出方程(22.3.10)中的发散,我们使用恒等式

$$k_1 + k_2 = (p + k_2 + a) - (p - k_1 + a) = (p + k_1 + b) - (p - k_2 + b)$$

并发现

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 d^4k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \int d^4p \\
\times \left\{ \operatorname{tr} \left[T_\beta T_\gamma T_\alpha \right] \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_1 + \not a}{(p-k_1+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not a}{(p+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\
- \operatorname{tr} \left[T_\beta T_\gamma T_\alpha \right] \operatorname{tr} \left[\frac{\not p + \not a}{(p+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not k_2 + \not a}{(p+k_2+a)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\
+ \operatorname{tr} \left[T_\gamma T_\beta T_\alpha \right] \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_2 + \not b}{(p-k_2+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not b}{(p+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\
- \operatorname{tr} \left[T_\gamma T_\beta T_\alpha \right] \operatorname{tr} \left[\frac{\not p + \not b}{(p+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not k_1 + \not b}{(p+k_1+b)^2 - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \right\}$$
(22.3.11)

现在,将三点函数分成群指标的对称项和反对称项将会方便之后的处理,方法是借助如下的公式

$$\operatorname{tr}\left[T_{\beta} T_{\gamma} T_{\alpha}\right] = D_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} \mathrm{i} N C_{\alpha\beta\gamma}$$

 $\cdot 272 \cdot$

以及

$$\operatorname{tr}\left[T_{\gamma} T_{\beta} T_{\alpha}\right] = D_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} \mathrm{i} N C_{\alpha\beta\gamma} ,$$

其中D_{αβγ}是全反对称量

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\{T_{\alpha}, T_{\beta}\} T_{\gamma}]$$
(22.3.12)

而结构常数C_{αβγ}的系数由下式定义

$$\operatorname{tr}[T_{\alpha}T_{\beta}] = N\,\delta_{\alpha\beta} \;.$$

关于群指标反对称的那些项一般不为零,但是它们不代表对称性的破坏.就像在10.4节推导Ward恒等式那样,对于矩阵元(22.3.5)中的发散做一形式计算,编时乘积中暗含了δ-函数,在这个计算中,我们会遇到它的时间导数的贡献,它等于

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \end{bmatrix}_{\text{formal}} = -\mathrm{i}C_{\alpha\beta\delta}\delta^{4}(x-y)\langle j^{\nu}_{\delta}(y)j^{\rho}_{\gamma}(z)\rangle_{\text{VAC}} -\mathrm{i}C_{\alpha\gamma\delta}\delta^{4}(x-z)\langle j^{\nu}_{\beta}(y)j^{\rho}_{\delta}(z)\rangle_{\text{VAC}} .$$
(22.3.13)

不难看到, 方程(22.3.11)中的反对称项恰恰再生了方程(22.3.13). 反常包含在方程(22.3.11)的对称 部分中:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \end{bmatrix}_{\text{anom}} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^{4}k_{1} d^{4}k_{2} e^{-i(k_{1}+k_{2})\cdot x} e^{ik_{1}\cdot y} e^{ik_{2}\cdot z} \\ \times \int d^{4}p \left\{ \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_{1} + \not a}{(p-k_{1}+a)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not a}{(p+a)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{1+\gamma_{5}}{2} \right] \\ - \operatorname{tr} \left[\frac{\not p + \not a}{(p+a)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not k_{2} + \not a}{(p+k_{2}+a)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{1+\gamma_{5}}{2} \right] \\ + \operatorname{tr} \left[\frac{\not p - \not k_{2} + \not b}{(p-k_{2}+b)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{\not p + \not b}{(p+b)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{1+\gamma_{5}}{2} \right] \\ - \operatorname{tr} \left[\frac{\not p + \not b}{(p+b)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\nu} \frac{\not p + \not k_{1} + \not b}{(p+k_{1}+b)^{2} - i\epsilon} \gamma^{\rho} \frac{1+\gamma_{5}}{2} \right] \right\}.$$
(22.3.14)

将第一个迹和第四个迹合在一起, 第二个迹和第三个迹合在一起, 它可以变成如下的形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \end{bmatrix}_{\text{anom}} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4k_1 \, d^4k_2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)\cdot x} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\cdot y} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\cdot z} \\ \times \left\{ \operatorname{tr} \left[\gamma^{\kappa} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(a-b-k_1,b,b+k_1) \right. \\ \left. + \operatorname{tr} \left[\gamma^{\kappa} \gamma^{\rho} \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(b-a-k_2,a,a+k_2) \right\},$$
(22.3.15)

其中

$$I_{\kappa\lambda}(k,c,d) \equiv \int d^4p \left[f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d) - f_{\kappa\lambda}(p,c,d) \right]$$
(22.3.16)
$$(p+c) (p+d)$$

$$f_{\kappa\lambda}(p,c,d) \equiv \frac{(p+c)_{\kappa}(p+d)_{\lambda}}{[(p+c)^2 - i\epsilon][(p+d)^2 - i\epsilon]} .$$
(22.3.17)

为了计算这些积分,考察函数 $f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d)$ 关于k的幂级数展开:

$$f_{\kappa\lambda}(p+k,c,d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{\mu_1} \cdots k^{\mu_n} \frac{\partial^n f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^{\mu_1} \cdots \partial p^{\mu_n}}$$

在方程(22.3.16)中,零阶项f(p,c,d)抵消了.除此之外的其它所有项是对p的导数的积分,因此, 在Wick旋转后,它可以写成对一个很大3-球面的面积分,记3-球面的半径为P.对f的n阶导数而 言,它会给出行为为 $P^{-2-(n-1)}$ 的函数的面积分,而半径为P的3-球面,它的面积会趋于 P^3 ,所以, 在 $P \to \infty$ 时,唯一有贡献的项是那些n = 1和n = 2的项:

$$I_{\kappa\lambda}(k,c,d) = k^{\mu} \int d^4p \, \frac{\partial f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^{\mu}} + \frac{1}{2} k^{\mu} k^{\nu} \int d^4p \, \frac{\partial^2 f_{\kappa\lambda}(p,c,d)}{\partial p^{\mu} \partial p^{\nu}} \,. \tag{22.3.18}$$

那么,直接计算给出

$$I_{\kappa\lambda}(k,c,d) = \frac{1}{6}i\pi^2 \Big[2k_\lambda c_\kappa + 2k_\kappa d_\lambda - k_\lambda d_\kappa - k_\kappa c_\lambda - \eta_{\kappa\lambda} k \cdot (k+c+d) \Big] .$$
(22.3.19)

我们现在必须对方程(22.3.15)迹中的项分别进行考察,它们分别来自投影矩阵 $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ 中的1和 γ_5 .来自1的项包含tr[$\gamma^{\kappa}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}$],它分别关于 κ 和 λ 以及 ν 和 ρ 是对称的,所以这里的积分以如下的组合出现

$$I_{\kappa\lambda}(a - b - k_1, b, b + k_1) + I_{\lambda\kappa}(a - b - k_1, b, b + k_1) + I_{\kappa\lambda}(b - a - k_2, a, a + k_2) + I_{\lambda\kappa}(b - a - k_2, a, a + k_2)$$

利用方程(22.3.19), 不难看到, 当且仅当我们选择未定常数矢量使得

$$a = -b$$
, (22.3.20)

这个积分才为零.更进一步,由于在 $(\partial/\partial y^{\nu})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 中, a和b会被换成 $a' = k_2 + a$ 和 $b' = -k_2 + b$, 而在 $(\partial/\partial z^{\rho})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 中, a和b会被换成 $a'' = k_1 + a$ 和 $b'' = -k_1 + b$, 那么, 取a = -b的同时也确 保了a' = -b'和a'' = -b'',所以这个选择避免了所有三个流的非手征反常.

剩下的项是迹中含75的项.它是全返对称的

$$\operatorname{tr}\left[\gamma^{\kappa}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\gamma_{5}\right] = -4\mathrm{i}\,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \,, \qquad (22.3.21)$$

其中 $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ 是 $\epsilon^{0123} = 1$ 的全反对称张量.在方程(22.3.15)使用上式以及a = -b,这给出

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \end{bmatrix}_{\text{anom}} = \frac{2}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4k_1 \, d^4k_2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)\cdot x} \\ \times \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 \cdot y} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 \cdot z} \, \pi^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} a_\kappa \, (k_1+k_2)_\lambda \, . \tag{22.3.22}$$

我们可以通过取 $a \propto k_1 + k_2$ 来消掉流 $J^{\mu}_{\alpha}(x)$ 中的反常(22.3.22). 尽管这一步是可行的,但 是它并不会同时消掉所有反常;反常将会出现在 $(\partial/\partial y^{\nu})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 或 $(\partial/\partial z^{\rho})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 中. 这一问题的对称性表明,当且仅当 $(k_2 + a) - (-k_2 + b) \propto k_1$ 时,换句话说 $a + k_2 \propto k_1$ 时, $(\partial/\partial y^{\nu})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 中的反常才会消失,而要使 $(\partial/\partial z^{\rho})\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 不出现反常,则要 $(-k_1 + a) - (k_1 + b) \propto k_2$,即 $a - k_1 \propto k_2$.选择 a^{μ} 使得它满足其中的两个条件是可能的,但对于不平行 的 $k_1 \pi k_2$,显然不可能同时满足三个条件—— $a \propto k_1 + k_2$, $a + k_2 \propto k_1 \pi a - k_1 \propto k_2$. (例如,前两 个条件会给出 $a = -k_1 - k_2$,这与第三个条件矛盾.)我们由此得出这样的结论:尽管我们在决定那 个流上出现反常有一定的自由,但是 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 不为零则确定地表明 $J^{\mu}_{\alpha}(x)$, $J^{\nu}_{\beta}(y) \pi J^{\rho}_{\gamma}(z)$ 中至少有一个 流存在反常.这是这些计算的主要结果之一,在下一节,由它出发进行拓展,会给出对规范场所含 物质的约束.

我们已然看到,反常的计算依赖于我们对偏移矢量a^µ的选择.不幸的是,没有一个选择始终是 令人满意的,所以我们必须针对手中问题的具体特征选择a^µ.

在一类很重要的问题中, $J^{\mu}_{\alpha}(x)$ 是整体对称性的流, 而 $J^{\nu}_{\beta}(y)$ 和 $J^{\rho}_{\gamma}(z)$ 是规范对称性的流, 即, 与规范场耦合的流. (我们在上一节处理过这样的问题.) 在这样的情况中, 我们必须要选择 a^{μ} 使得反常仅在 $J^{\mu}_{\alpha}(x)$ 中, 而 $J^{\nu}_{\beta}(y)$ 和 $J^{\rho}_{\gamma}(z)$ 不能出现反常. 正如我们之前所发现的, 这相当于要求 $a + k_2 \propto k_1$ 以及 $a - k_1 \propto k_2$, 这给出唯一的结果

$$a = k_1 - k_2 . (22.3.23)$$

对a^µ取这个值,反常(22.3.22)是

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \end{bmatrix}_{\text{anom}} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4k_1 d^4k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \\ \times 4\pi^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda} . \\ = -\frac{1}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y^{\kappa}} \frac{\partial \delta^4(z-x)}{\partial z^{\lambda}} .$$
(22.3.24)

顺带地,我们注意到类似这样的结果只能出现在包含无质量粒子的理论中.^[7a]若非如此, $\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 的Fourier变换预期就会有围绕零动量的幂级数展开.在这样的展开中,能够赋予流形式(22.3.24)为的散度只有一种可能性,即那些关于动量一阶的赝张量

$$\begin{bmatrix} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(k_1,k_2) \end{bmatrix}_{\text{anom}} \equiv \int d^4 y \, d^4 z \, e^{-ik_1 \cdot y} \, e^{-ik_2 \cdot z} \begin{bmatrix} \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(0,y,z) \end{bmatrix}_{\text{anom}} \\ = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{bmatrix} A_{\alpha\beta\gamma}k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma}k_{2\sigma} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $B_{\alpha\beta\gamma}$ 是常数. 根据方程(22.3.24),

$$(k_1 + k_2)_{\mu} \left[\Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2) \right]_{\text{anom}} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda}$$

所以

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \; .$$

但是这些流之间的振幅的对称性要求

$$A_{\alpha\beta\gamma}k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma}k_{2\sigma} = -A_{\alpha\gamma\beta}k_{2\sigma} - B_{\alpha\gamma\beta}k_{1\sigma} = -A_{\gamma\alpha\beta}(-k_{1\sigma} - k_{2\sigma}) - B_{\gamma\alpha\beta}k_{2\sigma}$$

所以, k1o和k2o的系数相等给出

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -B_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} , \qquad B_{\alpha\beta\gamma} = -A_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} - B_{\gamma\alpha\beta} .$$

取这些方程的差给出

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta} - B_{\alpha\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha\beta} \; .$$

既然这是正比于 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 的,它必须是全反对称的,所以 $B_{\alpha\beta\gamma}$ 以及随之的 $A_{\alpha\beta\gamma}$ 也是全反对称的.但这样一来,三点函数对称性的条件就变成A = -B = B - A,这给出 $A_{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma} = 0$,与条件(22.3.24)矛盾.通过相同的推理可以得出:给相互作用加上一个定域项,使得这个定域项对流 J^{μ} 的散度的贡献抵消了方程(22.3.24)的贡献,这种消除反常的方法是行不通的.

现在回到方程(22.3.24),我们现在可以将这个结果表示成流J⁴_α在规范场中的真空期望值,其 中规范场与流J⁶_β和J⁶_γ相耦合.当存在规范场时,三角图对流的贡献是

$$\langle J^{\mu}_{\alpha}(x) \rangle_{\triangle} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4 y \, \mathrm{d}^4 z \, \Gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \, A^{\beta}_{\nu}(y) \, A^{\gamma}_{\rho}(z) \; . \tag{22.3.25}$$

利用方程(22.3.24), 它有反常散度

$$[\langle \partial_{\mu} J^{\mu}_{\alpha}(x) \rangle_{\Delta}]_{\text{anom}} = -\frac{1}{8\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \,\partial_{\kappa} A^{\beta}_{\nu}(x) \,\partial_{\lambda} A^{\gamma}_{\rho}(x) \;. \tag{22.3.26}$$

存在其它也会给出反常的图,如图22.2.规范不变性要求图22.2的图加起来应该给出规范不变的结果。

$$[\langle \partial_{\mu} J^{\mu}_{\alpha}(x) \rangle]_{\text{anom}} = -\frac{1}{32\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \,F^{\beta}_{\kappa\nu}(x) \,F^{\gamma}_{\lambda\rho}(x) \,. \tag{22.3.27}$$

作为一个验证,我们来考察费米子数守恒的理论,它的生成元 T_{α} 有形式(22.3.4).反常(22.3.26)中的常数 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 就是

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\{t^L_{\alpha}, t^L_{\beta}\}t^L_{\gamma}] - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\{t^R_{\alpha}, t^R_{\beta}\}t^R_{\gamma}] .$$
(22.3.28)

更具体些, 我们在22.2节计算了轴矢量流 J_5^{μ} 的散度而言, 它有 $t^L = -t^R = t$, 由于与规范场相互作用的是矢量流 J_{β}^{ν} 和 J_{γ}^{ρ} (在22.2节记成了 J_{α}^{ν} 和 J_{β}^{ρ}), 所以有 $t_{\beta}^L = t_{\beta}^R \equiv t_{\beta}$ 以及 $t_{\gamma}^L = t_{\gamma}^R \equiv t_{\gamma}$. 因此, 在这一情况下 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 要换成tr[{ t, t_{β} } t_{γ}] = tr[{ t_{β}, t_{γ} }t], 方程(22.3.27)则变成

$$[\langle \partial_{\mu} J_{5}^{\mu}(x) \rangle]_{\text{anom}} = -\frac{1}{32\pi^{2}} \operatorname{tr}[\{t_{\beta}, t_{\gamma}\}t] \,\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \,F_{\kappa\nu}^{\beta}(x) \,F_{\lambda\rho}^{\gamma}(x) \,, \qquad (22.3.29)$$

这与方程(22.3.27)一致.

当流 $J_{\alpha}^{\mu}(x)$, $J_{\beta}^{\nu}(y)$ 或 $J_{\gamma}^{\rho}(z)$ 中没有任何一个与规范场耦合时,对偏移矢量 a^{μ} 的选择就取决与 是否方便. 当其中的一些流但非全部的流对应的是自发破缺的对称性,我们要保证未破缺的对 称性是显然的,即选择 a^{μ} 使得与未破缺对称性对应的流中没有反常. (这在22.7节将是非常重要 的.)例如,在量子色动力学以及类似理论中,整体对称性,例如手征 $SU(3) \times SU(3)$,它们的生 成元 T_{α} 采取形式(22.3.4),所有的流要么是矢量要么是轴矢量,若是矢量,则有 $t_{\alpha}^{R} = t_{\alpha}^{L}$,对应于未 破缺对称性,若是轴矢量,则有 $t_{\alpha}^{R} = -t_{\alpha}^{L}$,对应于破缺对称性. 我们从方程(22.3.28)中看到,在 这种情况下,有反常的三角图只有那些有一个轴矢量流和两个矢量流的图,以及那些三个流均 是矢量流的图.在一个轴矢量流和两个矢量流的情况中,我们选择 a^{μ} ,使得不会存在对矢量流 守恒有干扰的反常.因此,如果 $J_{\alpha}^{\mu}(x)$ 是轴矢量流,而 $J_{\beta}^{\nu}(y)$ 和 $J_{\gamma}^{\rho}(z)$ 是两个矢量流,那么,就像方 程(22.3.23)中那样,我们必须取 $a^{\mu} = k_{1}^{\mu} - k_{2}^{mu}$,这使得反常由方程(22.3.24)给出.另一方面,对 于三个轴矢量流,没有什么理由要求其中的任何一个是无反常的.取而代之, a^{μ} 的值使得三个 流之间的对称性得以反映,这样的选择要自然一些.以Lorentz不变性为指导,假定我们取试探 解 $a = \alpha k_{1} + \beta k_{2}$,其中 α 和 β 是常数.那么,对称性会要求每个内线的动量是p加上从该线末端流出 的动量 α 倍再加上从该线始端流入的动量的 β 倍.即,如果我们要求 $a = \alpha k_{1} + \beta k_{2}$,那么对称性同



图 22.2 这些单圈图给出了虚线所标记的流中的反常. 实线是费米子; 波浪线是与它们相互作用的规范场.

时会要求 $a - k_1 = -\alpha(k_1 + k_2) + \beta k_1 \pi a + k_2 = \alpha k_2 - \beta(k_1 + k_2)$. 对于不平行的 $k_1 \pi k_2$, 当且仅 当 $\alpha = -\beta = 1/3$ 时, 这三个关系才会满足, 这使得

$$a = \frac{1}{3}(k_1 - k_2) . \tag{22.3.30}$$

在方程(22.3.22)中使用上式并与方程(22.3.23)比较,我们看到,与一个轴矢量流和二个矢量流的Feynman振幅相比,在三个轴矢量流的Feynman振幅中,轴矢量流中的反常是前者的三分之一.

流的散度会包含其它反常,它们来自于图22.2中的图.既然三角图都不能给出守恒流,规范不变性在这里是没有指导意义的.针对强相互作用的SU(3) × SU(3)对称性,Bardeen^[8]计算了总反常,他对动量偏移的选择使得矢量流守恒,而那些流均为轴矢量的图在这些流之间对称.尽管这个SU(3) × SU(3)对称性(它作用在夸克味上而不是夸克色上)在量子色动力学中不是规范的,但是可以方便地将这一反常表示成规范不变性的失效,具体来说,反常是规范不变性在虚拟弱耦合规范场的泛函Γ[V,A]中失效了,其中的虚拟弱耦合规范场是:矢量场的八重态V^μ_a(x)和轴矢量场的八重态A^μ_a(x).我们引入无限小规范变换的算符*

$$i\mathscr{Y}_{a}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\delta}{\delta V_{a\mu}(x)} - f_{abc}V_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} - f_{abc}A_{b\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)}$$
(22.3.31)

和

$$i\mathscr{X}_{a}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\delta}{\delta A_{a\mu}(x)} - f_{abc} V_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} - f_{abc} A_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} , \qquad (22.3.32)$$

其中fabc是SU(3)结构常数. 正如之前所提及的, 对内线动量标记的选择要使得矢量流不反常:

$$\mathscr{Y}_a \Gamma[V, A] = 0 , \qquad (22.3.33)$$

但是这样一来,反常就会出现在轴矢量流中

$$\mathscr{X}_{a} \Gamma[V, A] = \frac{\mathrm{i}}{32\pi^{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr} \left\{ \lambda_{a} \left[V_{\mu\nu} V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3} A_{\mu} A_{\nu} A_{\rho} A_{\sigma} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{3} \mathrm{i} (A_{\mu} A_{\nu} V_{\rho\sigma} + A_{\mu} V_{\rho\sigma} A_{\nu} + V_{\rho\sigma} A_{\mu} A_{\nu}) \right] \right\},$$

$$(22.3.34)$$

其中λa是由方程(19.7.2)给出的SU(3)矩阵,并有

$$V_{\mu} \equiv \frac{1}{2} \lambda_a V_{\mu a} , \qquad A_{\mu} \equiv \frac{1}{2} \lambda_a A_{\mu a} , \qquad (22.3.35)$$

^{*}这里的算符*刻*_a和*ℒ*_a在参考文献[8]中记成了*X*_a和*Y*_a.我们在这里改变符号约定是为了与第19章的符号约定一致, 在那里破缺对称性的生成元统一地记为*X*_a.

$$V_{\mu\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu} - i[V_{\mu}, V_{\nu}] - i[A_{\mu}, A_{\nu}] , \qquad (22.3.36)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - i[V_{\mu}, A_{\nu}] - i[A_{\mu}, V_{\nu}] . \qquad (22.3.37)$$

我们已经解释过方程(22.3.34)右边第二项中的因子1/3的来源,它是*a*^µ在AVV图和AAA图中的不同选择所造成的结果.在22.6节,我们将会描述相容性条件,这使得我们可以从二次项中计算出方程(22.3.34)中的三次项和四次项.

如果反常涉及的对称性都是自发破缺的,那么在选择 a^{μ} 时就没有什么理由在不同流之间做出 区分,相反,标记费米子内线的一种更自然方式是使得它关于附着的规范玻色子线对称.正如我们 所看到的,这意味着我们要用 $a = \frac{1}{3}(k_1 - k_2)$ 计算三角图.这给出的三角反常是(22.3.26)给出的值 的三分之一.当正方形图和五边形图也计算在内时,这个结果变成^[8a]

$$[\langle D_{\mu}J^{\mu}_{\alpha}\rangle]_{\text{anom}} = -\frac{1}{24\pi^{2}} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \operatorname{Tr} \left\{ T_{\alpha} \Big[\partial_{\kappa}A_{\nu} \,\partial_{\lambda}A_{\rho} - \frac{1}{2} \mathrm{i}\partial_{\kappa}A_{\nu} \,A_{\lambda}A_{\rho} + \frac{1}{2} \mathrm{i}A_{\kappa} \,\partial_{\nu}A_{\lambda} \,A_{\rho} - \frac{1}{2} \mathrm{i}A_{\kappa}A_{\nu}\partial_{\lambda}A_{\rho} \Big] \right\}, \qquad (22.3.38)$$

其中 $A^{\mu} \equiv A^{\mu}_{\alpha}T_{\alpha}$. 我们已经看到, 在这样的情况下 A_{μ} 的二次项有方程(22.3.26)中相应项的1/3给出, 所以我们不会在这里推导这个结果, 在22.6节, 我们会用相容性条件从二次项推导方程(22.3.38)中的剩余项.

现在我们必须要考察这些结果的可能修正. Adler和Bardeen给出反常直至微扰论所有阶的细 致推导;^[9] 而在下文中, 我们将只给出他们分析的要点.

我们可以在微扰论的任意阶重复给出方程(22.3.22)的讨论,并证明给出反常的动量空间积分 一般可以重新表示成表面项.其结果就是我们在方程(22.3.18)中所看到的那样,对于流的散度,对 反常有贡献的那些图是那些量纲(按动量幂次计)为零或者更大的动量空间积分,这里的积分变量 是费米元中流转的动量.圈中的费米子如果与虚规范玻色子相互作用,那么这将会降低对费米圈 动量积分的量纲以至于消除了反常,所以反常不会从这样的辐射修正中得到贡献.(对虚规范玻 色子动量以及费米圈动量的积分确实会有非负的量纲,但是,如果不干扰问题中的手征的对称性, 规范玻色子传播子可以被正规化,与此同时费米子传播子却不能正规化.)连在费米圈上的规范 玻色子如果与其它规范玻色子或费米圈相互作用,那么这将会影响反常,但是它们仅仅用来重整 化 $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}F^{\beta}_{\kappa\nu}(x)F^{\gamma}_{\lambda\rho}(x)这样的算符.通过相同的讨论,如果费米子质量遵循问题中的对称性(如果这$ 是能实现的),由于抽取质量因子会降低动量空间积分的量纲,所以这不会改变反常.

上一段所描述的最后一个特征给出了这样一个问题:如果我们对理论含有的费米子一无所知, 无论是重费米子,轻费米子还是无质量费米子,在这样的情况下我们是否还能计算出反常?答案 是肯定的,我们可以;我们现在将证明:对于给定的对称性,如果某个费米子在这个对称性允许有 质量,那么它不会对这个对称性的反常有贡献.在我们这里所考察的一般理论中,拉格朗日密度中 的质量项会采取如下的形式

$$\mathscr{L}_{\text{mass}} = -\sum_{nn'\sigma\sigma'} \chi_{\sigma n} \epsilon_{\sigma\sigma'} M_{nn'} \chi_{\sigma'n'} + \text{H.c.} , \qquad (22.3.39)$$

其中 σ 是Lorentz群($\frac{1}{2}$,0)表示的2分量旋量指标, $\epsilon_{\sigma\sigma'}$ 是为了保持Lorentz不变性所需要的反对称矩

阵, 它有 $\epsilon_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ = +1, 而*M*是对称质量矩阵.^{**} 现在, 为了使 $\mathscr{L}_{\text{mass}}$ 遵循规范不变性, 质量矩阵必须 满足

$$-T_{\alpha}^{\mathrm{T}} M = M T_{\alpha} , \qquad (22.3.40)$$

指标n可以换成指标r和s,其中r标记规范群的不同不可约表示,而指标s标记每个不可约表示中的分量,这使得

$$(T_{\alpha})_{rs,r's'} = \delta_{rr'}(T_{\alpha}^{(r)})_{s,s'} , \qquad (22.3.41)$$

我们将M写成

$$M_{rs,r's'} = (M^{(r,r')})_{ss'} . (22.3.42)$$

那么方程(22.3.40)就变成

$$-T_{\alpha}^{(r)\mathrm{T}} M^{(r,r')} = M^{(r,r')} T_{\alpha}^{(r')} . \qquad (22.3.43)$$

(这并没有对r和r'求和.) Schur引理告诉我们,只要一对不可约表示的矩阵通过这样的方程彼此相 关,那么关联它们的矩阵要么是零要么是非奇异的.(参看5.5节.)因此,要么(i) $M^{(r,r')} = 0$,要 么(ii) $-T_{\alpha}^{(r')}$ 和 $T_{\alpha}^{(r')}$ 通过一个相似变换彼此相关,对 T_{β} 和 T_{γ} 有类似的事情发生.在后一种情况,分 属不同不可约表示r和r'的费米子对反常常数(22.3.12)之间的关系是

$$D_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} = -D_{\alpha\beta\gamma}^{(r')} , \qquad (22.3.44)$$

所以反常要么为零(对于r = r')要么在两个表示之间抵消(对于 $r \neq r'$).因此,对于一组给定的对称性,可能会出现的带有对称性允许质量的费米子不会影响这些对称性中的反常.

* * *

在用Feynman规则计算三点函数(22.3.7)时有一个很微妙的地方,我们现在转向对它的讨论. 在使用传统的费米传播子(22.3.9)时,我们实际上加倍了费米场的数目;除了方程(22.3.1)给出的左 手费米子外,传播子(22.3.9)还包含了与规范场没有相互作用的右手模式(与费米子数守恒理论的 场(1 – γ_5) ψ 无关).将这些无相互作用的右手场和有相互作用的左手场写进单个旋量 Ψ 中,费米子 拉格朗日密度是— $\bar{\Psi}$ $D\Psi$,其中的D现在是

$$\vec{D} = \vec{\partial} - i A_{\alpha} T_{\alpha} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \,. \tag{22.3.45}$$

对于与真实规范场或者虚拟规范场相互作用的自旋¹分而言,它的单圈真空泛函就是Det D. 规范 不变性在这个行列式中失效可以归因于:算符(22.3.45)是如下两项的和

$$\mathcal{D} = \partial \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) + \mathcal{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) ,$$
(22.3.46)

但是只有第二项是规范不变的.

$$M = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 0 & m \\ m^{\mathrm{T}} & 0 \end{array} \right) \ .$$

当所有反演相位都为1时, 宇称, 电荷共轭以及时间反演不变性将会进一步分别使得m是厄米矩阵, 对称矩阵和实矩阵.

^{**}在费米子数守恒的理论中, χ 采取(22.3.1)的形式, M和通常的质量矩阵m之间的关系是

在任意维度的空间中,有另外一种看待坐标以及规范反对称性反常的方式,它为一大类反常的计算提供了框架.算符(22.3.45)拥有定义良好的行列式,在这里取代处理这个算符,我们只处理方程(22.3.46)中的第二项

它是完全规范不变的,但是由于这个算符并没有一个手性的费米场映射到同一手性费米场的空间, 而是映射到另一个手性费米场的空间,所以它没有定义良好的行列式.通过写出Det D_L在规范场 空间中的微分方程,我们可以尝试定义规范不变的真空泛函,但在模掉规范变换时会遇到障碍.由 于必要的可积性条件失效了,存在定域障碍,这对应与我们讨论的反常.即便这些定域障碍可以避 免,在这一情况下,规范场构形的无限维空间在模掉规范变换后不是单连通的,拓扑障碍会妨碍在 这个空间上定义单值泛函.对于规范群SU(2)(它没有定域反常),在SU(2)二重态有奇数个无质量 左手费米子的情况下,Witten^[10b]发现了这样的整体反常.

22.4 无反常的规范理论

对于一般的流*J*^{*μ*}, 我们计算了反常在流守恒上的效应. 当这个流自身与规范场耦合时, 规范不 变性要求不能出现反常. 我们在上一节看到, 反常正比于方程(22.3.12)定义的对称常数因子*D*_{αβγ}, 所以对于规范流我们有^[11]

$$D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\left\{ T_{\alpha}, T_{\beta} \right\} T_{\gamma} \right] = 0, \qquad (22.4.1)$$

其中*T*_α是规范代数在所有左手费米子和反费米子的集合上的表示,而"tr"依旧代表对这些费米子和反费米子的种类求和.对于任意的规范群,如果费米场构成了合适的可约或不可约表示,这个条件就是满足的.另外,存在一些规范群,无论费米子处在该群的那个表示下,方程(22.4.1)都是满足的.^[12](对于这样的群,反常在微扰论的任意阶都不会出现,我们将在22.6节用Batalin-Vilkovisky形式理论给出一个纯代数证明.)

如果左手费米子(和反费米子)场构建的规范代数表示等价于它的复共轭,也就是说

$$(\mathrm{i}T_{\alpha})^* = S(\mathrm{i}T_{\alpha})S^{-1}$$

或者等价的(既然我们总是取T_α是厄米的)

$$T_{\alpha}^{\rm T} = -S T_{\alpha} S^{-1} , \qquad (22.4.2)$$

那么条件(22.4.1)显然是满足的. (将方程(22.4.2)代入代入方程(22.3.12)给出 $D_{\alpha\beta\gamma} = -D_{\alpha\beta\gamma}$.) 这样的表示要么是实的,要么是赝实的,在前一种情况中,我们有可能通过相似变换 $T'_{\alpha} = RT_{\alpha}R^{-1}$ 将这个表示转化至 T'_{α} 是纯虚的且反对称的表示,而在后一种情况中这是不可能的. (例 如, SU(2)的三维不可约表示是实的,而它的二维表示是赝实的.) 对于只有实表示或者赝实 表示的规范代数,即SO(2n+1)(包括 $SU(2) \equiv SO(3)$), $n \ge 2$ 的SO(4n), $n \ge 3$ 的USp(2n), G_2 , F_4 , E_7 和 E_8 ,再加上这些代数的直和,反常对于这些规范代数是不存在的. 另外还有几个代 数,尽管它们的一些表示既不是实的也不是赝实的,但是它们也只有 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 为零的表示.^[12] 它 们是SO(4n+2)(不包括 $SO(2) \equiv U(1)$ 和 $SO(6) \equiv SU(4)$)和 E_6 ,它们彼此之间的直和,以及它 们与上面所说的代数直和.因此,只对于包含 $SU(n)(n \ge 3)$ 以及U(1)因子的规范代数,反常

| 费米子 | SU(3) | SU(2) | U(1)[y/g'] |
|--|-----------|-------|------------|
| $\left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array}\right)_L$ | 3 | 2 | -1/6 |
| u_R^* | $\bar{3}$ | 1 | +2/3 |
| d_R^* | $\bar{3}$ | 1 | -1/3 |
| $\left(\begin{array}{c}\nu_e\\e\end{array}\right)_L$ | 1 | 2 | 1/2 |
| e_R^* | 1 | 1 | -1 |

表 22.1 标准模型的第一代左手费米子场和反费米子场.

才可能出现.碰巧的是,当代物理最重要的规范代数中就有这些代数.标准模型基于规范 群*SU*(3) × *SU*(2) × *U*(1),所以我们必须依靠夸克和轻子之间的抵消去掉理论的反常.

对于标准模型第一代左手旋量场,根据它们所构建的色SU(3)规范群表示,电弱SU(2)规范群表示,以及U(1)量子数 $y/g' = t_3/g - q/e$ 的值,表22.1给出了它们的分类.

现在,我们可以检验,当 T_{α} , T_{β} 和 T_{γ} 取遍 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的所有生成元时, $D_{\alpha\beta\gamma}$ 是否为零.我们只需考察那些使得 T_{α} , T_{β} 和 T_{γ} 的乘积在 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 为中性的生成元组合,所有其它的组合显然为零.我们可以用SU(3)生成元,SU(2)生成元和U(1)生成元给出不变量,对其中个数的限制是,SU(3)生成元只能是零个,两个或三个(因为8 × 8和8 × 8 × 8中均有单态),对SU(2)生成元的个数限制与SU(3)相同,而U(1)生成元可以有任意多个,所以我们只需检查如下情况:

SU(3)-SU(3)-SU(3):由于左手费米子构成了SU(3)的3+3+ $\overline{3}$ + $\overline{3}$ +1+1+1的表示,这是实表示,所以这里的 $D_{\alpha\beta\gamma}$ 为零.

SU(3)-SU(3)-U(1): 这里的反常正比于

$$\sum_{3,\bar{3}} y/g' = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

SU(2)-*SU*(2)-*SU*(2):由于*SU*(2)只有实表示和赝实表示,所以这里没有反常. *SU*(2)-*SU*(2)-*U*(1):这里的反常正比于

$$\sum_{\text{doublets}} y/g' = 3\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

U(1)-U(1)-U(1): 这里的反常正比于

$$\sum (y/g')^3 = 6\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 = 0$$

我们看到,对于标准模型的规范对称性,所有反常抵消了.^[13a]这个结果可以干净地理解成SU(3) × SU(2) × U(1)可以嵌入在SO(10)中的结果.^[14]. SO(10)的所有表示都是无反常的,所
以对于SU(3) × SU(2) × U(1)的任何可约表示,只要它构成了SO(10)的一个完整表示,它就会继承这一性质.碰巧的是,每一代夸克,轻子,反夸克,以及反轻子的左手场,再加上一个额外的(SU(3) × SU(2) × U(1))-单态,就构成了SO(10)的一个完整的16维表示(基础旋量表示),所以对于左手费米子的这个集合,SU(3) × SU(2) × U(1)反常是不存在的.单态无论如何都不会对这个反常有贡献,所以在标准模型的规范对称性中没有反常.

还有一个反常需要计算.所有种类的费米子以相同的方式与引力相互作用.在有外引力场的 情况下,针对流 $\bar{\chi}T\gamma^{\mu}\chi$ 的真空期望值,计算费米子圈图会给出反常^[15] $\partial_{\mu}(\bar{\chi}T\gamma^{\mu}\chi)$,它正比于

$$\operatorname{tr}\{T\} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}$$

特别地,为了避免引力破坏(22.3.3)这样的规范对称性,生成元必须满足

$$\operatorname{tr}\{T_{\alpha}\} = 0.$$
 (22.4.3)

类似于纯规范反常,当规范生成元满足方程(22.4.2)时,这为零,所以那些构成规范群实表示或赝 实表示的费米子不会对这个反常有贡献,因此计算这个反常时只需要将那些质量源于规范对称性 破缺的费米子考虑在内即可.另外,对于规范代数的任意单纯子代数,例如SU(2)或SU(3),这个条 件对于这些子代数的生成元是自动满足的. (tr{ T_{α} }仅是与所有 T_{β} 都对易的数,所以如果它不为零, 那么这个代数不是单纯的.)因此,我们只需检验方程(22.4.3)对于规范代数的U(1)生成元是不是 满足的. 在标准模型中,对于所有左手费米子,弱超荷y的值之和是

$$\sum y/g' = 6\left(-\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-1) = 0,$$

所以标准模型的流中没有引力反常.

反常为零的要求也可用作公式化真实理论时的指导.例如,对于各种 $SU(3) \times SU(2)$ 多重态, 它们的弱超荷y的值最初是从实验中获得的,但是我们可能会好奇:为什么这些弱超荷(以及每 个多重态中相应的电荷)取这些观测值.为了回答这个问题,假定我们对多重态(u_L, d_L), u_R^* , d_R^* , (ν_L, e_L)和 e_R^* 分别赋予值a, b, c, d和e.反常相消的条件会告诉我们: SU(3)-SU(3)-U(1):

$$\sum_{3,\bar{3}} y = 2a + b + c = 0;$$

SU(2)-SU(2)-U(1):

$$\sum_{\text{doublets}} y = 3a + d = 0;$$

U(1)-U(1)-U(1):

$$\sum y^3 = 6a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 2d^3 + e^3 = 0$$

引力-引力-U(1):

$$\sum y = 6a + 3b + 3c + 2d + 2 = 0.$$

除了交换u_R和d_R的可能性外,这些方程只有两个解,我们可以称其为U(1)和U(1)':

$$U(1): b/a = -4, c/a = 2, d/a = -3, e/a = 6, U(1)': b = -c, a = c = d = e = 0.$$

更进一步,这两个解是互不兼容的;我们不能假定U(1)和U(1)[']都是定域对称性,否则我们就会 遇到正比于(-4) + (+2) \neq 0的U(1)['] – U(1)反常和正比于(-4)² – (+2)² \neq 0的U(1)['] – U(1) – U(1)反常. U(1)生成元就是标准电弱模型中的弱超荷(总的常数因子a被吸收进g[']的定义 中),而U(1)[']对称性与自然界中观测到的都不相似. 这个简短的计算为标准模型中y的取值或者等 价地电荷的取值提供了一个合理的解释,它还表明,要使所有规范反常在一代夸克和轻子中抵消, 规范玻色子与弱超荷以外的任何U(1)量子数相耦合是不可能的.

另一方面,尽管可以合理地猜测标准模型的 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)规范玻色子只与已知的$ 夸克和轻子耦合(这既解释了为什么没有发现其它费米子又保护了标准模型中漂亮的反常相消),但是,存在<math>U(1)'规范玻色子,它会与其它未探测到的($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$)-中性费米子以及已 知夸克和轻子相耦合,这样的可能性依旧是存在的.我们假定多重态(u_L, d_L), $u_R^*, d_R^*, (\nu_L, e_L)$ 以 及 e_R^* 的 $U(1)'量子数y'分别为a', b', c', d'和e'. 既然我们对可能的(<math>SU(3) \times SU(2) \times U(1)$)-中性费 米子一无所知,U(1)'-U(1)'-U(1)'反常与引力-引力-U(1)'反常相互抵消的要求并不能帮助我们约束<math>a', b', c', d'或e'.反常相消的其它条件告诉我们:

SU(3)-SU(3)-U(1)':

$$\sum_{3,\bar{3}} y' = 2a' + b' + c' = 0;$$

SU(2)-SU(2)-U(1)':

$$\sum_{\text{doublets}} y' = 3a' + d' = 0;$$

U(1)-U(1)-U(1)':

$$\sum y^2 y' = 6a' + 3(-4)^2 b' + 3(2)^2 c' + 2(-3)^2 d' + (6)^2 e' = 0;$$

U(1)-U(1)'-U(1)':

$$\sum yy'^2 = 6a'^2 + 3(-4)b'^2 + 3(2)c'^2 + 2(-3)d'^2 + (6)e'^2 = 0.$$

通解中, $y' \ge y = = -2$ 数 $B = L(B \approx L \Delta B)$ 是守恒重子数和轻子数)的线性组合, 对于多重态(u_L, d_L), $u_R^*, d_R^*, (\nu_L, e_L)$ 以及 $e_R^*, B = L \Delta B$]取值1/3, $-1/3, -1/3, -1 \approx 1$ -L 如果B = L是定域对称性, 且它的耦合在量级上比e小不了多少, 那么由于普通物体会有B = L的宏观值, 所以所以它必须自发破缺.为了避免与中性流的观测结果相矛盾, 对称性破缺的特征标度F必须要大于电弱相互作用的特征标度, 但是不一定在量级上会大太多.因此一个比 Z^0 稍重且与B = L耦合的中性矢量玻色子最有希望添加到标准模型中.

上面所有的讨论针对的是标准模型的一个代.对于所有的三个代,存在更多的无反常对称性. 其中的一类对称性没有被反常破缺也没有(至少我们知道的)被其它的因素破缺,这类对称性构成 了不同味之间轻子数的差异.在23.5节,我们会对反常所产生的重子数不守恒过程和轻子数不守恒 过程进行分类,在这个分类中,它与*B* – *L*起到了重要作用.

22.5 无质量束缚态*

有时会推测夸克和轻子是更加基本粒子的束缚态.如果这些假想粒子拥有渐进自由的规范 相互作用,就像量子色动力学中那样,那么我们预期它们被陷俘了,这解释了为什么探测不到它

^{*}本节或多或少的处在本书的发展主线之外,可以在第一次阅读时跳过.

们. 然而, 这一途径有一个问题. 夸克和轻子的内部结构还没有观测到过, 所以这些规范相互作用的特征能量标度 Λ' (类似于量子色动力学的 $\Lambda \approx 200 \, \text{MeV}$)必须非常高. 例如, 正如12.3节论述过的, 要使 μ 子磁矩的理论与实验相一致则会表明 $\Lambda' > 3 \, \text{TeV}$. 但是, 除了Goldstone玻色子以外, 我们一般会预期这种理论中的束缚态会有 Λ' 阶或者 $2\pi\Lambda'$ 阶的质量, 就像在量子色动力学中, 质子质量是 $2\pi\Lambda_{\text{QCD}}$ 阶. 这一预期显然与我们观测到的事实有一个尖锐的矛盾, 观测到的夸克和轻子质量要远小于 Λ' . 以另外一种方式表述这个问题: 如果轻子和夸克是束缚态, 为什么它们(经由反常磁矩等方式测量)的尺寸要远小于它们的Comptom波长?

回答这一问题的一种方法是:不像量子色动力学,我们假定这一理论有未破缺的手征对称性, 那么除了来自其它相互作用的小修正外,这会使得夸克和轻子依旧是无质量的.一般而言,手征对 称性是指:对于一组螺度给定的无质量基本场(包括螺度相反的场的复共轭),若它们构成复表示, 手征对称性就是这些基本场的对称性.用这些基本场的乘积作用在真空上,我们能够构建出其它 螺度确定的态,而这些态也构成了这些对称性的复表示.若其中的一些态是真实的复合粒子,它们 必须是无质量的,如果它们是有质量的,有质量粒子态的所有螺度分量必须构成任意对称性的同 一表示且与旋转对易,所以螺度分量给定的粒子与螺度分量相反的反粒子一起构成了实表示.当 然,分辨出以这种方式构建且与真实的复合无质量粒子对应的那些态并不容易,但如果它们真的 构成了真实的无质量复合粒子,当我们改变理论的一些参量时,为了使属于对称群的某个复表示 的一些螺度给定的无质量粒子变得有质量,从复表示到实表示,它们的对称性质必须不连续地变 化,所以它们的无质量性是天然的.

尽管这一推导表明,存在一些理论,无质量复合粒子或者质量很轻的复合粒子会很自然地出现在这些理论中,但是这并不会给出在实际情况中它会何时发生的迹象.除了如何将夸克和轻子理解为可能的复合粒子的问题外,这是另一个有趣的问题.t'Hooft^[16]给出了解决这一问题的有力方法,这个方法基于对反常的考察.简言之,如果底层理论拥有整体手征对称性(没有被规范反常破缺,也没有自发破缺),且这个对称性由自旋¹/₂的左手基本费米子(和反费米子) χ 上对称性生成元为 T_{α} , T_{β} 等的变换构成,并且如果这些整体对称性的反常常数tr[{ T_{α} , T_{β} }]非零,那么束缚态的频谱必须包含自旋¹/₂的无质量粒子,在它们的左手态上,相同的对称性油诱导出生成元为 \mathcal{T}_{α} , \mathcal{T}_{β} …的变换,以及相同的反常常数

$$\operatorname{tr}[\{\mathscr{T}_{\alpha}, \mathscr{T}_{\beta}\} \, \mathscr{T}_{\gamma}] = \operatorname{tr}[\{T_{\alpha}, T_{\beta}\} \, T_{\gamma}] \,. \tag{22.5.1}$$

下面给出't Hooft的论证. 假想一些相互作用很弱的规范玻色子, 它们与底层理论的整体对称 性生成元 T_{α} , T_{β} , …相耦合. 同时假定, 尽管系数 $D_{\alpha\beta\gamma} \equiv tr[{T_{\alpha}, T_{\beta}}T_{\gamma}]$ 中的一些不为零, 但是这 个反常被其它"旁观者"无质量费米子引起的反常抵消了, 那些将复合粒子的组成部分困住的强力 不会影响这些旁观者费米子. 当物理过程所处的能量远低于陷俘相互作用的特征能量标度 Λ '时, 描述这个过程的有效拉格朗日量中不会出现陷俘的费米子. 如果生成元为 T_{α} , T_{β} , … 的对称性不 是自发破缺的, 那么就不会出现Goldstone玻色子, 所以这个有效拉格朗日量中的粒子只能是弱耦 合的规范玻色子, 旁观者费米子, 再加上陷俘费米子和相互作用很强的规范玻色子的任意束缚态. 有效场论的相容性要求它必须是无反常的, 但是假定的旁观者费米子拥有反常常数 $-D_{\alpha\beta\gamma}$, 所以 为了提供了大小相等符号相反的反常常数, 无质量束缚态必须存在, 它们也随之就是原始俘获费 米子的束缚态.^{**} 注意到无论生成元为 T_{α} , T_{β} , … 的规范相互作用有多弱, 这个讨论都是成立的,

^{**}仍需证明的是:这些粒子必须拥有自旋¹.我们在这里假定了Goldstone玻色子不存在,以及其它无自旋粒子不会

所以无论这些规范玻色子或陷俘费米子是不是真实的,我们依旧会得到结论:无质量自旋¹态重新 产生了构成该态的自旋¹2陷俘基本费米子的反常.

作为一个简单的例子, 假定底层理论包含n"味"无质量费米子, 每个费米子既有左手部分 又有右手部分, 并且它们处在渐进自由SU(N)规范群的定义表示N中. 我们要求N是奇的, 这 使得非陷俘的SU(N)-中性费米束缚态能够出现. 就像量子色动力学中那样, 这一理论自动有 整体SU_L(n) × SU_R(n) × U_V(1)对称性, 它的左手无质量费米子和右手无质量费米子分别处在 它的(n,1)表示和(1,n)表示中, 对于U_V(1)量子数有相等的值, 这个值可以取为1. 在底层理论中, 对于SU(n)_L-SU(n)_L-U(1)_Y流三重态和SU(n)_R-SU(n)_R-U(1)_Y流三重态存在不为零的反常常数, 它的值是

$$D_{aL,bL,0} = D_{aR,bR,0} = N\delta_{ab} ,$$

其中 a, b, \dots 标记SU(n)的生成元 λ_a ,它的归一化使得在n-分量定义表示中tr{ $\lambda_a \lambda_b$ } = $\frac{1}{2}\delta_{ab}$. 当n > 2时, $SU(n)_L$ - $SU(n)_L$ - $SU(n)_L$ 流和 $SU(n)_L$ - $SU(n)_R$ 流也有不为零的反常常数,它等于

$$D_{aL,bL,cL} = D_{aR,bR,cR} = N \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c].$$

我们在这里假定 $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U(1)$ 是不自发破缺的.由于陷俘,物理频谱中的唯一束 缚态所在的对称性表示由 m_L 和 m_R 个基本费米子以及它们的反粒子构成,其中 m_L 是螺度 $+\frac{1}{2}$ 粒子 的个数, m_R 是螺度 $-\frac{1}{2}$ 粒子的个数,反粒子的个数分别是 \bar{m}_L 和 \bar{m}_R ,并有

$$m_L + m_R - \bar{m}_L - \bar{m}_R = kN , \qquad (22.5.2)$$

其中*k*是可正可负的奇数. 结果是, 在唯一能够遇到的 $SU_L(n) \times SU_R(n)$ 的不可约表示(r,s)中, *r*处 在 m_L 个SU(n)定义表示与 \bar{m}_L 个相应复共轭表示的直乘中, *s*处在 m_R 个SU(n)定义表示与 \bar{m}_L 个 相应复共轭表示的直乘中, $U(1)_V$ 量子数是kN, mk, m_L , m_R , \bar{m}_L 和 \bar{m}_R 服从方程(22.5.2). 对 于 $U(1)_V$ 量子数为kN的 $SU(n)_L \times SU(n)_R$ 不可约表示(r,s), 记其在螺度+¹/₂束缚态中出现的次数 为p(r,s,k). 那么方程(22.5.1)就变成

$$\sum_{r,s,k} p(r,s,k) d_s \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathscr{T}_a,\mathscr{T}_b\} \,\mathscr{T}_c] = N \operatorname{tr}[\{\lambda_a,\lambda_b\} \,\lambda_c], \qquad (22.5.3)$$

$$\sum_{r,s,k} p(r,s,k) d_s k \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b\}] = \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}], \qquad (22.5.4)$$

其中 tr^r 指在SU(n)不可约表示r中求迹, 而 d_s 是SU(N)表示s的维数. p(r, s, k)的其它约束只剩一个: 它必须是正数.

对于 $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ 的任意表示(r, s, k)的复共轭 $(\bar{r}, \bar{s}, -k)$,它的迹 $tr^{(r)}[\{\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b\}\mathcal{T}_c]$ 和 $k tr^{(r)}[\{\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b\}]$ 与表示(r, s, k)的相反,所以方程(22.5.3)和(22.5.4)仅约束了

$$\ell(r,s,k) \equiv p(r,s,k) - p(\bar{r},\bar{s},-k) .$$

自然地是无质量的. 理论的基本规范玻色子假定在反常对称变换下不变, 所以它们对反常没贡献. 另一个讨论会排除 掉自旋 $j \ge 1$ 的复合粒子.^[16a] 反常流可以构建成基本自旋 $\frac{1}{2}$ 场的Lorentz4-矢函数, 为了对反常有贡献, 这些流在任何自 旋j = 1的无质量复合粒子之间的矩阵元必须不为零, 这将会破坏Lorentz不变性. 对于自旋 $j \ge \frac{3}{2}$ 的复合粒子, 由于在 这个理论中同样可能构建出守恒的能动量张量, 它在这些无质量复合粒子之间的矩阵元也必须不为零, 所以对于 $j \ge \frac{3}{2}$, Lorentz不变性同样被破坏了, 所以这种可能性也被排除了.

回顾我们现在所使用的符号约定,这些迹是在所有螺度+ $\frac{1}{2}$ 的无质量束缚态上求迹,其中包括螺 度- $\frac{1}{2}$ 的无质量束缚态的反粒子,而后者按照复共轭表示进行变换. $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ 的 任意表示的复共轭,它的迹tr^(r)[{ $\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b$ } \mathcal{T}_c]和ktr^(r)[{ $\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b$ }]与原先的表示相反. 因此,我们可以 只对(22.5.3)和(22.5.4)中那些 $U(1)_V$ 量子数kN > 0的表示求和

$$\sum_{r,s,k>0} \ell(r,s,k) d_s \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathscr{T}_a,\mathscr{T}_b\} \,\mathscr{T}_c] = N \operatorname{tr}[\{\lambda_a,\lambda_b\} \,\lambda_c], \qquad (22.5.5)$$

$$\sum_{r,s,k>0} \ell(r,s,k) d_s k \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathscr{T}_a,\mathscr{T}_b\}] = \operatorname{tr}[\{\lambda_a,\lambda_b\}], \qquad (22.5.6)$$

其中 $\ell(r,s,k)$ 等于, $SU(n)_L \times SU(n)_R$ 的 $U(1)_V$ 量子数kN > 0的(r,s)表示在螺度+ $\frac{1}{2}$ 束缚态中出现 的次数,减去同一表示在螺度- $\frac{1}{2}$ 束缚态中出现的次数. (如果宇称没破缺,那么表示(r,s,k)在螺 度- $\frac{1}{2}$ 束缚态中出现的次数与表示(s,r,k)在螺度+ $\frac{1}{2}$ 束缚态中出现的次数相同,所以在这一情况下 有 $\ell(r,s,k) = -\ell(s,r,k)$.)

首先考察n = 2味的情况.这时没有办法将三个矢量流对称地耦合在一起以给出SU(2)不变量,所以(22.5.5)两边自动为零,只留下了条件(22.5.6).SU(2)的两分量定义表示被包含在奇数多个这些两分量表示的乘积中,所以在 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 的表示中,对于r是定义表示, s是平庸表示以及k = 1的表示,我们取 $\ell = 1$,除了这个表示,只要r是非平庸表示,我们总能找到(22.5.6)的一个 $\ell(r,s,k) = 0$ 的解.不幸的是,这个解远不是唯一的——有无限多种方法可以重新产生该底层理论的反常.

对于一般的n和N,通常能够找到方程(22.5.5)和(22.5.6)的多个解,但有一些情况是找不到解的.在这样的理论,我们必然有如下的结论: $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ 对称性必须部分或完全地自发破缺.对于量子色动力学,这有一个特别有意义的应用,所以我们现在指定到一个SU(3)规范群的情况.

更具体一些, 我们将集中与k = 1且 $\bar{m}_L = \bar{m}_R = 0$ 的表示, 这个表示可以仅通过三个基本费米 子和零个反费米子构成. 它们是:[†]

(a) r是对称三阶SU(n)张量; s是平庸表示.

- (b) r是反对称三阶SU(n)张量; s是平庸表示.
- (c) r是混合对称的三阶SU(n)张量; s是平庸表示.
- (d) r是对称二阶SU(n)张量; s是SU(n)矢量.
- (e) r是反对称二阶SU(n)张量; s是SU(n)矢量.
- (f) r是SU(n)矢量; s是对称二阶SU(n)张量.
- (g) r是SU(n)矢量; s是反对称二阶SU(n)张量.
- (h) r是平庸表示; s是对称三阶SU(n)张量.
- (i) r是平庸表示; s是反对称三阶SU(n)张量.
- (j) r是平庸表示; s是混合对称的三阶SU(n)张量.

[†]所有SU(N)矢量和张量在这里理解成是逆变的.

当n > 2时, 方程(22.5.5)和(22.5.6)在这里写成^{††}

$$\frac{1}{2}(n+3)(n+6)\ell_a + \frac{1}{2}(n-3)(n-6)\ell_b + (n^2-9)\ell_c + n(n+4)\ell_d + n(n-4)\ell_e + \frac{1}{2}n^2(n+1)\ell_f + \frac{1}{2}n^2(n-1)\ell_g = 3$$
(22.5.7)

和

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\ell_a + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\ell_b + (n^2-3)\ell_c + n(n+2)\ell_d + n(n-2)\ell_e + \frac{1}{2}n(n+1)\ell_f + \frac{1}{2}n(n-1)\ell_g = 1.$$
(22.5.8)

满足方程(22.5.7)没有什么问题,但注意到,如果*n*是3的倍数,那么对于 ℓ 的所有值,方程(22.5.8)左 边的每一项都是3的倍数,这使得这一条件不可能被满足.我们由此推断出:对于有三味无质量夸 克的量子色动力学,它的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 必须是自发破缺的.这一结果不仅仅限制在表 示(a)—(j)中,对于 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的任意表示,只要它可以从夸克和反夸克的色中性 组合中构成,这个结论依旧是成立的.

除了一些特殊情况外,例如n = 3基本费米子SU(3)-三重态的SU(3)规范群,'t Hooft反常匹配 条件的约束性并不是很强;一般而言,当手征对称性没有破缺时,它允许一大类无质量束缚态的存 在.'t Hooft同时提出了退耦条件(*decoupling condition*),这个条件要求,当一个或多个费米子味 变得非常重时,不应该存在使得包含重基本费米子的复合粒子无法获得质量的未破缺手征对称性. 例如,在一个SU(3)色规范群的情况下,如果我们赋予其中一种夸克很大的质量,那么那些含有一 个有质量夸克的3费米子束缚态将会构成 $SU(n-1) \times SU(n-1)$ 群的表示(r', s'),这些表示分别是 (v) r'是对称二阶SU(n-1)张量; s'是平庸表示.

(w) r'是反对称二阶SU(n-1)张量; s'是平庸表示.

(x) r'和s'是SU(n)矢量.

(y) r'是平庸表示; s'是对称二阶SU(n-1)张量.

(z) r'是平庸表示; s'是反对称二阶SU(n-1)张量.

为了使三费米子质量态获得很大的质量,必要条件是 $\ell'(r',s') = 0$,其中 $\ell'(r',s')$ 是不可约表示(r',s')在螺度+ $\frac{1}{2}$ 束缚态中出现的次数减去在螺度- $\frac{1}{2}$ 束缚条中出现的次数.通过检查 $SU(n) \times SU(n)$ 的三费米子表示列表(**a**)—(**j**),我们来看一下它能够给出的 $SU(n-1) \times SU(n-1)$ 表示,这样我们就发现't Hooft退耦条件要求[‡]

$$0 = \ell'_{v} = \ell_{a} + \ell_{c} + \ell_{d} ,$$

$$0 = \ell'_{w} = \ell_{b} + \ell_{c} + \ell_{e} ,$$

$$0 = \ell'_{x} = \ell_{f} + \ell_{g} + \ell_{d} + \ell_{e} ,$$

$$0 = \ell'_{y} = \ell_{f} + \ell_{h} + \ell_{j} ,$$

$$0 = \ell'_{z} = \ell_{g} + \ell_{i} + \ell_{j} .$$

(22.5.9)

^{+†}在参考文献[16]中, 't Hooft假设了宇称没有自发破缺, 所以对于这一情况, 在他所给出的公式中, $\ell_a = -\ell_h$, $\ell_b = -\ell_i$, $\ell_c = -\ell_i$, $\ell_d = -\ell_f$, 以及 $\ell_e = -\ell_g$. 正如我们在这里所看到的, 主要结论并不依赖宇称守恒.

[‡]'t Hooft研究的是宇称守恒的情况, 在那种情况下, 第四个方程和第五个方程等同于第一个和第二个, 第三个方程 不会出现.

不幸的是,尽管ℓ在所有的解中都不是与n无关的整数,但是在大多数情况下依旧会存在无穷多个 解.

退耦条件看上去是相当可信的,但是,随着一个或多个费米子质量增加,我们通常会遇到相 变,这使得质量谱会与费米子质量较小时的质量谱不同,基于这个原因,'t Hooft质疑这个条件的 使用是否合理.^[17]存在另外一个更强的条件,这个条件被称为质量滞留条件,它要求当一个或多个 基本费米子味获得任意质量时,不应该存在妨碍包含这些有质量基本粒子的复合粒子获得质量的 未破缺手征对称性.^[17]如果质量滞留条件是成立的,那么这个条件将会给出相同的没有可能被相 变破坏的结果,例如方程(22.5.9),这也是't Hooft所希望的.

很容易构造出质量滞留条件被破坏的非真实理论,例如非手征对称性自发破缺的理论,这会给出无质量的Goldstone玻色子,而这些玻色子可能会成为有质量费米子的组成部分.^[17](随着费米子质量的增长,这些模型也会出现相比,这就破坏了't Hooft从退耦条件中得出的结论.)但是我们在19.9节讨论过的Vafa和Witten的工作则表明,在一大类更加真实的类QCD理论理论中,非手征对称性不能自发破缺,所以这不应该视为质量滞留条件的严重反对意见.

22.6 相容性条件

对于任何对称性,反常中出现的数值系数依赖于理论所包含的物质.但另一方面,由于反常的形式由Wess和Zumino在1971年给出的相容性条件控制,所以它在很大程度上与理论的细节无关.^[18]

即便我们感兴趣的是整体对称性流中的反常,但为了导出相容性条件,假想每个对称性流都与规范场耦合将会方便之后的讨论,若对称性是非阿贝尔的,我们还要假设所有对称性流彼此耦合,并且它们的耦合方式要使得这些对称性变成拉格朗日密度的定域对称性.通过令相应的规范 耦合常数变成无穷小,我们总可以回到整体对称性的情况.先不论反常,在背景场 $A_{\alpha\mu}(x)$ 中的有效 作用量 $\Gamma[A]$,它的形式要在规范场的无限小变换 $A_{\beta\mu}(y) \rightarrow A_{\beta\mu}(y) + i \int d^4x \epsilon_{\alpha}(x) \mathscr{T}_{\alpha}(x) A_{\beta\mu}(y)$ 下 不变,其中,为了重新产生变换(15.1.9),我们必须取

$$-i\mathscr{T}_{\alpha}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} - C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}(x)\frac{\delta}{\delta A_{\gamma\mu}(x)}.$$
(22.6.1)

将反常考虑在内, $\mathscr{T}_{\alpha}(x)$ 就不再湮灭 $\Gamma[A]$, 但有

$$\mathscr{T}_{\alpha}(x)\Gamma[A] = G_{\alpha}[x;A] , \qquad (22.6.2)$$

其中G_α[x; A]代表反常的效应. 方程(22.6.2)也可以写成流期望值的协变散度的公式:

$$D_{\mu}\langle J^{\mu}_{\alpha}(x)\rangle = -\mathrm{i}G_{\alpha}[x;A] , \qquad (22.6.3)$$

其中

$$\langle J^{\mu}_{\alpha}(x) \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} \Gamma[A]$$
 (22.6.4)

而 D_{μ} 是规范协变导数(15.1.10),这里取(t_{β})_{$\gamma\alpha$} = $-iC_{\alpha\beta\gamma}$ 的伴随表示.

Wess-Zumino相容性条件可以从如下的对易关系得出*

$$[\mathscr{T}_{\alpha}(x), \mathscr{T}_{\beta}(y)] = \mathrm{i}C_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)\mathscr{T}_{\gamma}(x) \ . \tag{22.6.5}$$

^{*}在方程(22.6.1)中插入因子—i是为了给对易关系中的结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 提供传统的i因子.一个提醒:在我们所使用的Lie代数的基中,结构常数是全反对称的,因而我们不对上规范指标和下规范指标做区分.

从方程(22.6.2)和(22.6.5),我们导出了一般相容性条件

$$\mathscr{T}_{\alpha}(x)G_{\beta}[y;A] - \mathscr{T}_{\beta}(y)G_{\alpha}[x;A] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^{4}(x-y)G_{\gamma}[y;A] .$$
(22.6.6)

Wess和Zumino最初在推导这些相容性条件时针对的是强相互作用的 $SU(3) \times SU(3)$ 对称性,这是物理上且历史上都很重要的特殊情况.这时,作用在规范场上的生成元 $\mathcal{T}_{\alpha}(x)$ 由方程(22.3.31)定义的偶字称生成元 $\mathcal{T}_{a}(x)$ 和方程(22.3.32)定义的奇字称生成元 $\mathcal{T}_{a}(x)$ 构成.** 它们满足对易关系

$$\begin{split} [\mathscr{Y}_a(x), \mathscr{Y}_b(y)] &= \mathrm{i}\delta^4(x-y)f_{abc}\mathscr{Y}_c(x) \ ,\\ [\mathscr{Y}_a(x), \mathscr{X}_b(y)] &= \mathrm{i}\delta^4(x-y)f_{abc}\mathscr{X}_c(x) \ ,\\ [\mathscr{X}_a(x), \mathscr{X}_b(y)] &= \mathrm{i}\delta^4(x-y)f_{abc}\mathscr{Y}_c(x) \ , \end{split}$$

其中*f_{abc}是SU*(3)的结构常数. 既然*%*_a生成的*SU*(3)子群不是自发破缺的, 在处理对费米子动量的 积分时, 保留在*%*_a生成的规范变换下的不变性将会方便我们的讨论, 这使得

$$\mathscr{Y}_a(x)\,\Gamma = 0$$

这留下了不为零的反常

$$\mathscr{X}_a(x) \Gamma = G_a(x)$$

那么不平庸的相容性条件就是

$$\mathscr{Y}_a(x)G_b(y) = \mathrm{i}\delta^4(x-y)f_{abc}G_c(x)$$

和

$$\mathscr{X}_a(x)G_b(y) - \mathscr{X}_b(x)G_a(y) = 0$$
.

第一个条件仅仅说明G_a(x)在普通的SU(3)变换下像八重态那样变换.第二个条件给G_a(x)附加了 另一个很强的约束.读者可以检验G_a(x)的Bardeen公式(22.3.34)是满足这一条件的.我们在这里 不会对此进行展开,取而代之,我们用它来例证,对于一般的规范理论,若所有流的都处理成对称 的,那么就会是这样的情况.在22.3节,我们引用了这一情况下的反常公式(22.3.38),但是并没有 导出比规范场的二阶项还要高的高阶项.在这里,我们将会证明相容性条件(22.6.6)指定了这些项.

为了这个目的以及将来进一步的推广,将这组Wess-Zumino相容性条件从新表述,写成15.7节 中那样在BRST变换下不变的条件将会方便我们的讨论.我们引入鬼场 ω_{α} ,并定义一般规范的理 论的幂零BRST算符

$$sA_{\alpha\mu} = \partial_{\mu}\omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_{\gamma} , \qquad (22.6.7)$$

$$s\omega_{\alpha} = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\omega_{\gamma} , \qquad (22.6.8)$$

s在这里要满足分配律 $s(AB) = (sA)B \pm A(sB)$,其中当 $A \equiv \omega_{\alpha}$ 这样的费米量时取负号,其它情况 取正号.取代反常函数 $G_{\alpha}[x; A]$,我们将处理如下的泛函

$$G[\omega, A] = \int \omega_{\alpha}(x) G_{\alpha}[x; A] d^4x . \qquad (22.6.9)$$

^{**}另一个提醒:正如我们在22.3节提醒的,这里所使用的 \mathscr{X}_a 和 \mathscr{Y}_a 在参考文献[8]中是 Y_a 和 X_a .

那么(记住ωα是费米的)

$$\begin{split} sG[\omega, A] &= -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\int \mathrm{d}^4x\,\omega_\beta(x)\,\omega_\gamma(x)\,G_\alpha[x; A] \\ &- \int \mathrm{d}^4x\,\omega_\alpha(x)\int \mathrm{d}^4y\left[\frac{\partial\omega_\beta(y)}{\partial y^\mu} + C_{\beta\gamma\delta}A_{\gamma\mu}(y)\omega_\delta(y)\right]\frac{\delta G_\alpha[x; A]}{\delta A_{\beta\mu}(y)} \\ &= \int \mathrm{d}^4x\,\int \mathrm{d}^4y\,\omega_\alpha(x)\,\omega_\beta(y)\left[-\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[x; A] \right. \\ &+ \mathrm{i}\mathscr{T}_\beta(y)G_\alpha[x; A]\right]\,. \end{split}$$

由于鬼场彼此之间是反对易的,这可以写成

$$sG[\omega, A] = -\frac{1}{2}i \int d^4x \int d^4y \,\omega_\alpha(x) \,\omega_\beta(y) \\ \times \left[iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[x;A] + \mathscr{T}_\beta(y)G_\alpha[x;A] - \mathscr{T}_\alpha(x)G_\beta[y;A]\right] \,.$$

我们看到,当其仅当对于所有鬼场 $\omega_{\alpha}(x), G[\omega, A]$ 都是BRST不变的

$$sG[\omega, A] = 0$$
, (22.6.10)

相容性条件(22.6.6)才是成立的.

现在考察反常 $G[\omega, A]$ 可以写成BRST算符s作用在定域泛函F[A]上的可能性:

$$G[\omega, A] = sF[A]$$
 . (22.6.11)

(注意,由于算符s增加了一个鬼场因子,而反常泛函G关于鬼场是线性的,所以泛函F必须与鬼场 无关.) BRST算符s满足s² = 0,所以这样的反常将会满足相容性条件sG = 0.如果F[A]是规范 场的定域泛函,[†]那么它可以从作用量中剪除掉,因而抵消了反常.对于反常中的任意项,如果它 能写成BRST算符s作用在定域泛函上,这依旧是成立的;这样的项自身就满足相容性条件,因而 可以通过给作用量加上定域项抵消掉.所以,我们感兴趣的反常是那些鬼数为1且满足相容性条 件(22.6.10)的定域泛函G[ω, A]模掉s作用在鬼数为零的定域泛函.按照幂零算符的通常术语,这种 算符的等价类构成了所谓的s算符在鬼数为1处的上同调.

我们也可以用定域密度自身表示这一反常.我们可以将这个反常(或者反常中的任意一项)写 成 $G = \int d^4x \mathscr{G}(x)$,其中 $\mathscr{G}(x)$ 是时空点x处的规范场,鬼场以及它们导数的幂级数.那么,sG = 0的条件就等价与如下的陈述,

$$s\mathscr{G}(x) = \partial_{\mu} \mathscr{J}^{\mu}(x) \tag{22.6.12}$$

其中 $\mathscr{J}^{\mu}(x)$ 是场和场导数的某个函数. 同理, \mathscr{G} 中那些可以通过给作用量加定域项而抵消掉的项, 其形式是*s* \mathscr{T} 加上可能的导数. 因此我们这里感兴趣的反常是, 鬼数为1且满足相容性条件(22.6.12)的定域函数, 模掉可以表述成*s*作用在鬼场为零的定域泛函的项, 再模掉可能的导数. 这是在模掉导数后的定域函数空间中的上同调, 称为*s*在鬼数为1处的上同调, 记为 $H^1(s|d)$.

应用代数方法可以解出BRST算符s的上同调,由此可以推出一般规范理论中反常的形式.^[19] 这一方法决定不了一些依赖于理论所含物质的常系数,这些常系数需要用22.2节或22.3节的方法

[†]所谓定域泛函是指定域函数的积分,即,给定点的场和场导数的函数.

计算出来.既然我们已经计算出了一般规范理论中关于规范场二阶的反常项,以及它们的常系数, 在这里我们将用相容性条件(22.6.12)决定出反常中关于场的高阶项.

我们在22.3节看到,当所有流都处理对称时,规范场的二阶项是表达式(22.3.26)的三分之一. 这是量纲(以质量为单位)为4的算符,而Wess-Zumino相容性条件(22.6.6)仅把量纲相同的算符关 联起来,所以为了满足这个条件,我们应该加上拥有相同量纲的规范场的更高阶项.因此,我们找 到了相容性条件的如下形式(不一定唯一)的解

$$G_{\alpha} = \mathbf{i}[\langle \partial_{\mu} J^{\mu}_{\alpha} \rangle]_{\text{anom}} = -\frac{\mathbf{i}}{24\pi^{2}} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \operatorname{Tr} \left\{ T_{\alpha} \Big[\partial_{\kappa} A_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\rho} + \mathbf{i}c_{1} \partial_{\kappa} A_{\nu} A_{\lambda} A_{\rho} + \mathbf{i}c_{2} A_{\kappa} \partial_{\nu} A_{\lambda} A_{\rho} + \mathbf{i}c_{3} A_{\kappa} A_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\rho} - c_{4} A_{\kappa} A_{\nu} A_{\lambda} A_{\rho} \Big] \right\}, \qquad (22.6.13)$$

其中 $A_{\mu} \equiv A_{\alpha\mu}T_{\alpha}, c_i$ 是待定常数.

为了节省精力,用微分形式的语言重写这个解将会方便我们的讨论.(参看8.8节.)我们引入一组c-数参量d x^{μ} ,它们与自身反对易并与所有费米场反对易,例如鬼场 ω_{α} .这样,d x^{μ} 就与BRST算符s也反对易.由于d x^{κ} d x^{ν} d x^{λ} d x^{ρ} 是全反对称的,它可以写成

$$\mathrm{d}x^{\kappa}\mathrm{d}x^{\nu}\mathrm{d}x^{\lambda}\mathrm{d}x^{\rho} = \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}\mathrm{d}^{4}x , \qquad \mathrm{d}^{4}x = \mathrm{d}x^{0}\mathrm{d}x^{1}\mathrm{d}x^{2}\mathrm{d}x^{3} . \tag{22.6.14}$$

我们同时引入外导数

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{d} x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

既然导数对易是幂零的, 且导数与s反对易, 就有:

$$d^2 = 0$$
, $ds + sd = 0$. (22.6.15)

最后,我们引入反对易量

$$A \equiv iA_{\mu}dx^{\mu} = iA_{\alpha\mu}T_{\alpha}dx^{\mu} , \qquad \omega \equiv i\omega_{\alpha}T_{\alpha} . \qquad (22.6.16)$$

有了这些符号约定,方程(22.6.13)可以写成

$$G[\omega, A] = \frac{1}{24\pi^2} \int \operatorname{Tr} \left\{ \omega \left[(\mathrm{d}A)^2 + c_1 (\mathrm{d}A)A^2 + c_2 A (\mathrm{d}A)A + c_3 A^2 (\mathrm{d}A) + c_4 A^4 \right] \right\}.$$
(22.6.17)

为了实现相容性条件(22.6.10), 我们注意到BRST变换规则(22.6.7)和(22.6.8)可以写成

$$sA = -\mathrm{d}\omega + \{A, \omega\} , \qquad (22.6.18)$$

$$s\omega = \omega^2 . (22.6.19)$$

现在, 方程(22.6.17)中最后一项的BRST变换是

$$s \operatorname{Tr} \left[\omega A^{4} \right] = \operatorname{Tr} \left[\omega^{2} A^{4} - \omega \{A, \omega\} A^{3} + \omega A \{A, \omega\} A^{2} \right]$$
$$- \omega A^{2} \{A, \omega\} A + \omega A^{3} \{A, \omega\} + \omega d\omega A^{3} \mathfrak{M}$$
$$= \operatorname{Tr} \left[\omega^{2} A^{4} \right] + \omega d\omega A^{3} \mathfrak{M}.$$

对于sG,没有其它正比于Tr[$\omega^2 A^4$]的贡献,所以仅当 $c_4 = 0$ 时,相容性条件(22.6.10)才会满足.加 上 $c_4 = 0$,一个直接的计算给出

$$sG = \frac{1}{24\pi^2} \int \operatorname{Tr} \left\{ -(\mathrm{d}A)^2 \omega^2 + \omega \,\mathrm{d}\omega \,A \,\mathrm{d}A - \mathrm{d}\omega \,\omega \,\mathrm{d}A \,A \right. \\ \left. - A\omega \,\mathrm{d}A \,\mathrm{d}\omega - \omega A \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}A \\ \left. + c_1 \left[\omega \,\mathrm{d}A \,\mathrm{d}\omega - \omega A \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}A \right] \\ \left. + c_2 \left[\omega \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}A - \omega A \,\mathrm{d}A \,\mathrm{d}\omega \right] \\ \left. + c_3 \left[\omega \,\mathrm{d}\omega \,A \,\mathrm{d}A - \omega A \,\mathrm{d}A \,\mathrm{d}\omega \right] \\ \left. + c_3 \left[\omega \,\mathrm{d}\omega \,A \,\mathrm{d}A - \omega A \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}A \right] \\ \left. - c_1 \left[-\omega A \,\mathrm{d}\omega \,A^2 + \omega \,\mathrm{d}\omega \,A^3 + \omega \,\mathrm{d}A \,A^2 \omega \right] \\ \left. - c_2 \left[\omega A^2 \,\mathrm{d}\omega \,A - \omega A \,\mathrm{d}\omega \,A^2 + \omega A \,\mathrm{d}A \,\mathrm{d}\omega \right] \\ \left. - c_3 \left[-\omega A^3 \,\mathrm{d}\omega + \omega A^2 \,\mathrm{d}\omega \,A + \omega A^2 \,\mathrm{d}A \,\omega \right] \right\} \,.$$

我们不需要假定被积函数为零, 但要求它是某个定域函数的导数, 这使得它的积分为零. 对于那些 包含两个导数的项和包含一个导数的项, 由于这两类项之间不可能发生抵消, 所以它们必须分别 满足这一条件. 不难看到, 如果我们取 $c_1 = -c_2 = +c_3 \equiv c$, 那么仅包含一个导数的被积函数就可 以写成d \mathscr{S} 的形式. 如果c = -1/2, 那么剩下的项是全导数, 从而证明了之前引用结果(22.3.38)的 合理性. 这个结果通常更紧凑地表示成

$$G[\omega, A] = \frac{1}{24\pi^2} \int \operatorname{Tr} \left\{ \omega \, \mathrm{d} \left[A \, \mathrm{d} A - \frac{1}{2} A^3 \right] \right\}$$
$$= \frac{1}{24\pi^2} \int \operatorname{Tr} \left\{ \omega \, \mathrm{d} \left[AF + \frac{1}{2} A^3 \right] \right\}, \qquad (22.6.20)$$

其中F是矩阵值场强2-形式

$$F \equiv \frac{1}{2} i t_{\alpha} F_{\alpha \mu \nu} \, \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} = \mathrm{d}A - A^2 \,. \tag{22.6.21}$$

反常不一定是(22.6.13)的形式,所以方程(22.6.20)不是 $G[\omega, A]$ 的唯一结果.下一节引用的结果表明,对于G的任意子群H,只要H的所有生成元有Tr{ $t_i{t_j, t_k}} = 0$,当 t_i 是H的生成元时,就有可能通过给作用量加上定域项抵消掉反常 G_i .

就如何构建相容性条件的解,有一个漂亮的代数工具,称为*Stora-Zumino*下降方程.^[18a]在任意偶数维时空描述这个方法同在四维时空中一样容易,所以我们取时空维数为2*n*.在开始阶段,为了使(2*n*+2)-形式Tr *Fⁿ⁺¹*有意义,我们必须假想给时空的2*n*个坐标加上两个变量.注意到

$$dF = -d(A^2) = -(dA)A + A(dA) = [A, F], \qquad (22.6.22)$$

这使得Tr F^{n+1} 是闭形式:

$$d\operatorname{Tr} F^{n+1} = (n+1)\operatorname{Tr}\{(dF)F^n\} = \operatorname{Tr}\{[A, F^{n+1}]\} = 0.$$
(22.6.23)

只要扩展时空是单连通的, Poincaré定理就会告诉我们Tr $\{F^{n+1}\}$ 是恰当的, 也就是说, 存在(2n + 1)-形式 $\Omega_{2n+1}(称为Chern-Simons形式)$, 使得

$$Tr\{F^{n+1}\} = d\Omega_{2n+1} . (22.6.24)$$

更进一步, Tr{Fⁿ⁺¹}显然是规范不变的, 并且它只依赖于规范场, 所以它是BRST-不变的:

$$s \operatorname{Tr} \{F^{n+1}\} = 0$$
. (22.6.25)

"微分" d x^{μ} 理解成与鬼场 ω_{α} 这样的费米场反对易,所以算符d与方程(22.6.7)和(22.6.8)定义的算符s反对易:

$$sd + ds = 0.$$

由于s是幂零的,由此得出 $s\Omega_{2n+1}$ 也是闭形式:

$$d(s\Omega_{2n+1}) = -s \operatorname{Tr}\{F^{n+1}\} = 0 .$$

再次使用Poincaré定理,这意味着必存在2n-形式 Ω_{2n}^1 ,它关于鬼场 ω_{α} 是一阶的,它有

$$s\Omega_{2n+1} = \mathrm{d}\Omega_{2n}^1$$
 (22.6.26)

更近一步,由于d
$$(s\Omega_{2n}^1) = -s^2\Omega_{2n+1} = 0$$
,所以还存在 $(2n-1)$ -形式,它关于鬼场是二阶的,它有 $s\Omega_{2n}^1 = d\Omega_{2n-1}^2$. (22.6.27)

那么由此得出,即使 Ω_{2n}^1 自身不是BRST-不变的,但是它对2n维时空的积分是BRST-不变的:

$$s \int_{\text{spacetime}} \Omega_{2n}^1 = 0 . \qquad (22.6.28)$$

因此, 通过对两个一阶微分方程d $\Omega_{2n+1} = \text{Tr}\{F^{n+1}\}$ 和d $\Omega_{2n}^1 = s\Omega_{2n+1}$ 积分, 我们就找到了反常泛 函 $G[\omega, A]$ 的一个候选者 $\int \Omega_{2n}^1$. 这些方程的一般解(不唯一)是

$$\Omega_{2n+1} = (n+1) \int_0^1 \mathrm{d}t \, \mathrm{Tr} \left\{ A \, F_t^n \right\} \,, \tag{22.6.29}$$

$$\Omega_{2n}^{1} = -(n+1) \sum_{r=0}^{n-1} \int_{0}^{1} \mathrm{d}t \, (1-t) \, \mathrm{Tr} \Big\{ \omega \, \mathrm{d}(F_{t}^{r} \, A \, F_{t}^{n-1-r}) \Big\} \,, \qquad (22.6.30)$$

其中 $F_t \equiv tF + (t - t^2)A^2$. 对积分(22.6.30)的计算表明, 在四维时空的情况下, 方程(22.6.20)给出的 $G[\omega, A]$ 的结果正比于 $\int \Omega_4^1$.

我们可以继续这个下降过程,并推导出其它有用的结果.特别地,从方程(22.6.27)以及s的幂 零性可以得出d($s\Omega_{2n-1}^2$) = 0,所以Poincaré定理告诉我们 $s\Omega_{2n-1}^2$ 是d Ω_{2n-2}^3 的形式,所以 ω_{2n-1}^2 对空间的2n - 1个坐标积分是BRST-不变的:

$$s \int_{\text{space}} \Omega_{2n-1}^2 = 0$$
 . (22.6.31)

这种关于鬼场二阶的BRST-不变泛函是所谓的*Schwinger*项^[18c]的候选者.^[18b]这里我们关心的那 类Schwinger项,其来源是两个对称流时间分量的等时对易关系中的反常项 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\left[J^{0}_{\alpha}(\mathbf{x},t), J^{0}_{\beta}(\mathbf{y},t)\right] = \mathrm{i}C_{\alpha\beta\gamma}J^{0}_{\gamma}(\mathbf{x},t)\delta^{2n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,.$$
(22.6.32)

(这一段中的所有算符取在同一时刻t,在后面的讨论中会隐去这个变量.)我们从对易子的反对称 性中得到 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -S_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})$,所以,所有与 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 相关的信息包含在如下的泛函中

$$S[\omega] \equiv \int \mathrm{d}^{2n-1} x \, \mathrm{d}^{2n-1} y \, \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, \omega_{\beta}(\mathbf{y}) \, S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,. \tag{22.6.33}$$

注意到 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 一般依赖于各种物质场和规范场,所以 $S[\omega]$ 一般会依赖这些场和鬼场 $\omega_{\alpha}(x)$. 取方程(22.6.32)与第三个流 $J^{0}_{\gamma}(\mathbf{z})$ 的对易子,用 $\omega_{\alpha}(\mathbf{x})\omega_{\beta}(\mathbf{y})\omega_{\gamma}(\mathbf{z})$ 收缩它,对 \mathbf{x}, \mathbf{y} 和 \mathbf{z} 积分,再使用Jacobi恒等式,我们发现

$$0 = \int d^{2n-1}x \, d^{2n-1}y \, d^{2n-1}z \, \omega_{\alpha}(\mathbf{x}) \, \omega_{\beta}(\mathbf{y}) \, \omega_{\gamma}(\mathbf{z})$$
$$\times \left[i C_{\alpha\beta\gamma} \, S_{\gamma\delta}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \delta^{2n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \left[J^{0}_{\gamma}(\mathbf{z}), S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \right].$$

 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 这样的规范场和物质场的泛函, BRST算符s在上面的作用与规范参量为 ω_{α} 的规范相互作用相同, 所以

$$s S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i \left[\int d^{2n-1} z \,\omega_{\gamma}(\mathbf{z}) \, J^{0}_{\gamma}(\mathbf{z}), S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right].$$

回顾方程(22.6.8), 我们发现泛函(22.6.33)是BRST-不变的

$$s S[\omega] = 0.$$
 (22.6.34)

另外, 通过给流中加项, 我们对 $S[\omega]$ 的改变只能是形式为 $sT[\omega]$ 的项, 所以不能通过给流加项移除的可能Schwinger项的集合由BRST算符s在鬼数2处的上同调给出——即, 其本身不是 $sT[\omega]$ 的形式, 却关于鬼场二阶且BRST-不变的泛函S的集合. 方程(22.6.31)表明 $\int \Omega_{2n-1}^2$ 的这种泛函的一个候选者.

迄今为止,本节对反常的分析只适用于一圈阶中的反常. 诚然,在一个理论中,如果与量子规 范场耦合的流中有单圈反常,那么这个理论就是不相容的,因而也就不要需要研究它的高阶. 但反 之并不成立;对于有量子规范场的理论,即使它在一圈阶无反常,我们仍然需要证明它在高阶也是 无反常的. 另外,对于整体对称性中的反常,例如量子色动力学中的手征对称性反常,有这种反常 的理论不存在不相容,对于这样的理论,我们需要知道高阶修正是否会影响反常.

既然BRST变换非线性地作用在场上,即使没有反常,我们也没有肯定的把握预期超出单圈近 似的量子有效作用量 $\Gamma[\omega, A]$ 是BRST-不变的.正如我们在17.1节看到的,超过这个近似,我们不仅 需要考察规范场和鬼场的泛函,还要把它们的反常考虑进来.(即使是在一圈阶,引入反场有时也 是重要的,这是由于另一个原因:对于仅是场的泛函,如果它满足Wess-Zumino相容性条件,并且 不能表示BRST算符作用在场的定域泛函上,对于这样的泛函,如果它能表示成作用量与某个场和 反场的定域泛函的反括号,那么它就不能作为候选反常,这是因为在这一情况下,通过从作用量减 掉该项,这个反常可以被抵消掉.这对应于在场的作用量中有一个变化,与此同时,作用量服从的 规范对称性也有了一个变化.)

在给作用量引入反场之后,对反常的研究同时表现出有一个上同调公式.^[20, 21]对这一问题的分析基于Batalin和Vilkovisky所称的主方程的Zinn-Justin版本(17.1.10). 当反常不存在时,

 $(\Gamma, \Gamma) = 0$,这使得在一圈阶有 $(S, \Gamma_1) = 0$,其中S是零阶作用量而 Γ_1 是对量子有效作用量的单圈修 正.在有反常时,我们则有

$$(S, \Gamma_1) = G_1 \,, \tag{22.6.35}$$

其中 G_1 是场和反场的某个泛函,既然S和 Γ_1 的鬼数都为零, G_1 的鬼数必须为1.作用量假定满足经 典主方程(S,S) = 0,所以方程(22.6.35)中的反括号算符是幂零的,因而(S,G_1) = 0.但是,如果对 于某个鬼数为零的定域泛函 F_1 有 G_1 = (S,F_1),那么通过从作用量中减掉 F_1 项(这视为 \hbar 节的量子 修正),即从 Γ_1 中减掉该项,我们就可以抵消掉一圈阶的反常.(当然, G_1 = (S,Γ_1),但有无质量粒 子时, Γ_1 不是定域泛函.)因此,候选反常是那些鬼数为1且封闭的定域泛函 G_1 ,换句话说,它们满 足(S,G_1) = 0,但它们不是恰当的,即,它们无法表示成 G_1 = (S,F_1),其中 F_1 是鬼数为1的定域泛 函.换句话说,候选反常对应于反括号算符 $X \mapsto (S,X)$ 在场和反场的定域函数空间上鬼数为1的上 同调.

这很像我们在本节早些时候发现的结果,只不过这里将BRST算符*s*换成了反括号(*S*,…).如果我们令方程(22.6.35)中的反场为零,并回忆起($\delta\Gamma_1/\delta\chi^n$)_{\chi^{\ddagger}=0} = $s\chi^n$,我们发现条件(22.6.35)实际上给出了条件 $s\Gamma_1 = 0$,而正如我们所看到的,这等价于要求 Γ_1 满足Wess-Zumino相容性条件.但是这里有一种观念,基于方程(22.6.35)的分析可以扩展到高阶.

为了看到这点, 假定已经发现反括号算符 $X \mapsto (S, X)$ 在定域函数空间上鬼数为1的上同调为零, 并向上面所说的重新定义了作用量使得 $G_1 = (S, \Gamma_1) = 0$. 在两圈阶破坏主方程 $(\Gamma, \Gamma) = 0$ 的反常由函数 G_2 表示, 它有

$$(\Gamma_1, \Gamma_1) + 2(S, \Gamma_2) = G_2.$$

但既然 $(S, \Gamma_1) = 0$ 且(S, S) = 0,任何这样的 G_2 将会满足 $(S, G_2) = 0$.基于上同调为零的假定,这 意味着它可以表示成 $G_2 = (S, F_2)$,其中 F_2 是鬼数为2的定域泛函,所以在这一阶,反常可以通过从 作用量中减掉 F_2 抵消掉.

这一讨论可以扩展至任意阶. 假定我们抵消掉了主方程中直至N = 1阶的反常, 这使得对于所有的M < N,

$$0 = G_M = \sum_{L=0}^{M} \left(\Gamma_L, \Gamma_{M-L} \right) = 2 \left(S, \Gamma_M \right) + \sum_{L=1}^{M-1} \left(\Gamma_L, \Gamma_{M-L} \right).$$

同理,反括号中的第N阶项就有

$$G_N = 2\left(S, \Gamma_N\right) + \sum_{M=1}^{N-1} \left(\Gamma_M, \Gamma_{N-M}\right),$$

所以,使用Jacobi恒等式(15.9.21)(其中对于三个玻色算符,所有符号均为-号)以及上面(S, Γ_M)的公式,我们发现:

$$\left(S,G_{N}\right) = -2\sum_{M=1}^{N-1} \left(\left(S,\Gamma_{M}\right),\Gamma_{N-M}\right) = \sum_{M=1}^{N-1}\sum_{L=1}^{M-1} \left(\left(\Gamma_{L},\Gamma_{M-L}\right),\Gamma_{N-M}\right).$$

这可以写成更对称的形式

$$\left(S,G_{N}\right) = -\sum_{M_{1}=1}^{N-2}\sum_{M_{2}=1}^{N-2}\sum_{M_{3}=1}^{N-2}\delta_{N,M_{1}+M_{2}+M_{3}}\left(\Gamma_{M_{1}},\left(\Gamma_{M_{2}},\Gamma_{M_{3}}\right)\right).$$

既然 M_1 , M_2 和 M_3 的范围是相同的, 我们可以将求和中的二重反括号写成对这些指标的3!个置换 求和, 而根据Jacobi恒等式(15.9.21), 这为零, 从而给出结论(S, G_N) = 0. 如果上同调像假定的那 样为零, 那么这暗示了存在定域泛函 F_N 使得 $G_N = (S, F_N)$, 所以, 通过从作用量中减掉 F_N , N阶 中的反常就抵消掉了, 这正是所要证明的.

通过纯代数方法, Barnich, Brandt和Henneaux^[22]成功证明了, 对于(四维时空中)基于半 单Lie代数的Yang-Mills理论, 反括号算符 $X \mapsto (S, X)$ (在定域函数空间上鬼数为1)的上同调完全 由形式为(22.6.20)的项的线性组合构成, 其中的每一项对应规范的每个单子群, 系数待定.^{††} 这表 明, 无需参照理论所包含的物质, 在一圈阶, 这时反常 G_1 自动满足 $(S, G_1) = 0$, 半单规范群的反 常必须是形式为(22.6.20)的项的线性组合, 留待决定只有对应不同单Lie群的常系数, 而通过将理 论所含的物质也考虑在内再加以细致的计算, 这些系数就能定下来. 更进一步, 我们在22.4节看 到, 存在这样的规范群, 无论费米子场的选单是什么, 方程(22.6.20)中的迹都自动为零. (它们是没 有 $n \ge 3$ 的SU(n)因子的半单规范群.) 在这种情况下, 参考文献[22]表明反括号算符 $X \mapsto (S, X)$ 在 鬼数为1处的上同调是零. 正如我们已经证明过的, 这意味着: 在这样的理论中, 微扰论的任意阶都 没有反常.

反常与反括号算符的上同调相关有另一重含义.^[23] 在推导Slavnov-Taylor恒等式(16.4.6)时, 我们假定测度 $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ 在所研究问题的对称变换下不变.在15.9节,Zinn-Justin方程是针对对 称变换 $\chi^n \to \chi^n + \theta \delta S / \delta \chi_n^{\dagger}$ 从Slavnov-Taylor恒等式中推导出来的,所以,除非 $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ 在这 一变换下不变,换句话说,除非 $\Delta S = 0$,其中 Δ 是算符(15.9.34),否则15.9节给出的Zinn-Justin方 程的推导就会失效. 当 $\Delta S \neq 0$ 时,通过给S增加定域泛函以抵消掉测度变换的效应,仍然有可 能保存Zinn-Justin方程,不过增加定域泛函破坏了经典主方程(S,S) = 0. 这一抵消发生的条件 不是别的,正是量子主方程(15.9.35).为了构建满足这一方程的作用量S,我们从满足经典主方 程(S_0, S_0) = 0的经典作用量 S_0 出发,然后增加量子修正.在算符 $X \mapsto (S_0, X)$ (在定域函数空间上 鬼数为1)的上同调为零的情况下,上面用来证明反常在所有阶都不出现的证明可以用来证明:通 过给 S_0 增加定域泛函,可以使得量子主方程在所有阶都是满足的.

22.7 反常与Goldstone玻色子

在Wess和Zumino^[18]1971年那篇引入相容性条件的文章中,他们同时注意到反常有可能 对Goldstone玻色子的相互作用有重要影响.为了理解他们的观点,使用't Hooft在1979年发展 的"反常匹配"讨论将是有帮助的,而这一方法已在22.5节使用过.

考察破缺的整体对称群G,并假定它在某个陷俘无质量费米子的底层理论中线性实现,例如有 三个无质量夸克的量子色动力学中的整体手征SU(3) × SU(3)对称性.在这一底层理论中引入虚 拟规范场,使得除去可能的反常后,整体对称性G变成定域的.一般而言,由于这个对称性在真实 世界中完全是整体的,这个定域对称性将会被反常破坏,而整体对称性也没有什么理由允许到无 反常定域对称性的扩展.只要以这种方式引入的规范耦合足够小,并且这些旁观者费米子只参与 这些非常弱的规范相互作用,那么这些修正就不会对理论的动力学有实质上的改变.

接下来,考察描述低能物理的有效场论,在这个理论中,陷俘费米子是不可观测的.理论中的 唯一自由度将是无质量粒子:虚拟规范子,旁观者费米子,以及一组场为ξ_a的Goldstone玻色场,其

^{††}对于方程(22.6.20)中的迹,由于这个迹对于单Lie代数的所有表示除了一个常系数外都是相同的,^[19a]所以没有必要为了计算这个迹指定规范代数的表示,并且这个系数完全不能通过这个上同调定理决定.

中每个场对应于一个独立的破缺对称性.既然底层理论已经变成规范不变且无反常,对于有效场 论也必须同样如此.但是在底层理论中,旁观者费米子产生的反常被陷俘费米子引起的反常抵消 掉了,所以为了让Goldstone玻色子引起的反常抵消掉它们,*Goldstone玻色*子的规范有效场论对于 每个虚拟定域对称性必须有一个反常,这个反常要等于底层理论中陷俘费米子产生的反常.即,取 代方程(22.6.2),虚拟规范场和Goldstone玻色子的有效作用量Γ[ξ, A]要满足条件

$$\mathscr{T}_{\beta}(x)\Gamma[\xi,A] = G_{\beta}[x;A], \qquad (22.7.1)$$

其中 $G_{\beta}[x; A]$ 是底层理论中的反常函数,这个反常函数中没有Goldstone玻色子,而 \mathscr{T}_{β} 是规范 群G的生成元,现在它作用在规范场和Goldstone玻色场上.(\mathscr{T}_{β} 的指标 β 取遍i和a, i用来标记未 破缺对称性子群H的一组独立完备生成元 \mathscr{Y}_{i}, a 标记一组独立的破缺对称性生成元 $\mathscr{X}_{a};$ 对于每 个 \mathscr{X}_{a} 存在一个Goldstone玻色场 ξ_{a} .)

当然,方程(22.7.1)也可用来研究Goldstone玻色子与真实弱耦合规范场之间的相互作用.例如,当底层理论中包含与夸克耦合的电弱规范玻色子时,我们可以将我们称之为"虚拟"规范场中的一些规范场等同为电弱规范场.在这种情况下,为了抵消掉陷俘费米子圈在真实弱耦合鬼场的规范对称性中产生的反常,一些"旁观者"费米子也必须是真实的,例如轻子抵消掉了夸克产生的电弱反常.

现在转向方程(22.7.1)的应用.为了计算这一环境下的规范对称性生成元 $\mathscr{T}_{\beta}(x)$,注意到,在 一般的群变换 $g = \exp(-i \int \zeta_{\beta}(x) \mathscr{T}_{\beta}(x) d^{4}x)$ 下,Goldstone玻色场 $\xi_{a}(x)$ 变换到方程(19.6.18)给出的场 $\xi_{a}'(x)$,而规范场 $A_{\beta}^{\mu}(x)$ 变换到规范变换后的场 A'_{β}^{μ} ,这使得

$$\mathscr{T}_{\beta}(x) = \mathscr{T}_{\beta}^{A}(x) + \mathscr{T}_{\beta}^{\xi}(x). \qquad (22.7.2)$$

这里 $\mathscr{T}^{A}_{\beta}(x)$ 作用在规范场上并由方程(22.6.1)给定:

$$-i\mathscr{T}_{\beta}^{A}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\delta}{\delta A_{\beta\mu}(x)} - C_{\beta\gamma\alpha} A_{\gamma\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)}, \qquad (22.7.3)$$

其中 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 是规范群G的全反对称结构常数, 而 $\mathscr{T}^{\xi}_{\beta}(x)$ 作用在Goldstone玻色场上并由方程(19.6.17)的 无限小极限给定, 它(对于指数参数化 $\gamma(\xi) = \exp(\mathrm{i}\xi_a X_a)$)写成:^{*}

$$T_{\beta} \exp(\mathrm{i}\xi_a(x)X_a) = -\mathscr{T}_{\beta}^{\xi}(x) \exp(\mathrm{i}\xi_a(x)X_a) + \exp(\mathrm{i}\xi_a(x)X_a)\,\theta_{\beta i}(x)Y_i\,.$$
(22.7.4)

这里的 T_{β} 是G的生成元在任意表示下的表示矩阵;它们分成了集合 X_a 和 Y_i ,分别表示破缺对称性 生成元和未破缺对称性生成元.另外, $\theta_{\beta i}(x)$ 是与 ξ 相关的函数,它的形式对我们的讨论没有多少影响.

关于反常函数 $G_{\beta}[x; A]$,我们只假定相容性条件(22.6.6)

$$\mathscr{T}_{\alpha}(x)G_{\beta}[y;A] - \mathscr{T}_{\beta}(y)G_{\alpha}[x;A] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^{4}(x-y)G_{\gamma}[y;A]$$
(22.7.5)

以及未破缺对称性中无反常

$$G_i[x;A] = 0. (22.7.6)$$

^{*}方程(22.7.4)右边第一项出现负号以及方程(22.7.3)左边出现因子—i是因为exp[-i $\int \Lambda_{\beta}(x) \mathscr{T}_{\beta}(x)$ 引出了规范参量 为 Λ_{β} 的规范变换(15.1.17),要求 $\mathscr{T}_{\beta}(x)$ 满足对易关系(22.6.5)就可以看到这些.

正如上一节提及的,只要迹 $Tr[T_i{T_j, T_k}]$ 对于未破缺对称性子群的生成元为零(就像 $SU(3) \times SU(3)$ 的非手征生成元),总可能给作用量中增加一定域泛函使得方程(22.7.6)是满足的.

在假定(22.7.5)和(22.7.6)后,总可能找到反常Slavnov-Taylor恒等式(22.7.1)的解:

$$\Gamma[\xi, A] = -i \int_0^1 dt \int \xi_b(y) G_b[y; A_{-t\xi}] d^4y, \qquad (22.7.7)$$

其中 $[A_{-t\xi}(x)]_{\mu}$ 是在 $A_{\mu} \equiv T_{\beta}A_{\mu\beta}$ 作用规范变换(15.1.17)后的结果,其中规范变换的参量是 $\Lambda_a = -t\xi_a$ 和 $\Lambda_i = 0$:

$$[A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = \exp(-itX_a\xi_a(x))A_{\mu}(x)\exp(itX_a\xi_a(x)) - i\left[\partial_{\mu}\exp(-itX_a\xi_a(x))\right]\exp(itX_a\xi_a(x)).$$
(22.7.8)

与未破缺对称性有反常的情况相比,方程(22.7.7)和(22.7.8)定义了规范场和Goldstone玻色场的一个定域泛函(尽管有些复杂).方程(22.7.1)的任何其它解与这个解只相差一个无反常的泛函.

下面给出作用量(22.7.7)满足方程(22.7.1)的证明概要. 取代用定域生成元 $\mathcal{T}_{\beta}(x)$ 进行处理, 引入一个任意函数 $\eta_{\beta}(x)$, 并定义

$$\mathscr{T}[\eta] = \int \mathrm{d}^4 x \,\eta_\beta(x) \,\mathscr{T}_\beta(x) \,, \qquad (22.7.9)$$

这样处理将会更加方便.为了计算罗[η]ξ_b(x),我们引入矩阵

$$\eta_{-t\xi}(x) \equiv \exp\left(-\mathrm{i}X_a\xi_a(x)t\right) \left[\eta(x) + \mathscr{T}[\eta]\right] \exp\left(\mathrm{i}X_a\xi_a(x)t\right) \equiv \left[\eta_{-t\xi}(x)\right]_\beta T_\beta, \qquad (22.7.10)$$

其中 $\eta(x) \equiv \eta_{\beta}(x)T_{\beta}$. 这样,

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_{-t\xi}(x) \equiv -i \Big[X_a \xi_a(x), \eta_{-t\xi}(x) \Big] + i \Big(\mathscr{T}[\eta] \xi_a(x) \Big) X_a \,,$$

这使得

$$\mathscr{T}[\eta]\xi_b(x) = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}[\eta_{-t\xi}(x)]_b + \mathrm{i}C_{a\gamma b}\,\xi_a(x)\,[\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma\,.$$
(22.7.11)

为了计算 $\mathscr{T}[\eta]G_b[y; A]$,我们用 $\mathscr{T}[\eta]$ 作用规范场,然后经过一个直接的计算会发现

$$\mathscr{T}[\eta][A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = \left(\mathscr{T}^{A}[\eta_{-t\xi}]A_{\mu}(x)\right)_{A \to A_{-t\xi}}, \qquad (22.7.12)$$

所以,使用相容性条件(22.7.5),

$$\mathcal{T}[\eta]G_b[y; A_{-t\xi}] = \int \mathrm{d}^4 x \, [\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma \Big(\mathcal{T}^A_\gamma(x)G_b[y; A]\Big)_{A \to A_{-t\xi}}$$
$$= \int \mathrm{d}^4 x \, [\eta_{-t\xi}(x)]_a \Big(\mathcal{T}^A_b(y)G_a[x; A]\Big)_{A \to A_{-t\xi}}$$
$$+ \mathrm{i}C_{\gamma ba}[\eta_{-t\xi}(y)]_\gamma G_a[y; A_{-t\xi}] \,. \tag{22.7.13}$$

方程(22.7.11)和(22.7.13)中的结构常数项抵消了,产生了

$$\mathscr{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4 y \left\{ -\left[\frac{\partial}{\partial t}[\eta_{-t\xi}(y)]_b\right] G_b[y; A_{-t\xi}] \right.$$
$$\left. -\mathrm{i}[\eta_{-t\xi}(y)]_a \left(\mathscr{T}[\xi] G_a[y; A]\right)_{A \to A_{-t\xi}} \right\}.$$
(22.7.14)

再进行一个直接的计算将表明

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = i \left(\mathscr{T}^{A}(\xi) A_{\mu}(x) \right)_{A \to A_{-t\xi}}, \qquad (22.7.15)$$

所以方程(22.7.14)中的项加起来是一个t-导数

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = -\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4 y \,\frac{\partial}{\partial t} \left\{ [\eta_{-t\xi}(y)]_b \,G_b[y; A_{-t\xi}] \right\}$$
$$= \int \mathrm{d}^4 y \left[[\eta_{-t\xi}(y)]_b \,G_b[y; A_{-t\xi}] \right]_{t=0}^{t=1}. \tag{22.7.16}$$

当t = 1时,我们有

$$\eta_{-\xi}(x) = \exp\left(-\mathrm{i}X_a\xi_a(x)\right) \left[\eta(x) + \mathscr{T}[\eta]\right] \exp\left(\mathrm{i}X_a\xi_a(x)\right).$$

从方程(22.7.4),我们看出这是未破缺对称性子群H的生成元的线性组合,所以任何破缺对称性 生成元 X_b 的系数[$\eta_{-\xi}(y)$]_b为零. 另外,方程(22.7.10)和(22.7.8)立即表明,当t = 0时, $\eta_{-t\xi}(y) = \eta(y)$ 且[$A_{-t\xi}(y)$]_{μ} = $A_{\mu}(y)$,所以方程(22.7.16)给出

$$\mathscr{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int d^4 y \, [\eta_0(y)]_b \, G_b[y; A_0] = \int d^4 y \, \eta_b(y) \, G_b[y; A] \,, \tag{22.7.17}$$

加上方程(22.7.6), 这等价于希望的结果(22.7.1), 这也正是所要证明的.

方程(22.7.1)的解(22.7.7)不是唯一解, 但若要求在 $\xi = 0$ 时为零, 它却是唯一的. 为了看到这点, 注意到

$$\exp\left[-\mathrm{i}\int \eta_{\beta}(x)\,\mathscr{T}_{\beta}(x)\,\mathrm{d}^{4}x\right]\Gamma[\xi,A] = \Gamma[\xi',A']\,,\qquad(22.7.18)$$

其中加撇号是为了标明变换参量为ηβ的规范变换.将这里的指数表示成

$$\exp(z) = 1 + \int_0^1 \mathrm{d}t \, \exp(zt) \, z$$

将会方便我们的讨论,这样方程(22.7.1)和(22.7.18)就给出

$$\Gamma[\xi, A] - i \int_0^1 dt \, \exp\left[-it \int \eta_\beta(x) \mathscr{T}^A_\beta(x) \, d^4x\right] \int \eta_b(y) G_b[y; A] \, d^4y$$
$$= \Gamma[\xi', A'] \,. \tag{22.7.19}$$

特别地,如果我们取 $\eta_a = -\xi_a \pi \eta_i = 0$,那么 $\xi'_a = 0$,在这一情况下,根据假定,(22.7.19)的右边为零,因此给出公式:

$$\Gamma[\xi, A] = -\mathrm{i} \int_0^1 \mathrm{d}t \, \exp\left[\mathrm{i}t \int \xi_a(x) \mathscr{T}_a^A(x) \,\mathrm{d}^4x\right] \int \xi_b(y) G_b[y; A] \,\mathrm{d}^4y \,. \tag{22.7.20}$$

方程(22.7.20)中的泛函算符exp[it $\int \xi_a(x) \mathscr{T}_a^A(x) d^4x$]仅仅产生了规范参量为Λ_β(x) = −tξ_a(x)的规 范变换(15.1.17), 这使得方程(22.7.20)可以写成方程(22.7.7)那样.

$$[A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = -i \Big[\partial_{\mu} \exp(-itX_a(x)\xi_a(x))\Big] \exp(itX_a(x)\xi_a(x))$$
$$= -i \Big[\partial_{\mu}V\Big(t\xi(x)\Big)\Big] V^{-1}\Big(t\xi(x)\Big), \qquad (22.7.21)$$

其中

$$V(t\xi(x)) \equiv \exp(-itX_a(x)\xi_a(x)).$$
(22.7.22)

加上 $A^{\mu}_{\alpha}(x) = 0$, 方程(22.7.1)给出

$$\mathscr{T}_{\beta}(x)\Gamma[\xi,0] = 0,$$
 (22.7.23)

所以在方程(22.7.7)中使用方程(22.7.21)给出的结果是Goldstone玻色场 $\xi_a(x)$ 的*G*-不变定域泛函, 然而, 正如我们将会看到的, 一般而言, 尽管积分是*G*-不变的, 但是被积函数不是 $\xi_a(x)$ 和它导数的*G*-不变函数.

最简单的粒子是对称群完全破缺的情况.这时条件(22.7.6)为空,而我们可以使用反常的对称 形式(22.3.38):

$$G_{a}[x;A] = \frac{\mathrm{i}}{24\pi^{2}} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \operatorname{Tr} \left\{ T_{a} \Big[\partial_{\kappa}A_{\nu}(x) \partial_{\lambda}A_{\rho}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\partial_{\kappa}A_{\nu}(x) A_{\lambda}(x)A_{\rho}(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\mathrm{i}A_{\kappa}(x) \partial_{\nu}A_{\lambda}(x) A_{\rho}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{i}A_{\kappa}(x)A_{\nu}(x)\partial_{\lambda}A_{\rho}(x) \Big] \right\},$$
(22.7.24)

其中,现在的*T*_a是群生成元的特定表示,它由该理论的左手费米子(包含反费米子,在这里区分是 重要的)构成.在这一情况下,当我们在方程(22.7.24)中使用方程(22.7.21)时,在与*ϵ^{κνλρ}*收缩后,方 程(22.7.24)的迹中幸存下来的项将全部正比于

$$\operatorname{Tr}\left\{T_{a}(\partial_{\kappa}V)V^{-1}(\partial_{\nu}V)V^{-1}(\partial_{\lambda}V)V^{-1}(\partial_{\rho}V)V^{-1}\right\},\$$

系数分别是 $-1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 $+\frac{1}{2},$ 所以方程(22.7.7)在这里变成

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \int d^4y \,\xi_a(y) \int_0^1 dt \,\operatorname{Tr} \left\{ T_a \left[\partial_\kappa V \left(t\xi(y) \right) \right] \\ \times V^{-1} \left(t\xi(y) \right) \left[\partial_\nu V \left(t\xi(y) \right) \right] V^{-1} \left(t\xi(y) \right) \left[\partial_\lambda V \left(t\xi(y) \right) \right] \\ \times V^{-1} \left(t\xi(y) \right) \left[\partial_\rho V \left(t\xi(y) \right) \right] V^{-1} \left(t\xi(y) \right) \right\}.$$
(22.7.25)

正如所承诺的, 被积函数不是场和场导数的不变函数. 例如, 对于比较小的Goldstone玻色场, 方程(22.7.25)变成

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{240\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \operatorname{Tr} \left\{ T_a T_b T_c T_d T_e \right\} \int \mathrm{d}^4 y \,\xi_a \,\partial_\kappa\xi_b \,\partial_\nu\xi_c \,\partial_\lambda\xi_d \,\partial_\rho\xi_e + O(\xi^6) \,. \tag{22.7.26}$$

而对于Goldstone玻色场协变导数的任意函数,它关于场的最低阶项就是Goldstone玻色场偏导数的乘积,因而不可能有形式为(22.7.26)的最低阶项.

考察一个在实际中非常重要的例子, *u*夸克, *d*夸克和*s*夸克无质量的量子色动力学, 它的*SU*(3) × *SU*(3)手征对称性自发破缺到Gell-Mann和Ne'eman的对角*SU*(3)子群.为了使用本节的结果, 我们必须重新标记费米圈积分中的内动量使得对角*SU*(3)子群的矢量流是无反常的, 在这一情况下, 反常取Bardeen形式(22.3.34):

$$G_{a}[V,A] = \frac{\mathrm{i}n}{16\pi^{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr} \left\{ t_{a} \left[V_{\mu\nu}V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3}A_{\mu\nu}A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3}A_{\mu}A_{\nu}A_{\rho}A_{\sigma} + \frac{8}{3}\mathrm{i}(A_{\mu}A_{\nu}V_{\rho\sigma} + A_{\mu}V_{\rho\sigma}A_{\nu} + V_{\rho\sigma}A_{\mu}A_{\nu}) \right] \right\}, \qquad (22.7.27)$$

其中 V_{μ} , A_{μ} , $V_{\mu\nu}$ 和 $A_{\mu\nu}$ 由方程(22.3.35)—(22.3.37)定义; 这里的 t_a 是Gell-Mann矩阵 λ_a 的一半, 由方程(19.7.2)给定; n是每个味中夸克种类("色")的个数. (我们现在用小写的t表示群生成元的表示矩阵, 是因为在这个迹中我们只对左手夸克求和, 左手反夸克不在其内.) 对于(22.7.21)的纯规范场,场强 V_{μ} 和 $A_{\mu\nu}$ 为零, 这使得, 在方程(22.7.7)中使用方程(22.7.27)给出反常有效Goldstone玻色子作用量

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{2n}{3\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{Tr} \left\{ \xi_a t_a [A_{-t\xi}]_\mu [A_{-t\xi}]_\nu [A_{-t\xi}]_\rho [A_{-t\xi}]_\sigma \right\},\tag{22.7.28}$$

其中A在这里是轴矢量而不是矢量规范场.为找到[A-tɛ]µ,我们使用方程(22.7.21),它在这里写成

$$[V_{-t\xi}(x)]_{\mu} + \gamma_5 [A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = -i \Big[\partial_{\mu} \exp\Big(-it\gamma_5 t_a \xi_a(x)\Big)\Big] \exp\Big(it\gamma_5 t_a \xi_a(x)\Big).$$
(22.7.29)

先后乘以 $(1 + \gamma_5)/2$ 和 $(1 - \gamma_5)/2$ 然后取其差,这给出轴矢量项

$$[A_{-t\xi}(x)]_{\mu} = -\frac{1}{2}i\Big[\partial_{\mu}\exp\left(-it\xi_{a}t_{a}\right)\Big]\exp\left(it\xi_{a}t_{a}\right) + \frac{1}{2}i\Big[\partial_{\mu}\exp\left(it\xi_{a}t_{a}\right)\Big]\exp\left(-it\xi_{a}t_{a}\right) = \frac{1}{2}i\exp\left(it\xi_{a}t_{a}\right)U^{-1}\Big(t\xi(x)\Big)\Big[\partial_{\mu}U\Big(t\xi(x)\Big)\Big]\exp\left(-it\xi_{a}t_{a}\right), \qquad (22.7.30)$$

其中

$$U(t\xi) \equiv \exp(2it_a\xi_a t). \qquad (22.7.31)$$

在方程(22.7.28)中使用该项,这给出了有效反常作用量

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{n}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 dt \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ \xi_a t_a U^{-1} \left(t\xi(x) \right) \left[\partial_\mu U \left(t\xi(x) \right) \right] \right\}$$
$$\times U^{-1} \left(t\xi(x) \right) \left[\partial_\nu U \left(t\xi(x) \right) \right] U^{-1} \left(t\xi(x) \right) \left[\partial_\rho U \left(t\xi(x) \right) \right] U^{-1} \left(t\xi(x) \right)$$
$$\times \left[\partial_\sigma U \left(t\xi(x) \right) \right] \right\}.$$
(22.7.32)

正如Witten注意到的,^[25]这可以表示成传统的5维形式.我们取t为第5个坐标,并定义 $\xi_a(x,t) \equiv t\xi_a(x)$.那么方程(22.7.32)变成

$$\Gamma[\xi,0] = -\frac{\mathrm{i}n}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \int \mathrm{d}^5 z \, \mathrm{Tr} \left\{ U^{-1}(\xi(z)) \left[\partial_i U(\xi(z)) \right] \right\}$$
$$\times U^{-1}(\xi(z)) \left[\partial_j U(\xi(z)) \right] U^{-1}(\xi(z)) \left[\partial_k U(\xi(z)) \right] U^{-1}(\xi(z))$$
$$\times \left[\partial_l U(\xi(z)) \right] U^{-1}(\xi(z)) \left[\partial_m U(\xi(z)) \right] \right\}, \qquad (22.7.33)$$

其中*i*, *j*等取遍值1, 2, 3, 0和5, 当*i* = 1,2,3,0时, $z^i = x^i$, 而 $z^5 = t$, 并且积分区域是0 $\leq z^5 \leq 1$. (方程(22.7.33)中出现了额外的因子1/5, 是因为考虑到了五个指标*i*,*j*,*k*,*l*和*m*均可以取值5这个事 实.) 既然当 $z^5 = 0$ 时, 无论 z^i 的其它分量 z^μ 取何值, $\xi_a(z)$ 取固定值0, 我们可以将 z^i 的这些值视为 一个点,并将方程(22.7.33)中的积分区域视为一个五维球体,它的四维边界 $z^5 = 1$ 则取成普通的时 空. 因此, 方程(22.7.33)就是方程(19.8.1)和(19.8.3)给出的"Wess-Zumino-Witten"作用量的一个特 殊情况,它也正比于一个整数*n*; 唯一的不同之处在于这里的*n*现在等同为色的数目. 我们在19.8节 看到, 积分(19.8.3)只依赖于 $\xi_a(z)$ 在5维球体的时空边界上的取值,所以在导出方程(22.7.33)时,我 们证明了,不仅仅是 $\xi_a(x,t) = t\xi(x)$, 对于 $\xi_a(x)$ 到5维球体内部的任意延拓, 方程(19.8.2)都是适用 的.

* * *

更普遍地,考察任意规范群G自发破缺到子群H的情况,其中H自身是无反常的——即,D-符号对于H的任意3个生成元为零.朱创新,贺培铭和Zumino^[26]证明了,我们可以给这个作用量加一个定域泛函B[A],使得即使将破缺对称性的规范场也考虑在内,子群H的流是无反常的.这个泛函是

$$B[A] = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \, \text{Tr} \left\{ [A^{\mu}_h, A^{\nu}] (F^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}_h) + A^{\mu} A^{\nu}_h A^{\rho}_h A^{\sigma}_h - A^{\mu}_h A^{\nu} A^{\rho} A^{\sigma} + \frac{1}{2} A^{\mu}_h A^{\nu} A^{\rho}_h A^{\sigma} \right\},$$
(22.7.34)

其中,同往常一样, $A^{\mu} \equiv T_{\alpha}A^{\mu}_{\alpha} \perp F^{\mu\nu} \equiv T_{\alpha}F^{\mu\nu}_{\alpha}$, 而 $A^{\mu}_{h} \equiv T_{i}A^{\mu}_{i} n F^{\mu\nu}_{h} \equiv T_{i}F^{\mu\nu}_{i} \perp A^{\mu} n F^{\mu\nu}_{i}$ 定未破 缺对称性子群H的代数中的项. 那么总反常就是

$$G'_{\beta}[x;A] = G_{\beta}[x;A] + \mathscr{T}_{\beta}(x)B[A]$$
(22.7.35)

(其中G_β[x; A]是对称化反常(22.3.38))并满足希望的条件

$$G'_i[x;A] = 0. (22.7.36)$$

在方程(22.7.7)中使用方程(22.7.35)而不是 G_β ,就给出了Goldstone玻色子和规范场的有效作用量的反常部分.以这个方法,朱创新等人^[26]发现了反常有效作用量

$$\Gamma'[\xi, A] = \Gamma[\xi, A] - B[A_{-\xi}] + B[A], \qquad (22.7.37)$$

其中 $\Gamma[\xi, A]$ 是之前导出的有效作用量(22.7.7), 而令方程(22.7.8)中的t = 1就获得了 $A_{-\xi}(x)$. 特别地, 当规范场为零时, $A_{-\xi}$ 是纯规范场

$$[A_{-\xi}(x)]_{\mu} = -i \Big[\partial_{\mu} V\Big(\xi(x)\Big)\Big] V^{-1}\Big(\xi(x)\Big) + V\Big(\xi(x)\Big) = \exp\Big(-iX_a\xi_a(x)\Big),$$

所以这时的Goldstone玻色子作用量是

$$\Gamma'[\xi,0] = \Gamma[\xi,0] - \frac{1}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \, \text{Tr} \left\{ A^{\mu}_{-\xi} A^{\nu}_{-\xi\,h} A^{\rho}_{-\xi\,h} A^{\sigma}_{-\xi\,h} - A^{\mu}_{-\xi\,h} A^{\rho}_{-\xi} A^{\sigma}_{-\xi} + \frac{1}{2} A^{\mu}_{-\xi\,h} A^{\nu}_{-\xi\,h} A^{\rho}_{-\xi\,h} A^{\sigma}_{-\xi\,h} \right\}.$$
(22.7.38)

这个结果是不唯一的;特别地,在宇称守恒的理论中,例如量子色动力学,我们可以给有效作用量 中添加额外的定域项抵消掉方程(22.7.38)中任何宇称不守恒的项.

习题

2. 考察手征*SU*(3)对称性,对于费米子数守恒的理论,设它的自旋¹/₂场的左手部分在这个对称性构成*N*个*SU*(3)的定义表示3,而它的右手部分则都是单态.计算*SU*(3)对称性中的反常.如果我们在添加*M*个费米子场,并令它们的左手部分是单态,右手部分按照对称无迹二阶*SU*(3)张量进行变换,那么反常又是什么?

3. $\alpha n = 4$ 味的情况下, 找到't Hooft匹配条件(22.5.5)和(22.5.6)的一个解. $\alpha n = 2$ 味的情况下, 找到一个与本书给出的解不同的解.

4. 在不假定 $\Delta S = 0$ 的情况下,从量子主方程推导出Zinn-Justin方程.

参考文献

- J. Steinberger, *Phys. Rev.* **76**, 1180 (1949); 另见R. J. Finkelstein, *Phys. Rev.* **72**, 415 (1949);
 H. Fukuda and Y. Miyamoto, *Prog. Theor. Phys.* **4**, 347 (1949); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951); L. Rosenberg, *Phys. Rev.* **129**, 2786 (1963). 在实验上发现π⁰介子之前, S. Sakata和Y. Tanikawa对这个衰变速率做了一个粗略的估计, *Phys. Rev.* **57**, 548 (1940).
- [2] D. G. Sutherland, Nucl. Phys. **B2**, 433 (1967).
- [3] M. Veltman, Proc. Roy. Soc. A301, 107 (1967).
- [4] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento 60A, 47 (1969). 另见R. Jackiw, in Lectures on Current Algebra and its Application, (Princeton Press, Priceton, 1972).
- [5] S. Adler, Phys. Rev. 177, 2426 (1969). 另见S. Adler, in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory - 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton 编辑(MIT Press, Cambridge, MA, 1970): Volume I.

- [6] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979).
- [6a] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Proc. Nat. Acad. Sci. 81, 2597 (1984).
- [7] L. Alvarez-Gaumè and P. Ginsparg, Ann. Phys. 161, 423 (1985).
- [7a] 关于更加细致的讨论,参看Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, *Nucl. Phys.* **B117**, 157 (1981).
- [8] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969).
- [8a] 可参看, B. Zumino, Y-S. Wu, and A. Zee, Nucl. Phys. B239, 477 (1984).
- [9] S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969).
- [10] 可参看, H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982): pp. 15, 198. 原始文献是I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).
- [10a] M. F. Atiyah and I. M. Singer, 参考文献[6a]; B. Zumino in Relativity, Groups, and Topology II, B. S. De Witt and R. Stora编辑(North-Holland, Amsterdam, 1984); L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, 参考文献[7]; W. Bardeen amd B. Zumino, Nucl. Phys. B224, 421 (1984); R. Stora, in Progress in Gauge Field Theory, G. 't Hooft等人编辑(Plenum, New York, 1984): 543; O. Alvarez, I. Singer, and B. Zumino, Comm. Math. Phys. 96, 409 (1984); L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Nucl. Phys. B262, 439 (1985); J. Mañes, R. Stora, and B. Zumino, Commun. Math. Phys. 102, 157 (1985); B. Zumino, Nucl. Phys. B253, 477 (1985); J. M. Bismut and D. S. Freed, Commun. Math. Phys. 107, 483 (1986).
- [10b] E. Witten, *Phys. Lett.* **117B**, 324 (1982).
- [11] D. J. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. 96, 477 (1969).
- [12] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* D6, 429 (1972).
- [13] M. L. Mehta, J. Math. Phys. 7, 1824 (1966); M. L. Mehta and P. K. Srivastava, J. Math. Phys. 7, 1833 (1966).
- [13a] C. Bouchiat, J. Iliopoulous和Ph. Meyer证明了标准电弱理论四夸克版本中的反常相消, Phys. Lett **38B**, 519 (1972); S. Weinberg, in Foundamental Interactions in Physics and Astrophysics, G. Iverson等编辑(Plenum Press, New York, 1973): p. 157.
- [14] H. Georgi, in *Particles and Fields* 1974, C. Carlson编辑(Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).
- [15] R. Delbourgo and A. Salam, *Phys. Lett.* **40B**, 381 (1972); T. Eguchi and P. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1251 (1976). 另见N. K. Nielsen, M. T. Grisaru, R. Romer, and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B140**, 477 (1978); M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **B134**, 114 (1978); S. W. Hawking and C. Pope, *Nucl. Phys.* **B146**, 381 (1978); S. M. Christensen and M. J. Duff,

Phys. Lett. **76B**, 571 (1978); R. Critchley, *Phys. Lett.* **78B**, 410 (1978); A. J. Hanson and H. Roman, *Phys. Lett.* **80B**, 58 (1978). 关于总的综述, 参看T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980). 在4n + 2维, 能动量张量的发散中也存在反常; 参看L. Alvarez-Gaumè and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1984).

- [16] G. 't Hooft在Cargése Summer Insitute给的讲义, 1979, in Recent Developments in Gauge Theories, G. 't Hooft等人编辑(Plenum, New York, 1980), 再印于Dynamical Gauge Symmetry Breaking, E. Farhi和R. Jackiw编辑(World Scientific, Singapore, 1982), 以及G. t' Hooft, Under the Spell of the Gauge Principle (World Scientific, Singapore, 1994). 另见S. Dimopoulos, S. Raby, and L. Susskind, Nucl. Phys. B173, 208 (1980); S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. 45, 1000 (1980); Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B117, 157 (1981); A. Zee, Univ. of Peensylvania report, 1980 (未发表); R. Barbieri, L. Maiani, and R. Petronzio, Phys. Lett. 96B, 63 (1980); G. Farrar, Phys. Lett. 96B, 273 (1980); R. Chanda and P. Roy Phys. Lett. 99B, 453 (1981).
- [16a] S. Weinberg and E. Witten, *Phys. Lett.* **96B**, 59 (1980).
- [17] J. Preskill and S. Weinberg, Phys. Rev. D24, 1059 (1981).
- [18] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).
- [18a] R. Stora, in Progress in Gauge Field Theory, G. 't Hooft等人编辑(Plenum, New York, 1984): 543; B. Zumino, in Relativity, Groups and Topology II, B. S. De Witt和R. Stora编辑(Elsevier, Amsterdam, 1984): 1293; J. Mañes, R. Stora, and B. Zumino, Commun. Math. Phys. 102, 157 (1985).
- [18b] L. D. Faddeev, Phys. Lett. 145B, 81 (1984); B. Zumino, Nucl. Phys. B253, 477 (1985).
- [18c] J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 296 (1959).
- [19] J. A. Dixon, 未发表的预印本(1976-9); Commun. Math. Phys. 139. 495 (1991); F. Brandt, N. Dragon, and M. Kreuzer, Nucl. Phys. B332, 224 (1990); M. Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Talon, and C. M. Viallet, Phys. Lett. B289, 361 (1992); M. Dubois-Violette, M.Talon, and C. M. Viallet, Phys. Lett. B158, 231 (1985); Commun. Math. Phys. 102, 105 (1985); J. Mañes and B. Zumino, in Supersymmetry and its Applications: Superstrings, Anomalies, and Supergravity, G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and P. K. Townsend编辑(Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- [19a] 参看H. Georgi, 参考文献[10]: Eq. (XXV11.9).
- [20] R. Stora, in New Directions in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics Lectures at the 1976 Cargese Summer School, M. Lévy and P. Mitter编辑(Plenum, New York, 1977).
- [21] J. A. Dixon, 参考文献[19].
- [22] G. Barnich and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995).

- [23] W. Troost, P. van Nieuwenhuizen, and A. Van Proeyen, Nucl. Phys. B333, 727 (1990).
- [24] 我从B. Zumino获悉了这个证明, 私人通讯.
- [25] E. Witten, Nucl. Phys. **B223**, 442 (1983).
- [26] C.-S. Chu, P.-M. Ho, and B. Zumino, Nucl. Phys. B475, 484 (1996).

第 23 章 扩展场构形

无论微扰级数是否在数值上是真的奏效的,本书的大部分内容都致力于那些至少可以用微 扰论描述的量子场论的应用.在使用微扰论时,我们围绕场的真空期望值展开作用量,保留指 数exp(i*I*)中领头的二次项,并将所有场的高阶项视为小修正,这些期望值一般与时空无关.由于 存在与时空相关的扩展场构形,例如那些称为瞬子的扩展场构形,^[1]它们实际上也是作用量的稳 定"点",自20世纪70年代中期,人们对这种构形所产生的效应愈发地有兴趣.原则上,我们必须要 把这些构形纳入到路径积分之中并对围绕它们的涨落进行求和.(我们已经在20.7节看到了一个瞬 子构形的例子,只不过是另一种环境下的应用.)尽管这样的非微扰贡献通常被大幅度压低了,它 们在量子色动力学中却有很大的贡献,并在标准电弱理论中产生了有趣的新奇效应.

还存在一些其它的扩展场构形,它们不仅是对于包含普通粒子的过程的路径积分修正项,也 是实际物理态的可能分量.这些构形中包含一些粒子类的,例如磁单极和斯格明子,^[3]它们凝聚在 空间中的一个点附近,或者等价地,时空中的一条世界线附近.还有一些弦类的构形,类似于21.6节 讨论的超导体中的涡旋线,它们凝聚在空间中的一条线附近,或者等价地,时空中的一个世界面附 近.还有一些面类的构形,例如离散对称性破缺方式不同的空间区域之间的畴壁.与这些相反,前 面谈及的瞬子是事件类的,它们凝聚在时空中的一个点附近,因而不会作为实际物理态的分量出 现.

对于一些扩展场构型,由于它所在问题的性质会附加边界条件,会使得它们是稳定的.一个例 子是"弹回"解,它出现在真空衰变的分析中,^[6]我们将在23.8节进行讨论.由于量子数守恒会禁止 可能的衰变模式,还有一些场构型可能会因为携带量子数而变得稳定.

在本章,我们主要考察的扩展场构型是那些经由它们的拓扑变得稳定的场构型.在分析所有 这样的构形时,我们使用的拓扑工具是相同的,主要是同伦论,所以在开始阶段,我们将统一考察 任意维度d的时空或空间中的所有拓扑稳定构形.

23.1 拓扑的使用

通常情况下,通过要求各种场的某个泛函S是有限的,我们可以给定所有可能的场构形构成的 空间一个不平庸的拓扑.在经典场论中,S是势能(某些情况下是单位面积或单位长度上的势能); 有限的微扰不可能产生S是无限的构形.在经典统计力学中,S是哈密顿量,而在欧几里得时空中 构造的量子场论中,S要么是欧几里得作用量要么正比于它.(欧几里得路径积分以及它的一些应 用将在本章的附录A中进行讨论.)我们从某个平衡态场构形出发,要求它的欧几里得作用量或哈 密顿量是有限的,然后积掉保持其有限性的涨落,以此构建出微扰论.

如果一个场构形能够连续变换到另一个场构形,并且在变换过程不会经过那些S无穷大的禁止场构形,我们就称这两个场构形是拓扑等价的.这显然是等价关系(即满足自反性,对称性和传递性),因此,所有场构形的集合可以划分成等价类,每个等价类由拓扑相同的构形组成.例如,如果S是d维时空中的势能(对于时间无关场就是哈密顿量),那么无限高的势垒会禁止拓扑不相同的

场构形变换到彼此.特别地,拓扑上与通常的空间均匀真空场不相同的扩展场构形无法扩散变成 空间均匀的场构形.

当我们在寻找S的局域最小值时,拓扑分类也是很有用的.对于拓扑类型给定的所有构形,如 果我们能找到一个构形使得S最小,由于场的微小变化不会改变它们的拓扑类型,那么对于任意类 型的所有场构形,这个场构形必须至少是S的局域最小值.因此,这样的场构形是场方程的一个解, 等价于使得S稳定的条件.这类问题不仅出现在S是哈密顿量的稳定性问题中,当我们将路径积分 中的变量扩展至欧几里得d维时空,在寻找场构形时也会出现这样的问题.这时S是欧几里得作用 量I的相反数,我们要寻找的局域最小值要使得,在围绕这一构形的展开中,领头项是二阶项符号 正确的二次自由场作用量.

这里是一些例子:[8]

(a) 斯格明子等.考察连续整体对称群G自发破缺到子群H所带出的实Goldstone玻色场 π_a .正如 我们在第19章所看到的,在维度d > 2的欧几里得空间中,这些Goldstone玻色子的势能将采取如下 的形式

$$S[\pi] = \int \mathrm{d}^d x \, \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b + \cdots \right] \,, \tag{23.1.1}$$

其中*g_{ab}*是正定矩阵, 而"+···"代表π的导数可能的高阶项. 或者, 方程(23.1.1)可以视为d维欧几里 得时空中Goldstone玻色场作用量的相反数.

对于S有限的场构形,它的 $\partial_i \pi_a(\mathbf{x})$ 在无穷远处要比 $|\mathbf{x}|^{-d/2}(其中|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x_i})$ 更快地趋于 零,这使得 $\pi_a(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时必须要趋于常数 $\pi_{a\infty}$,而余数要比 $|\mathbf{x}|^{(2-d)/2}$ 更快地趋于零.任意点 的Goldstone玻色场 π_a 构成齐次空间,即陪集空间G/H,这使得总可以通过G的变换将任意一个场 值变到另外一个,所以通过一个整体G变换,总可以重新调整渐进极限 $\pi_{a\infty}$ 使其取任意特定的值, 例如 $\pi_{a\infty} = 0$.因此,场 $\pi_a(x)$ 代表了整个d维空间到所有场值构成的G/H流形的映射,其中d维空 间中 $r = \infty$ 的球面取成一个点.

现在,对于一个d维欧几里得空间,若它在无穷远处的(d-1)维球面可以等同为一个点,那么它在拓扑上就等价于 S_d ,即一个d维球面(即, (d+1)维球体的表面),也就是说它们可以连续映射到彼此.因此,按照 S_d 到场变量的流形G/H的拓扑不等价映射,其中无穷远处的点被映射到零,我们可以对 $\mathbf{x} \to \infty$ 时趋于零的场 $\pi(\mathbf{x})$ 进行分类.对于这种 $S_d \mapsto \mathcal{M}$ 的映射,其中 S_d 的一个点映射到 \mathcal{M} 的一个固定量,每类拓扑不同的映射所构成的集合称为流形 \mathcal{M} 的第d同伦群,记做 $\pi_d(\mathcal{M})$.我们会在下一节讨论这些同伦群(并解释它们的群结构),本章的附录B会给出各种流形的同伦群表.目前,只需知道一点,当流形 \mathcal{M} 是线性空间时,同伦群 $\pi_d(\mathcal{M})$ 是平庸的(也就是说,对于任意场构 $\mathcal{N}\pi(\mathbf{x})$,只要它在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时趋于一个常数,那么这个场构形就可以连续变换到任何位置的场均取这个常数的场构形),然而,Goldstone玻色场的流形 $\mathcal{M} = G/H$ 通常会有一个不平庸的同伦群.在与量子色动力学相关的情况中,即 $SU(2) \times SU(2)$ 破缺到SU(2)或者 $SU(3) \times SU(3)$ 破缺到SU(3),流形 $\mathcal{M} = G/H$ 分别等同于SU(2)和 $SU(3),根据附录B,同伦群<math>\pi_3(H)$ 是非平庸的.在d = 3时,处在势能的局域最小值且拓扑不平庸的场称为斯格明子(skyrmions).^[3]像质子这样的重子在某些方面可以视为纯介子理论中的斯格明子解.

除非给泛函(23.1.1)的被积函数引入 $\partial_i \pi_a$ 的高次项,否则它不会斯格明子稳定点.当没有这些高次项时,任何拓扑上不平庸的场构形会有一个连续的S值,这段连续值会向下扩展直至S = 0,这时 π 变得奇异,所以拓扑不会使得这种场构形是稳定的.这一般被称为Derrick定理.^[9]为了证明这

个定理, 注意到, 对于任意场构形 $\pi_a(\mathbf{x})$, 我们可以引入另外一个拓扑相同的场构形,

$$\pi_a^R(\mathbf{x}) \equiv \pi_a(\mathbf{x}/R)$$

其中R是任意的正实数标度因子. 那么, 对于方程(23.1.1)中显式写出的项

$$S[\pi^R] = R^{d-2}S[\pi]$$

当d > 2时,随着 $R \to 0$,这是R的衰减函数,所以 $S[\pi^R]$ 的连续值会向下延展直至S = 0.更进一步, 由于仅当 $\pi(\mathbf{x})$ 是常数时 $S[\pi]$ 才能为零,而我们已经假定 π 是拓扑不平庸的,所以 $S[\pi]$ 不可能为零,进 而有 $S[\pi] > 0$.因此,仅当R = 0时我们才能达到下界,这时 $\pi^R_a(\mathbf{x})$ 变得奇异.

通过给*S*添加更高阶的导数项, Goldstone玻色子的场构形可以被稳定下来. 例如, 如果我们 $\mathbb{R}[\pi] = T[\pi] + D[\pi]$, 其中

$$T[\pi] \equiv \int \mathrm{d}^d x \, \frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b \ge 0 \,,$$
$$D[\pi] \equiv \int \mathrm{d}^d x \, f_{abcd}(\pi) \, \boldsymbol{\nabla} \pi_a \cdot \boldsymbol{\nabla} \pi_b \, \boldsymbol{\nabla} \pi_c \cdot \boldsymbol{\nabla} \pi_d \ge 0 \,,$$

那么 $D[\pi^R] = R^{d-4}D[\pi]$,而同之前一样, $T[\pi^R] = R^{d-2}T[\pi]$,所以,如果2 < d < 4,尤其对于物理 上感兴趣的d = 3, $S[\pi^R]$ 会在有限的R处达到极小值.

斯格明子理论的问题不在于我们必须要给作用量引入*D*[π]这样的高阶导数项. 正如我们 在19.5节讨论过的,在Goldstone玻色子的任何有效场论中,我们预期作用量会有这样的项. 真正的 问题在于,没有什么基本原理可以排除掉除此以外的无限多个高阶导数项,其次,这些项的量级一 般与使得场构形在导数不同的项之间达到平衡的场构形量级相同,这使得真实的计算是不可能.

(b) **畴界.** 当一个离散对称性破缺时, 对称性有一定的可能性以不同的方法破缺到不同的畴中, 这些畴被畴界隔离, 在每个畴界中真空场从势的一个极小值跃迁到另一个极小值. 例如, 考察y-z平面中的平坦畴界, 并假定单位面积的能量是

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \right)^2 + V(\phi) \right], \qquad (23.1.2)$$

其中 $\phi(x)$ 是实标量场并假定只依赖于沿着垂直边界方向的距离x, 而 $V(\phi)$ 是满足反演对称性 $\phi \rightarrow -\phi$ 的势能, 它的最小值只在场值 $\pm \overline{\phi}$ 处. 方便起见, 我们给 $V(\phi)$ 加一个额外的常数使其最小值为零, 这样 $V(\phi) \ge 0$, 并且仅当 $\phi = \pm \overline{\phi}$ 时 $V(\phi) = 0$. 为了保持S的有限性, ϕ 在 $x \to \infty$ 时要趋 于 $+\overline{\phi}$ 或 $-\overline{\phi}$, 同理, 在 $x \to -\infty$ 时也要趋于 $+\overline{\phi}$ 或 $-\overline{\phi}$. 那么我们就有四个拓扑不等价的构形, 其中两个在 $x \to \pm \infty$ 时趋于相同的极限, 这使得场构形可以光滑地形变到 $\phi(x)$ 处处为常数的场构形, 而另外两个 ϕ 在 $x \to \pm \infty$ 时趋于相反极限, 这两个场构形是拓扑稳定的. 这里我们根据 $\pi_0(G)$ 对场构形分类, 其中, 对于任意流形 \mathcal{M} , $\pi_0(\mathcal{M})$ 习惯上定义成 \mathcal{M} 连通分量的集合, 而G是对称群, 在我们的情况中, G是反演 $\phi \to -\phi$ 的 Z_2 群.

这里非常适宜引入Bogomol'nyi给出的一个技巧,^[10] 在处理23.3节和23.5节更加复杂的单极子 情况和瞬子情况时,这个技巧将是非常有用的. 将方程(23.1.2)重写成如下形式

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \mp \sqrt{2V(\phi)}\right)^2 \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} \sqrt{2V(f)} \,\mathrm{d}f \,. \tag{23.1.3}$$

方程(23.1.3)右边第二项的积分可以视为"拓扑荷",它只依赖于场在 $x \to \pm \infty$ 时所取的值.如果场构形在 $x \to +\infty n x \to -\infty$ 时趋于相同的极限,这个积分为零,而S在场为常数场时达到它的最小值零.如果场 $\phi(x)$ 在 $x = \pm \infty$ 时取不同的值,我们可以选择方程(23.1.3)中的±符号给出一个下界

$$S[\phi] \ge \int_{-\overline{\phi}}^{\overline{\phi}} \sqrt{2V(f)} \,\mathrm{d}f \,. \tag{23.1.4}$$

当方程(23.1.3)中的第一项为零时,或者,换句话说,当

$$x = \pm \int_0^{\phi(x)} \frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{2V(f)}} + x_0 , \qquad (23.1.5)$$

 $S[\phi]$ 抵达它的下界,其中 x_0 是积分常数, (23.1.5)显然给出了畴界中心的位置.注意到,在这里寻求 解时,Derrick定理不再是一个障碍,这是因为,对于畴界,d = 1,所以对于重标度场 $\phi(x/R)$,方 程(23.1.2)中的两项被积函数分别趋于 R^{-1} 和 R^{+1} .

方程(23.1.5)也可用更直接的方法导出,通过要求方程(23.1.2)在 $\phi(x)$ 的微小变分下稳定,我 们可以导出 $\phi(x)$ 的二阶微分方程,然后用这个微分方程证明 $\frac{1}{2}$ (d ϕ/dx)² – V(ϕ)关于x是常数.我 们在这里使用的是基于公式(23.1.3)的推导,它的优势在于公式(23.1.3)立即表明,除了边界位 置 x_0 的变换带出的"零模"外,对于保持那些边界平坦性的小微扰,解(23.1.5)相对这些微扰是稳 定的.通过给方程(23.1.2)的被积函数中加上 $\frac{1}{2}$ (d ϕ/dy)² + $\frac{1}{2}$ (d ϕ/dz)²,我们能够看到,对于任何微 扰 $\delta\phi(x,y,z)$,假定对于固定y和z,在 $x \to \pm \infty$ 时 $\delta\phi(x,y,z) \to 0$,那么这个解对这些微扰也是稳定 的.

如果存在自发破缺的离散对称性,那么当这些对称性在早期宇宙开始破缺时, 畴壁就会形成. 如果畴壁没有消失,那么在当今宇宙中观测到的各项同性和均匀性就会因此产生大变形.^[5] 除了CPT以外,我们不知道任何精确离散对称性,或者自发破缺的精确或近似离散对称性,所以目前为止,这并不会构成问题.

(c) 瞬子等. 现在考察规范理论, 它有

$$S[A] = \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^d x \, F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} \,, \qquad (23.1.6)$$

其中 $F_{\alpha i j}$ 是通常的场强张量,并且我们取 $d \ge 4$.这既可以视为量子规范场在d维欧几里得时空中的作用量,也可以视为是(d + 1)时空中经典鬼场场的势能,其中规范场处在时性规范 $A^0_{\alpha} = 0$ 中.

为了使S[A]是有限的, $F_{\alpha i j}$ 必须在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时为零. 这可以通过令 $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \to 0$ 足够迅速地趋 于零实现, 但即使是对于 $d \ge 4$, 对于一些以 $1/|\mathbf{x}|$ 的速率趋于零的场 $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$, 只要它在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时趋 于纯规范

$$it_{\alpha}A_{\alpha i}(\mathbf{x}) \to g^{-1}(\mathbf{\hat{x}}) \,\partial_i g(\mathbf{\hat{x}}) \,,$$
(23.1.7)

S[A]仍然有可能是有限的,其中 $g(\hat{\mathbf{x}})$ 是规范群G的群元,它与方向相关.更进一步,如果我们 将 $g(\hat{\mathbf{x}})$ 换成 $g_0g(\hat{\mathbf{x}})$,其中 g_0 是G中固定的群元, $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ 是不受影响的,所以通过选择 $g_0 = g^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_1)$, 我们可以令任何一个方向 $\hat{\mathbf{x}}_1$ 的 $g(\hat{\mathbf{x}}_1) = 1$.因此,每个使得S[A]有限的规范场定义了一个从单位球 面 $|\hat{\mathbf{x}}| = 1$ 到群流形的映射,其中点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ 映射到G的单位元.(若规范场在 $|\mathbf{x}| \to \infty$ 时比 $1/|\mathbf{x}|$ 更快地趋 于零,那么在这一情况下,单位球面上的所有点都映射到规范群的单位元.)对于映射 $S_{d-1} \mapsto G$, 其中 S_{d-1} 中的一个点映射到G的一个固定群元,它的拓扑不等价映射类构成的集合是 $\pi_{d-1}(G)$, 即群流形的第(d-1)同伦群.本章附录B将会指出,对于任意半单Lie群G, $\pi_3(G)$ 总是非平庸的. 当d = 4时, S[A]的拓扑不平庸稳定点被称为瞬子.^[1] 我们会在23.5节和23.6节讨论它在量子色动力 学中的重要性.

为了使得S[A]在场A(x)处是稳定的,必要条件是A(x)满足场方程

$$\partial_i F_{\alpha i j} = 0. (23.1.8)$$

对于我们有希望找到S[A]的拓扑不平庸局域最小值的维度d,简单的标度讨论会再次给出它的限制. 定义 $A^{R}(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)/R$. 那么

$$S[A^R] = R^{d-4}S[A] ,$$

所以当 $d \neq 4$ 时,除非S[A] = 0,否则不存在S[A]的拓扑不平庸稳定点.但如果S[A] = 0,那 $\Delta F_{\alpha i j}$ 处处为零,所以通过一个规范变换,我们可以使得 $A_{\alpha i}$ 也处处为零.

我们将会23.5节看到, 当d = 4时, 确实有可能找到S[A](那里等同为-I[A])稳定的瞬子解, 在这个解中, 除了无穷远处, $F_{\alpha ij}$ 不等于零. 上面的标度讨论表明, 如果 $A(\mathbf{x})$ 是这样的瞬子解, 那 $\Delta A(\mathbf{x}/R)/R$ 也是, 但是量子修正会移除这个简并.

(d) 单极子,涡旋线等.现在考察含有标量场的规范场论,其中标量场构成规范群的线性表示,并有

$$S[\phi, A] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i \phi_a D_i \phi_b + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + U(\phi) \right], \qquad (23.1.9)$$

其中 $g_{ab}(\phi)$ 是正定矩阵(通常与 ϕ 无关), $U(\phi)$ 下有界, 并被一个常数项偏移使得它的最小值是零, 而 $F_{\alpha ij}$ 和 D_i 分别是通常的场强张量和规范协变导数. 我们要求 $U(\phi)$ 和 $g_{ab}(\phi)$ 在规范群G的变换下分别是标量和张量. 像之前一样, 方程(23.1.9)要么给出一个量子场论在d维欧几里得时空中的作用量, 要么给出时性规范下的经典场论在(d+1)维时空中的势能.

要使 $S[\phi, A]$ 有限, $U(\phi(\mathbf{x}))$ 必须要在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时为零. 使得 $U(\phi)$ 为零的 ϕ , 它们构成的集合 在G下不变, 这样的集合可能是离散的也可能是连续的. 在上面的情况(b)中, 我们处理了离 散集合的情况. 现在我们来考察这样的破缺对称性: $U(\phi)$ 的零点形成连续流形 \mathcal{M}_0 ,构成这个 流形的场通过变换 $g \in G$ 互相关联. 在这一情况下,每个 $\phi(\hat{\mathbf{x}})$ 可以通过给场在任意一个方向 上的值 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ 作用变换 $\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \in G$ 获得. 因此,我们可以认为场 $\phi(\mathbf{x})$ 定义了到陪集空间G/H的映 射 $S_{d-1} \mapsto G/H$; 其中的G/H换一种方式描述是,对于群G中的两个群元 g_1 和 g_2 ,如果它们只相 差子群H中的一个元素h的右乘作用,即,如果 $g_1 = g_2h$,那么这两个元素就视为是等价的,其 中 $H \subset G$ 是保持 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ 不变的子群. 特别的,为了使得 $\gamma(\hat{\mathbf{x}}_1)$ 作用在 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ 上仍产生 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$,点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ 要映 射到子群H中. 对于那些在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时趋于流形 \mathcal{M}_0 上的值的场,我们就可以根据 S_{d-1} 到G/H的拓 扑不等价映射对这些场进行分类,其中这些映射将点 $\hat{\mathbf{x}}_1$ 映射到G/H的固定"单位"元G/H. 对于映 射 $S_{d-1} \mapsto G/H$,其中 S_{d-1} 中的一个点映射到G/H的一个固定群元,它的拓扑不等价映射类构成 的集合是 $\pi_{d-1}(G/H)$,即流形G/H的第(d-1)同伦群.

在这一情况下, $\partial_i \phi(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \to \infty$ 时趋于1/|**x**|. 为了使*S*[ϕ]是有限的, $D_i \phi \Delta \mathbf{x} \to \infty$ 时要以快 于|**x**|^{-d/2}的速率趋于零,所以i $t_{\alpha}A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ 在**x** $\to \infty$ 时要以快于|**x**|^{-d/2}的速率趋于 $\gamma^{-1}(\hat{\mathbf{x}})\partial_i \gamma(\hat{\mathbf{x}})$. 这是一个纯规范场,所以场强张量 $F_{\alpha i j}(\mathbf{x})$ 趋于零的速率要快于|**x**|^{-d/2-1},这个速率足以使 得 $\int d^d x F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} \psi \Delta \omega$. Derrick定理并不适用于方程(23.1.9)定义的规范理论,但无妨看一下相同的推理会将我们带 往何方.对于任何给定的场 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $A(\mathbf{x})$,再次定义 $\phi^R(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{x}/R)$ 和 $A^R(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)/R$.哈密顿 量(23.1.9)中的三项现在有标度率

 $T[\phi^R, A^R] = R^{d-2}T[\phi, A] , \qquad K[A^R] = R^{d-4}K[A] , \qquad V[\phi^R] = R^d V[\phi] ,$

其中 $T[\phi, A] \equiv \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i \phi_a D_i \phi_b, K[A] \equiv \frac{1}{4} \int d^d x F_{\alpha i j} F_{\alpha i j}, V[\phi] \equiv \int d^d x U(\phi).$ 现 在,当d > 4时, $S[\phi, A]$ 对于R的任意有限值均无最小值,所以不存在拓扑不平庸的稳定构形. 当0 < d < 4时,不难找到使得 $S[\phi^R, A^R]$ 最小的有限R值.

物理上感兴趣的是d = 3,在这一情况下,拓扑不平庸的场构形根据同伦群 $\pi_2(G/H)$ 进行分类, 而当单连通群G(例如SU(2))破缺到包含电磁U(1)的子群H时,这个同伦群是不平庸的. d = 3的拓 扑不平庸经典场构形被称为磁单极子.^[2] 我们会在23.3节看到,它们的磁极强度是量子化的,不同 的值对应 $\pi_2(G/H)$ 的不同元素.

当d = 2时, 拓扑不平庸的构形对应于 $\pi_1(G/H)$ 中的元素, 当G是U(1)或SO(3)这样的非单连 通群, 并且完全自发破缺或者破缺到一个离散子群时, $\pi_1(G/H)$ 才是非平庸的. d = 2的拓扑不平 庸经典场构形是涡旋线的横截面. 超导体给出了这样的一个例子, 在超导体中, G = U(1)自发破 缺到了 $H = Z_2$. 我们在21.6节看到, 在特定的磁场范围内, 涡旋线出现在II型超导体中, 并且涡旋 线所携带的磁通量是量子化的, 磁通量的不同值对应于 $\pi_1(U(1)/Z_2)$ 的不同元素. 相对论量子场论 中也会出现涡旋线,^[4] 并且会在早期宇宙的对称性破缺相变中出现, 在这一情况下, 它们被称为宇 宙弦.^[11]

单极子和涡旋线共享了一个基于纯拓扑推导的显著特征. 在这两个情况中, 在包裹构形的大 球面(对于涡旋线是S₁, 对于单极子是S₂)上, Goldstone玻色场π_a(**x**)的形式被扭曲(twisted)了, 使 得它们无法连续变换到常数. 特别地, 由于球面上的非奇异场π_a(x)在球面的半径收缩至零时必须 要变成常数, 所以不可能在不遇到奇点的前提下将这些球面的半径光滑地减小至零. 在这两种情 况下, 奇点会出现在群G不再自发破缺的核心中(对于涡旋线是一条线或一个管, 对于单极子则是 一个点或一个球体), 这使得系统不再由Goldstone玻色场进行描述, 而是由另外一个在G下线性变 换的序参量描述.

当d = 4时, R的函数 $S[\phi^R, A^R]$ 仅在 $T[\phi, A] = V[\phi] = 0$ 时才会在某个有限的R值处有最小值, 这会要求 $\phi(\mathbf{x})$ 处处取使得 $U(\phi) = 0$ 的 ϕ 值. 假定这些值是连续的且通过规范群G中的变换彼此相 关,通过一个规范变换,它们会被变成一个常数, $\phi(x) = \phi_0$. 那么在这个规范下, $T[\phi, A] = 0$ 的 条件暗示了对于所有破缺对称性,即使得 $t_a\phi_0 \neq 0$ 的对称性, $A_{\alpha}(\mathbf{x}) = 0$. $T[\phi, A]$ 和 $V[\phi]$ 关于这个 场构形都是稳定的,所以为了使 $S[\phi, A]$ 是稳定的, $K[\phi, A]$ 也必须是稳定的,这意味着非零的规范 场 $A_{i\mu}$ (它属于没有被 ϕ_0 的子群 $H \subset G$)必须满足欧几里得Yang-Mills场方程

$$\partial_{\mu}F_{i\mu\nu} = 0$$
. (23.1.10)

这一情况因此退化至情况(c), 只不过这时规范群G被替换成了它的未破缺子群H.

23.2 同伦群

在上一节,对于那些保持哈密顿量或者其它泛函有限的场构形,我们学习了如何按照相应同 伦群中的元素对其分类.但是我们还没有解释同伦群在何种意义下是群,也没有对群结构赋予任 何物理含义.我们将会看到,同伦群中群元的乘法规则有一个自然定义,根据这个定义,d维中构成 流形 \mathcal{M} 的两个扩展场构形,如果它们分属 $\pi_d(\mathcal{M})$ 的两个不同元素 c_1 和₂,那么它们连续融合所构成 的构形属于 $\pi_d(\mathcal{M})$ 的元素 $c_1 \times c_2$.

我们从定义任意流形*M*的第一同伦群*π*₁(*M*)出发,第一同伦群也称为流形的基本群.正如 我们已经看到的,对于某个陪集空间*G*/*H*,存在不平庸的*π*₁(*G*/*H*)是三维中涡旋线拓扑稳定的条 件(或者两维中的单极).在考察*π*₁(*M*)之后,我们会转向更一般的同伦群.

对于连通流形*M*,如果流形上存在着无法通过连续形变收缩至一个点的闭合曲线p(z),其中p(z)由单参量z参数化, $0 \le z \le 1$ 且p(0) = p(1),那么我们就称这个流形是多连通的.在连通流形上,我们总可以对这样的闭合曲线做连续形变使得曲线上的任意一点处在流形上的任意位置,所以我们可以将考察只限制在 $p(0) = p(1) = p_0$ 的曲线上,其中 p_0 是流形上的任意固定点,它被称为基点.任意两个这样的闭合曲线 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$,如果它们可以变形到彼此,即,如果存在连续函数p(z,t),其中 $0 \le t \le 1$,使得

$$p(z,0) = p_1(z) , \qquad p(z,1) = p_2(z) ,$$

 $p(0,t) = p(1,t) = p_0 ,$

我们就称这两个曲线同伦等价. 同伦等价是等价关系, 也就是说满足对称性, 自反性和传递性, 所 以它将流形上的闭合曲线构成的空间划分成了等价类: 当且仅当两个闭合曲线同伦等价, 它们才 属于相同的等价类. 这些等价类的集合称为流形的第一同伦群, *π*₁(*M*).

为了定义 $\pi_{\mathscr{M}}$ 的乘法规则,为 $\pi_1(\mathscr{M})$ 中的每个等价类c选择标准曲线p[z,c],这样的标准曲线始于基点 p_0 并终于基点 p_0 .对于任意两个等价类 $c_1 \pi c_2$,定义"乘积" $c_1 \times c_2$ 为包含曲线 $p[z,c_1,c_2]$ 的等价类,其中曲线 $p[z,c_1,c_2]$ 从 p_0 出发,沿着 $p[z,c_1]$ 回到 p_0 ,然后沿着 $p[z,c_2]$ 再次回到 p_0 .形式上,我们取

$$p[z, c_1, c_2] \equiv \begin{cases} p[2z, c_1] & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z - 1, c_2] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

现在,我们必须要证明以这种方式定义的乘法满足群的条件.首先,我们先来验证这个乘法是结合的.对于这个目的,注意到等价类(c₁×c₂)×c₃包含曲线p[z,c₁×c₂,c₃],这个曲线从基点出发沿着标准曲线p[z,c₁×c₂]回到基点,然后再沿着曲线p[z,c₃]从基点回到基点,而等价 类c₁×(c₂×c₃)则包含曲线p[z,c₁,c₂×c₃],这样的曲线先沿着标准曲线p[z,c₁]从基点回到基点,再沿着标准曲线p[z,c₂×c₃]从基点回到基点.根据定义,曲线p[z,c₁×c₂]可以变形至先沿着标准曲线p[z,c₂×c₃],这样的曲线定, 而曲线p[z,c₂×c₃]可以变形至先沿着标准曲线p[z,c₂], 本点回到基点,再沿着标准曲线p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₁], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点回到基点,而当我p[z,c₂], 本点到基点,而当我p[z,c₂], 本点到基点,最后沿者p[z,c₃], 本点到基点,因此,这两个曲线可以变形至彼此,证明了

$$(c_1 \times c_2) \times c_3 = c_1 \times (c_2 \times c_3).$$

 $\pi_1(\mathcal{M})$ 的单位元e定义为包含曲线 $p[z,e] = p_0$ 的等价类,这样的曲线停留在基点上.为了验证 $e \times c = c$,注意到

$$p[z, e, c] = \begin{cases} p_0 & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z - 1, c] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

然而, 通过取

$$p(z,t) = \begin{cases} p_0 & 0 \le z \le t/2 \\ p[(2z-t)/(2-t),c] & t/2 \le z \le 1 \end{cases},$$

由于p(z,t)在t = 1时与p[z,e,c]相同,在t = 0时与p[z,c]相同,我们发现这个曲线可以连续形变 至p[z,c].乘积 $e \times c$ 是包含p[z,e,c]的等价类,我们现在看到它与包含p[z,c]的等价类是相同的,而 这个等价类就是 $c.\ c \times e = c$ 的证明是类似的.

等价类c的"逆" c^{-1} 是包含曲线 $p^{-1}[z,c]$ 的等价类,这样的曲线与标准曲线p[z,c]路径相同但方向相反;即,

$$p^{-1}[z,c] \equiv p[1-z,c]$$
.

这样的曲线不一定是"标准"曲线 $p[z, c^{-1}]$,但根据等价类 c^{-1} 的定义,这两个曲线可以变形至彼此. 为了验证 $c^{-1} \times c = e$,注意到,通过将 $p[z, c^{-1}]$ 变形至 $p^{-1}[z, c]$,曲线 $p[z, c^{-1}, c]$ 可以变形成

$$p[z, c^{-1}, c] \to \begin{cases} p[1 - 2z, c] & 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ p[2z - 1, c] & \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{cases}$$

但是,取

$$p(z,t) = \begin{cases} p[1-2tz,c] & 0 \le z \le t/2\\ p[(2tz+1-2t,c] & t/2 \le z \le 1 \end{cases}$$

由于这个p(z,t)在t = 1时等于 $p[z,c^{-1},c]$ 而在t = 0时等于p[z,e],所以曲线 $p[z,c^{-1},c]$ 可以连续形 变至 $p[z,e] = p_0$.乘积 $c^{-1} \times c$ 是包含 $p[z,c^{-1},c]$ 的等价类,这个等价类现在在我们看来就是包 含p[z,e]的等价类,而这个等价类就是e. $c \times c^{-1} = e$ 的证明是类似的.存在单位元和逆元表明这些 等价类构成群.

第一同伦群不平庸的流形*M*的经典例子是圆本身, $M = S_1$. 这个流形可以通过角度 θ 参数化, 其中 $\theta = 0 \pi \theta = 2n\pi (n$ 是任意的整数)等价为同一点. 同伦群由 $0 \le z \le 1$ 的函数 $\theta(z)$ 的类构成, 这 些函数始于某个基点 $\theta(0) = \theta_0$,并终于相同的基点 $\theta(1) = \theta_0 + 2n\pi$. 对于任意两个这样的函数,当 且仅当它们的n值相同,它们才能连续形变至彼此,所以 $\pi_1(S_1)$ 由无限多个可列类 c_n 构成,标记这 些等价类的是任意整数n. 更进一步,对于那些构成两个类 $c_n \pi c_m$ 的"乘积"的曲线,它们从基点出 发绕圆n圈回到基点,再从基点出发绕圆m圈回到基点,所以这里的群乘法就是加法:

$$c_n \times c_m = c_{n+m} \tag{23.2.1}$$

因此

$$\pi_1(S_1) = Z , \qquad (23.2.2)$$

其中Z是整数的加法群.一个显然的物理应用是,当规范群SO(2)完全自发破缺时,陪集空间就 是SO(2)本身,它的拓扑与圆相同,所以在这个情况下,存在无限多类拓扑稳定的涡旋线,这些 涡旋线有整数n表征.例如,II型超导体中就是这样的情况,我们在21.6节看到,电磁规范不变性 的U(1)自发破缺到离散子群Z₂.

更一般地,所有*d* > 1的球面*S*_d都是单连通的,这意味它们的第一同伦群是平庸的,这种陈述 传统上表示成

只有几个我们更加熟悉的Lie群是多连通的:

$$\pi_{1}(G) = \begin{cases} Z & G = U(k) & k \ge 1 \\ Z_{2} & G = SO(k) & k \ge 3 \\ 0 & G = Spin(k) & k \ge 3 \\ 0 & G = SU(k) & k \ge 2 \\ 0 & G = USp(2k) & k \ge 1 \\ 0 & G = G_{2}, F_{4}, E_{6}, E_{7}, E_{8} \end{cases}$$

$$(23.2.4)$$

这里Z₂是只有两个群元1和-1的群,它的群乘法就是普通的乘法,Spin(n)是SO(n)的单连通覆盖群.(正如我们在2.7节看到的,Spin(3)与SU(2)相同.)另外,对于两个流形*M*和*M*'的直积,基本群是

$$\pi_1(\mathscr{M} \times \mathscr{M}') = \pi_1(\mathscr{M}) \times \pi_1(\mathscr{M}').$$
(23.2.5)

通过提出这样的问题: 在三维中, 当两个相距甚远的平行涡旋线被带到一起时会发生什么? 我们可以领会出 $\pi_1(\mathcal{M})$ 群结构的物理意义. 当涡旋线之间的距离足够远时, 它们的场不会相互作 用, 所以, 通过指定这两个涡旋线所属的 $\pi_1(G/H)$ 的等价类c'和c'', 我们就能描述这两个构形. 整个 构形所属的等价类c由环绕两个涡旋线的大圆上的场的行为决定. 通过连续形变, 我们可以将这个 非常大的大圆拧成两个大圆, 这两个大圆分别环绕这两个涡旋线, 它们的相交点处在两个涡旋线 的中间. 当我们在二维空间中沿着这一闭合曲线运动时, 我们会描出G/H中的一条曲线, 其中我 们先描出的闭合曲线是等级类c'中的一个闭合曲线, 后描出的是等价类c''中的一个闭合曲线, 它恰 好就是等价类乘积的定义中那样. 我们由此得出, 整个构形处在等价类 $c = c' \times c''$ 中, 所以这两个 涡旋线融合所产生的涡旋线只能属于这个等价类. 特别地, 当且仅当 $c'' = c'^{-1}$ 时, 它们才能湮灭.

例如, 当 $\pi_1(G/H) = Z$ 时(超导体中就是这样, 其中 $G/H = SO(2)/Z_2$), 三维中两个分属等价 类 c_n 和 c_m 的涡旋线可以融合形式等价类 c_{n+m} 的涡旋线, 所以仅当n = -m时, 它们才能湮灭. 另一 方面, 当 $\pi_1(G/H) = Z_2$ 时(例如 $G \ge N \ge 3$ 的SO(N), H是平庸群), 三维中只有一类涡旋线, 对应 与 Z_2 中的元素-1, 而由于 $(-1)^2 = 1$, 任何两个涡旋线都可以湮灭.

我们现在来考察一般同伦群 $\pi_k(\mathcal{M})$. 这很像 $\pi_1(\mathcal{M})$,不同之处在于,在这里我们不考察圆 S_1 到 流形 \mathcal{M} 的映射,而是从k-球面 $S_k((k+1)$ 维球体的表明)到 \mathcal{M} 的映射,并且像之前一样,这些映射总 将 S_k 的一个点映射到 \mathcal{M} 的同一个"基点" p_0 .对于任意两个这样的映射,如果它们可以连续变形到 彼此,并且保持将 S_k 的同一个点隐射到基点,这两个映射就是等价的. 第k同伦群 $\pi_k(\mathcal{M})$ 的元素就 由这些映射的等价类构成.

通常情况下,一个很方便的处理是将d-球面 S_d 描述成d维超立方体的内部,而将超立方体边界上的所有点都等同为一个点.例如,我们已经看到圆 S_1 可以视为端点 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 等同为同一点的线段 $0 \le \theta \le 2\pi$.类似地,我们可以像对地球表面那样给 S_2 做一个地图,沿着南极点将 S_2 剪开,然后将剪开后的曲面铺展在单位正方形 $0 \le z_1 \le 1, 0 \le z_2 \le 1$ 上.由于这个正方形边框上的所有点都是同一个点,即南极点,所以这个正方形到 \mathcal{M} 的连续映射必须将边界上的所有点都映到 \mathcal{M} 上的同一点.一般而言,对于两个从 S_d 到 \mathcal{M} 的映射 $p(z_1, \cdots z_d)$ 和 $p'(z_1, \cdots z_d)$,如果它们可以连续变形到彼此,与此同时它们保持超立方体边界上的p等于基点 p_0 ,那么这两个映射就是同伦等价的.

像上面一样,对于每个等价类c,我们选择标准映射 $p(z_1, \cdots z_d; c)$. $c_1 和 c_2$ 的乘积定义成包含如

下映射的等价类

$$p(z_1, z_2, \cdots z_d; c_1, c_2) = \begin{cases} p(2z_1, z_2, \cdots z_d; c_1) & 0 \le z_1 \le \frac{1}{2} \\ p(2z_1 - 1, z_2, \cdots z_d; c_2) & \frac{1}{2} \le z_1 \le 1 \end{cases},$$
(23.2.6)

单位元e所定义的等价类包含对于所有 $z, p = p_0$ 的映射, 而c的逆 c^{-1} 定义成包含映射

$$p^{-1}[z_1, z_2, \cdots z_d; c] = p[1 - z_1, z_2, \cdots z_d; c]$$
(23.2.7)

的等价类.利用处理 π_1 的方法,可以证明这个乘法是结合的,并且有 $e \times c = c \times e = c \pi c^{-1} \times c = c \times c^{-1} = e$.所有 $n \ge 2$ 的 $\pi_n(\mathcal{M})$ 都是阿贝尔的.(存在 $\pi_1(\mathcal{M})$ 非阿贝尔的流形 \mathcal{M} ,例如移去两个点或多个点的平面.)

在任何 $\pi_k(\mathcal{M}) = Z$ 的情况中,必存在从k-球面 S_k 到 \mathcal{M} 中的k-球面 S'_k 的一一映射,这个映射对应Z中的元素"1"(不是单位元, Z中的单位元是0). Z中 $\nu = 2, 3, \cdots$ 的元素 ν 所对应的映射依旧是 $\mathcal{M}S_k$ 到 \mathcal{M} 中的同一球面 S'_k ,不过这个映射是 S'_k 的 ν 次覆盖,变换 $S_k \to S'_k$ 的雅克比行列式为正.而对于那些 $\nu = -1, -2, \cdots$ 的元素 ν ,它对应的 $S_k \to S'_k$ 映射是 S'_k 的 $|\nu|$ 次覆盖,变换 $S_k \to S'_k$ 的雅克比行列式为页.

例如,在上一节我们看出,当单连通群G自发破缺到电磁的U(1)群时,磁单极子就会出现.在 这一情况下,附录表明

$$\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z, \qquad (23.2.8)$$

所以磁单极子携带整数值量子数ν,而正如23.3节所证明的,它正比于磁荷.这个量子数给出的是, 当包裹磁单极子的半径很大的2-球面映射到Goldstone玻色场流形G/U(1)中的2-球面,这个映射的 覆盖次数(若两个2-球面的相对定项相同,则给出正的ν,反之,则给出负的ν),因此ν被称为缠绕数. 群Z的结构表明这个量子数是守恒的,也就是说,量子数为ν的单极子和量子数为ν'的单极子融合 后形成的只能是量子数为ν + ν'的单极子.

如果未破缺子群是n ≥ 3的SO(n), 那么根据本章的附录B

$$\pi_2(G/SO(n)) = \pi_1(SO(n)) = Z_2.$$
(23.2.9)

在这一情况下, 仅存在一类"单极子", 这个单极子对应于*Z*2的元素-1, 它只能成对湮灭. 这个情况 要与*SO*(*n*)被换成它的单连通覆盖群*Spin*(*n*)的情况区分开, 在*Spin*(*n*)的情况下, 单极子是不存在 的. 我们会在下一节的末尾回到这一点.

另外一个例子:我们在上一节看到,在带有n个轻夸克的量子色动力学中,斯格明子对 应 $\pi_3(SU(n))$,而根据附录,这个群是Z.因此,这些斯格明子会携带整数值的守恒量子数 ν ,这 个量子数可能等价于重子数.类似地,回忆上一节,在基于单纯规范群G的规范理论中,瞬子对 应 $\pi_3(G)$ 的元素,而根据附录,这个群是Z,所以同斯格明子一样,瞬子也会携带整数值守恒量子 数 ν ,这个量子数也被称为缠绕数.在23.5节,我们将会看到如何将这个量子数表示成规范场的定 域泛函.

23.3 单极子

作为拓扑不平庸场构形的一个详细例子,我们来考察't Hooft和Polyakov的单极子,^[2] 以及 它的推广.在23.1节我们看到,当单连通规范群G自发破缺到电磁学的U(1)群时,我们可以按照
群 $\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$ 中的元素对有限能量的场构形进行分类. (本节末尾将会考察单连通Lie群以外的情况.) 根据23.2节所讨论的同伦群的物理解释,这意味着这些构形拥有加性守恒量子数. 但我们仍需证明这些稳定场构形中的任何一个确实存在,并要给它们的拓扑量子数一个物理解释.

作为一个范例,我们来考察这样的理论(例如Georgi-Glashow电弱模型^[12]),它的规范群 是SU(2),且这个规范群被标量场φ_n的SU(2)三重态的真空期望值自发破缺了.(在本节末尾我们 会解释为什么在这一情况下称规范群是SU(2)而不是SO(3).)在闵可夫斯基时空中,标量场和规 范场的拉格朗日密度取成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{n\mu\nu}F_n^{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\phi_n D^\mu\phi_n - V(\phi_n\phi_n), \qquad (23.3.1)$$

其中

$$F_{n\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{n\nu} - \partial_{\nu}A_{n\mu} + e\,\epsilon_{nml}A_{m\mu}A_{l\nu}\,, \qquad (23.3.2)$$

$$D_{\mu}\phi_n \equiv \partial_{\mu}\phi_n + e\,\epsilon_{nml}A_{m\mu}\phi_l\,,\qquad(23.3.3)$$

并且函数 $V(\phi_n\phi_n)$ 假定是正定的,它在 $\sqrt{\phi_n\phi_n}$ 的一个非零值 $\langle \phi \rangle$ (取正值)处为零.(在关于单极子的大部分工作中,V取成四次多项式 $\lambda(\phi_n\phi_n - \langle \phi \rangle^2)^2$,其中 $\lambda > 0$,但是我们在这里不做这个假设.)方程(23.3.1)描述的理论有一个 $A_{n\mu} = 0$ 的时空无关真空解,在这个解中, $\phi_n\phi_n = \langle \phi \rangle^2$ 的真空期望值 ϕ_n 将SU(2)破缺至它的U(1)子群,而这个U(1)群可以视为电动力学的规范群.然而,在这里,我们要处在时性规范下,即 $A_n^0 = 0$ 但 $A_n^i \neq 0$,寻找那些与时间无关但拓扑不平庸的非齐次解.在这一情况下,拉格朗日密度是负的势能密度 \mathcal{H} ,它是

$$\mathscr{H} = \frac{1}{4}F_{nij}^2 + \frac{1}{2}(D_i\phi_n)^2 + V(\phi), \qquad (23.3.4)$$

其中平方包含对写出指标的收缩.由于(23.3.4)中的每一项都是正定的,在有限能量的场构形中, 每一个项的积分都必须分别收敛.

特别地,为了使 $V(\phi_n\phi_n)$ 的积分收敛,矢量 ϕ_n 在无限远处必须有固定长度 $\langle \phi \rangle$,所以每个有限能量的构形定义从2-球面*S*到 ϕ_n 的2-球面的光滑映射,其中*S*是包裹单极子构形的大球面,而 ϕ_n 的2-球面由 $\phi_n\phi_n = \langle \phi \rangle^2$ 给出.随着**x**跑遍*S*, ϕ_n 有可能跑遍球面 $\phi \phi = \langle \phi \rangle^2$ 任意正整数次*N*,这时要么雅克比行列式Det($\partial x/\partial \phi$)为正,在这一情况下我们称缠绕数为*N*,要么雅克比行列式为负,在这一情况下我们称缠绕数为–*N*.

为了看到缠绕数与磁单极矩有什么样的关系,我们先来考察在这个理论中被看成"磁"场的是什么.无论场构形是什么,在任何给定的有限区域内,我们总可以引入一个规范使得标量场 ϕ_n 指向某个确定的方向,例如3-方向,这使得这个区域中,与SU(2)的未破缺U(1)子群相对应的规范场是 A_{3i} .在这一情况下,'t Hooft^[2]找到了会退化成通常的电磁场张量 $\partial_{\mu}A_{3\nu} - \partial_{\nu}A_{3\mu}$ 的规范不变张量 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$:

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} \equiv F_{n\mu\nu}\hat{\phi}_n - \frac{1}{e}\epsilon_{nml}\,\hat{\phi}_n\,D_\mu\hat{\phi}_m\,D_\nu\hat{\phi}_l\,,\qquad(23.3.5)$$

其中 $\hat{\phi}_n \equiv \phi_n / \sqrt{\phi_m \phi_m}$. 为了验证 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 在 $\hat{\phi}_n$ 为常数的规范下是普通的电磁场场强张量(并为了以后的一些目的),我们使用方程(23.3.2)和(23.3.3)以及恒等式 $\epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$ 将 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 重写成如下形式^[13]

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}(\hat{\phi}_n A_{n\nu}) - \partial_{\nu}(\hat{\phi}_n A_{n\nu}) - \frac{1}{e} \epsilon_{nml} \,\hat{\phi}_n \,\partial_{\mu} \hat{\phi}_m \,\partial_{\nu} \hat{\phi}_l \,. \tag{23.3.6}$$

因此, 在 $\hat{\phi}_n$ 是3-方向上的单位矢量的规范中, 正如所承诺的, 我们有

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{3\nu} - \partial_{\nu}A_{3\mu}$$

任何定域场构形的磁单极矩g定义成1/4π乘以流经包裹构形的大闭合曲面 𝒴的磁通量:

$$4\pi g \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_{\mathscr{S}} \mathscr{F}_{ij} \,\mathrm{d}^2 S_k \,. \tag{23.3.7}$$

对于 *ℱ_{ii}*, 方程(23.3.6)的前两项是导出, 因此对积分(23.3.7)无贡献, 这使得

$$g = -\frac{1}{8\pi e} \epsilon_{ijk} \epsilon_{nml} \int_{\mathscr{S}} \hat{\phi}_n \,\partial_i \hat{\phi}_m \,\partial_j \hat{\phi}_l \,\mathrm{d}^2 S_k \,. \tag{23.3.8}$$

它有成为拓扑不变量的重要性质:在必要的地方分部积分,我们看到,在 $\hat{\phi}_n$ 的无限小变 $\partial \delta \hat{\phi}_n \nabla$, *g*的变换是

$$\delta g = -\frac{3}{8\pi e} \epsilon_{ijk} \epsilon_{nml} \int_{\mathscr{S}} \delta \hat{\phi}_n \, \partial_i \hat{\phi}_m \, \partial_j \hat{\phi}_l \, \mathrm{d}^2 S_k \, .$$

但是,由于 $\hat{\phi}$ 是单位矢量, $\delta\hat{\phi}$ 以及 $\partial_i\hat{\phi}$ 和 $\partial_i\hat{\phi}$ 都处在与 $\hat{\phi}$ 垂直的平面中,所以

$$\epsilon_{nml}\,\delta\hat{\phi}_n\,\partial_i\hat{\phi}_m\,\partial_j\hat{\phi}_l=0\,,$$

因此 $\delta g = 0.$ (23.3.8)与称为克罗内克指标的拓扑不变量有关.

由于g是面积分,它是加性的:对于任意两个相距甚远的定域构形,用来计算g的曲面 \mathscr{S} 可以取成一对球面,每个球面包裹一个构形,并通过一根细管连接,所以整个系统的g值就是单个定域构形的g1值和g2值之和.更进一步,既然g是拓扑不变量,对于任何场构形,如果它是两个磁单极矩分别为g1和g2光滑融合形成的,对于该场构形的磁单极矩g,我们就有 $g = g_1 + g_2$.由此得出g必须正比于缠绕数.Arafune,Freund和Goebel^[13]利用一般缠绕数的公式(23.3.8)计算了g以及比例系数.这里,我们仅通过研究't Hooft-Polyakov单极子来计算系数,^[2]在这个情况下,场的缠绕数为1.

正如我们在上一节所看的, $\pi_2(SU(2)/U(1))$ 的"等价"元(与单位元区分开), 即对应Z中的元素"1"的那个元素, 组成它的构形将无穷远处的2-球面*S*一映射到由 $\hat{\phi}_n$ 所描述的球面, 并且只覆盖一次(雅克比行列式为正). 作为这个同伦类的一个代表元, 我们可以取无穷远处的 ϕ_n 与**x**同方向的构形. 为了构建这个构形, 我们在 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ 和**x**的联合旋转下附加对称性, 并附加宇称守恒, 然后做出拟设:

$$\phi_n = \hat{x}_n \langle \phi \rangle F(r) , \qquad (23.3.9)$$

$$A_{ni} = \frac{\epsilon_{nil}\hat{x}_l}{er}G(r) . \qquad (23.3.10)$$

这个场构形和超导体中涡旋项的场构形之间存在一个非常重要的相似性. 对于涡旋线中的Goldstone玻色场, 21.6节中发现的解是 $\phi = \pm \ell \varphi/2e$, 这个解表明, 尽管规范不变性和旋转不变性都自发破缺了, 但是在整体规范变换 $\phi \rightarrow \phi + \Lambda$ 和刚性旋转 $\varphi \rightarrow \varphi \pm 2e\Lambda/\ell$ 的组合变换下, 涡旋线的解是不变的. 类似地, 形式为(23.3.9)—(23.3.10)的磁单极子解在旋转变换或规范变换下不是不变的, 但是在3维空间刚性旋转变换和与之相等的整体*SO*(3)规范变换的组合变换下, 这个解是不变的.

正如前面所提及的,为了使 $V(\phi_n\phi_n)$ 的积分收敛, $\phi_n\phi_n$ 在 $r \to \infty$ 时必须趋于 $\langle \phi \rangle^2$,所以在这一极限下, $F(r) \to 1$.为了推导G(r)的极限行为,注意到到标量场的协变导数是

$$D_i\phi_n = \pm \langle \phi \rangle \left[\left(1 - G(r) \right) \left(\delta_{ni} - \hat{x}_n \hat{x}_i \right) \frac{F(r)}{r} + \hat{x}_n \hat{x}_i F'(r) \right], \qquad (23.3.11)$$

所以哈密顿密度中的标量项是

$$\frac{1}{2}(D_i\phi_n)^2 = \langle \phi \rangle^2 \left[\frac{F^2(1-G)^2}{r^2} + \frac{F'^2}{2} \right] .$$
(23.3.12)

为使其积分有限, 在 $r \to \infty$ 时必须有 $G(r) \to 1$ 和 $F'(r) \to 0$. 最后, 场强(23.3.2)是

$$F_{nij} = \frac{\epsilon_{ijk}}{e} \left[-\frac{1}{r} G'(r) \left(\delta_{nk} - \hat{x}_n \hat{x}_k \right) - \frac{1}{r^2} \left(2G(r) - G^2(r) \right) \hat{x}_n \hat{x}_k \right],$$
(23.3.13)

所以,哈密顿量中的Yang-Mills项是

$$\frac{1}{4}(F_{nij})^2 = \frac{1}{e^2} \left[\frac{G'^2}{r^2} + \frac{(2G - G^2)^2}{2r^4} \right] .$$
(23.3.14)

只要G(r)在 $r \to \infty$ 时以足够快的速率趋于零,那么它在距离很远处的积分就是收敛的.

我们可以用这些结果计算这个构形的磁单极矩. 方程(23.3.13), 再加上极限 $G(\infty) = 1$ 和 $G'(\infty) = 0$, 表明在 $r \to \infty$ 时, 我们有

$$F_{nij} \to -\frac{\epsilon_{ijk}\hat{x}_k\hat{x}_n}{er^2} \,. \tag{23.3.15}$$

既然 $D_i\phi_n$ 在 $r \to \infty$ 时快速为零,在 $r \to \infty$ 时,场强张量的磁场部分有方程(23.3.5)的第一项给定, 所以在距离很大时,磁场变成

$$B_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathscr{F}_{jk} \to \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \hat{\phi}_n F_{njk} \to -\frac{\hat{x}_i}{er^2} \,. \tag{23.3.16}$$

因此这个构形的磁单极矩是g = -1/e.根据前面的一般讨论,缠绕数为 ν 的构形对应于Z中的元素 ν ,那么它的磁矩是

$$g_{\nu} = -\nu/e$$
. (23.3.17)

为了找到使得哈密顿密度(23.3.4)的积分极小的稳定场构形,我们需要进行细致的数值计算. 然而在一个极限情况下,解析计算也是可能的.为了看到这点,我们先来推导磁单极矩给定为g的 单极子能量的普遍下界,这个下界是Bogomol'nyi给出的.^[10]注意到(23.3.4)可以写成

$$\mathscr{H} = \frac{1}{4} \left(F_{nij} \mp \epsilon_{ijk} D_k \phi_n \right)^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \phi_n + V(\phi_n \phi_n) \,. \tag{23.3.18}$$

利用Bianchi恒等式(15.3.9), 第二项可以写成

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \phi_n = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} D_k \Big(F_{nij} \phi_n \Big) = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_k \Big(F_{nij} \phi_n \Big) ,$$

所以它的积分就由磁单极矩g给定

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3 x \, F_{nij} D_k \phi_n = \pm \langle \phi \rangle \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \pm 4\pi \langle \phi \rangle g \,.$$

既然光中的其它项都是正的,对于磁单极矩为g的构形,它的能量就有一个普遍下界

$$E = \int \mathrm{d}^3 x \,\mathscr{H} \ge 4\pi \langle \phi \rangle |g| \,. \tag{23.3.19}$$

当 $g = \pm 1/e$ 时,这给出能量 $E \ge 4\pi \langle \phi \rangle / e$,而量子涨落所产生的修正最多是 $\langle \phi \rangle$ 阶的,所以当耦合常数e很小时,它要远大于量子涨落给出的修正.这是为什么我们可以严格地将这样的经典构形取做微扰展开领头项的原因.

现在,对于磁单极矩给定的情况,为了能量最小,一个很吸引人的做法是取方程(23.3.18)中的 第一项为零,这使得

$$F_{nij} = \pm \epsilon_{ijk} D_k \phi_n \,, \tag{23.3.20}$$

然而, 它一般不会给出能量稳定的场构形. 能量相对标量场的变分稳定的条件是场方程

$$D_k D_k \phi_n = 2\phi_n V'(\phi_n \phi_n) , \qquad (23.3.21)$$

而方程(23.3.20)加上Bianchi恒等式(15.3.9)将会给出 $D_k D_k \phi_n = 0$.这个讨论表明,在 $V(\phi_n \phi_n)$ 非常小的特殊情况下,通过附加条件(23.3.20),构形的能量有可能非常接近下界(23.3.19),因而使得磁单极矩给定的构形能量最小.(当V是四次多项式 $\lambda(\phi_n \phi_n - \langle \phi \rangle^2)^2$ 时,V非常小的假定意味着 $\lambda \ll e^2$,I型超导体中就是这样.)Bogomol'nyi用这种方法研究了这样的稳定构形.^[10]比这更早,Prasad和Sommerfeld^[14]没有直接使用方程(23.3.20)而是用所谓的*BPS*单极子发现了这样的构形.

Bogomol'nyi条件(23.3.20)给出了F(r)和G(r)的一阶微分方程,与直接要求能量稳定而给出的 二阶微分方程相比,解这两个方程要简单得多.利用方程(23.3.11)和(23.3.13),方程(23.3.20)中正 比于 $\epsilon_{ijk}[\delta_{kn} - \hat{x}_k \hat{x}_n]$ 和 $\epsilon_{ijk} \hat{x}_k \hat{x}_n$ 的项分别给出微分方程

$$e\langle\phi\rangle F(1-G) = G', \qquad (23.3.22)$$

$$e\langle\phi\rangle r^2 F' = G(2-G)$$
. (23.3.23)

加上 $r \to \infty$ 时的边界条件 $F(r) \to 1$ 和 $G(r) \to 1$,这些方程有解

$$F = \coth \rho - \frac{1}{\rho}, \qquad G = 1 - \frac{\rho}{\sinh \rho}, \qquad (23.3.24)$$

其中 $\rho \equiv e\langle \phi \rangle r$. 特别地, 注意到方程(23.3.9)和(23.3.24)给出的场 ϕ_n 在 $r \rightarrow 0$ 时为零, 所以, 正 如23.1节中所评述的那样, *SU*(2)对称性在单极子的中心恢复了.

现在我们回到势V是任意强度的情况.对于't Hooft-Polyakov单极子,由于不存在拓扑量子数 更小的构形,它不能衰变,所以这样的构形是稳定的.磁单极矩高于't Hooft-Polyakov单极子的 构形一般是不稳定的.^[10]还存在一些既有磁单极矩又有电荷的有趣构形,这样的构形被称为双荷 子(*dyons*).^[15]

有另外一种方法来理解't Hooft-Polyakov磁单极矩的值1/e,这个方法要回到Dirac关于磁 单极子的原始工作中.^[16]正如之前所提及的,我们可以做一个规范变换 $\phi_n \rightarrow R_{nm}(\mathbf{x})\phi_m$ 来旋 转 ϕ_n ,让它指向一个固定方向 $\hat{\mathbf{v}}$,例如3-方向.这样场强 $B_{nk} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{nij}$ 就被变换到 $R_{nm}R_{mk}$,这 在 $r \rightarrow \infty$ 时趋于 $\hat{\mathbf{v}}_n \hat{x}_k / er^2$,所以这里我们不必将其投影到定域未破缺对称性方向.我们为这些便 利所付出的代价是这个规范变换是奇异的;将x方向的矢量旋转到某个固定方向v的R是

$$R(\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{v}}) = 1 - \left(1 - \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}}\right) \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}}^{T} + \hat{\mathbf{v}} \left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}\right)^{T} + \left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}\right) \hat{\mathbf{v}}^{T} - \frac{\left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}\right) \left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}\right)^{T}}{1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}}$$
(23.3.25)

它在 $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{v}}$ 处是奇异的. 这个R不是唯一的;例如,我们可以先做旋转 $R(\hat{\mathbf{x}}, -\hat{\mathbf{v}})$ 把 $\hat{\mathbf{x}}$ 转至— $\hat{\mathbf{v}}$ 方向, 再接上一个旋转轴垂直于 $\hat{\mathbf{v}}$ 且角度为180°的固定旋转,但是它会在 $\hat{\mathbf{x}} = +\hat{\mathbf{v}}$ 处奇异. 为了避免这个 奇异性,我们在不同的区域采用不同的规范;例如, $\hat{\mathbf{v}}$ 处在3-方向时,我们可以对0 < θ < θ_0 使用 在 $\theta = \pi$ 处奇异的规范,而对 $\theta_0 < \theta < \pi$ 使用在 $\theta = 0$ 处奇异的规范,其中 θ_0 是满足0 < $\theta_0 < \pi$ 的任 意角度,通常取成 $\pi/2$. 除了 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$,所有其它地方的磁场在远距离处给定为 $B \rightarrow g\hat{\mathbf{x}}/r^2$, 其中g是磁单极强度. 这可以写成一个矢势的旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$,而这个矢势的非零分量只有方位角 方向 φ . 当0 < $\theta < \theta_0$ 时,我们必须取 $A_{\varphi} = g(1 - \cos\theta)/r\sin\theta$,它仅在 $\theta = \pi$ 处是奇异的,而 当 $\theta_0 < \theta < \pi$ 时,我们必须取 $A_{\varphi} = -g(1 + \cos\theta)/r\sin\theta$,它仅在 $\theta = 0$ 处是奇异的.两个矢势的差 是一个梯度 $\nabla \Lambda \hat{\mathbf{n}} \Lambda = 2g\varphi$,这个梯度显然不会影响0 < $\theta < \pi$ 的磁场,但是它能影响带荷场的动力 学.对于电荷为q的场, $\Lambda = 2g\varphi$ 的规范变换将会让这个场变换因子exp(2iqg φ),除非2qg是整数,否 则这不是单值的.这是Dirac的量子化条件;任何单极矩为g的磁单极子的存在将会要求所有电荷 是(2g)⁻¹的整数倍.对于't Hooft-Polyakov单极子,由于在这里g = 1/e,这个条件是自动满足的, 并且Georgi-Glashow模型中的所有电荷将是e/2的整数倍.

由于中性流的发现, 就作为弱作用和电磁作用的理论而言, Georgi-Glashow模型被排除了, 但 是在其它理论中, 如果单连通群G没有自发破缺到U(1), 而是某个子群 $H' \times U(1)$, 其中H'单连通, 我们依旧会期待磁单极子的出现. (根据本章的附录B, 对于单连通群G, 我们有 $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$, 对于 $H = H' \times U(1)$, 这等于 $\pi_1(H') \times \pi_1(U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$.) 对于电弱理论, 由于规范 群 $SU(2) \times U(1)$ 不是单连通的, 所以在规范群的自发破缺中不会产生单极子. (关于这点, 下面 有更多的论述.) 然而, 对于强相互作用和电弱相互作用的统一理论, 当它的单连通规范群G, 例如 $SU(4) \times SU(4)$ 或SU(5)或Spin(10), 破缺到标准模型的规范群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 时, 我 们确实会发现单极子. (参看21.5节.) 在这一情况下, 与这个对称性破缺产生的矢量玻色子质 量 $M \approx 10^{15}$ - 10^{16} GeV相比, 单极子的质量预期要比M大一个规范耦合常数因子的负二次方. 当宇 宙经历从G自发破缺到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的相比时, 这时宇宙的温度T是M阶的, 这样的单极 子就会产生.

这给一些宇宙学模型提出了问题.^[17]由于初始奇点的存在,光子传播有一个最大距离,这称为视界距离,在相变之前,距离大于视界距离的标量场之间必须是无关联的.在标准宇宙学理论^[18]中,早期时刻t处的视界距离的量级是t $\approx (G_N T^4)^{-1/2}$ (其中 $G_N \simeq (10^{19} \, {\rm GeV})^{-2}$ 是牛顿常数),所以这一时刻产生的单极子,它的数密度在量级上是 $t^{-3} \approx (G_N M^4)^{3/2}$,这比 $T \approx M$ 处的光子密度 M^3 要小一个阶为 $(G_N M^2)^{3/2}$ 的因子.当 $M \approx 10^{15} \, {\rm GeV}$ 时,这个因子的量级是 10^{-12} .如果磁单极子找不到另一个来湮灭,那么这个因子会粗略地保持到现在,但是现在每个核子中至少有 10^9 个微波背景光子,这意味着每个核子中至少有 10^{-3} 个单极子,与我们观测到的完全不符.这个潜在的矛盾是提出暴涨宇宙模型的契机之一,^[19]在这个模型中,宇宙存在一段指数暴涨的时期.如果它在单极子产生之前就发生了,这将极大地扩展视界,如果它在单极子产生之后发生(但在再热期之前),这将极大地稀释单极子密度.

任何一类单极子的发现都将会为一些标志性现象的观测创造机会,其中包含分数费米子数的

费米子-单极子构形的存在.^[20] 以及费米子-单极子散射中重子数守恒的破坏.^[21]

* * *

在上面的讨论中,我们仅考察了单连通规范群G自发破缺附带的单极子.这产生了一个问题.对于每个Lie群G,无论是否单连通,总存在一个Lie代数与G相同的单连通群G,这样的群被称为G的覆盖群.(关于例子,可参看2.7节.)相比于覆盖群,任何非单连通群的表示要少一些(例如,双连通群SO(n)只有标量表示,矢量标量和张量标量,而它们的覆盖群Spin(n)同时还有旋量表示).如何一个理论碰巧不包含属于覆盖群额外表示的场,那么我们是否可以自由地决定理论规范群是非单连通群G还是它的覆盖群G?特别地,可能单极子的选单是否依赖于理论是只包含按照非单连通群G的表示的变换的场,还是只构成覆盖群表示的额外场?例如,在原始的Georgi-Glshow模型中^[12],唯一的标量场属于SO(3)的一个表示,3-矢,但是那里还存在属于覆盖群Spin(3) = SU(2)的旋量表示的费米子.如果我们加入属于SU(2)旋量表示的标量场,磁单极矩的允许值是否会改变?如果我们移去费米子,它是否会改变?

答案是,可能单极子的选单不会依赖于我们称规范群是非单连通群G或是它的覆盖群G,因此, 当我们增加或者移去属于G的表示但不属于G的表示的场时,可能单极子的选单不受影响.正如我 们在23.1节看到的,一般而言,单极类的拓扑稳定构形是根据 $\pi_2(G/H)$ 的元素进行分类的.根据本 章附录B所引用的结果,构成这个同伦群的元素是 $\pi_1(H)$ 中的一些元素,这些元素在H嵌入到G中 时与 $\pi_1(G)$ 的平庸元相对应.但是,如果我们将G换成它的覆盖群G,由于当H嵌入到G中时,H中 的一些圈不会回到基点,所以我们还得将H换成另一个子群H'.这些圈就是H嵌入到G中后不会 变的平庸的圈,所以 $\pi_2(G/H) = \pi_1(H')$,因此只要考察单极子,我们就可以称规范群是G而不是G.

例如,只要标量场被考虑在内,Georgi-Glashow模型的规范群就可以视为双连通SO(3)而非它的单连通覆盖群SU(2).这样,未破缺子群就是SO(2),其中我们视相差360°旋转的两个变换是等价的.因此, $\pi_1((SO(2))$ 中包含从单位元扩展到360°旋转的圈,当SO(3)嵌入到SU(2)中时,这些不是圈.但是, $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ 并非与 $\pi_1(SO(2))$ 相同,而是要排除掉那些当SO(3)嵌入到SU(2)中时同伦不平庸的圈,而这正好是从单位元扩展到360°旋转的圈,所以 $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ 是SU(2)的U(1)子群,这就好像我们在开头就将规范群取成SU(2).

总将携带任何半单规范代数的规范群G视为单连通覆盖群将是方便的,这使得我们可以使 用_{π2}(*G*/*H*) = π₁(*H*)的简单结果. 正如我们刚刚看到的, *H*的连通性被它在*G*中的嵌入所决定, 或 者更精细些, 由*H*的Lie代数在*G*的Lie代数中的嵌入所决定. 例如, *SU*(3)规范代数可以自发破缺 到*SU*(2)子代数,这时*SU*(3)的定义表示按照一个二重态加一个单态那样变换,也可以自发破缺 到*SO*(3)子代数,这时*SU*(3)的定义表示按照3-矢变换. 在第一种情况下,我们并没有将未破缺子 群视为*SO*(3)的选项;由于π₁(*SU*(2)) = 0,所以这里没有单极子. 在第二种情况下,未破缺子群必 须视为*SO*(3)而不是*SU*(2),所以理论中确实还有单极类的构成,这些构形按照π₁(*SO*(3)) = *Z*₂中 的元素进行分类. 我们在拉格朗日量中引入各种各样的场可能会对未破缺代数*H*的特性以及它在 规范代数*G*中的嵌入造成动力学上的影响,然而,一旦*H*的代数以及它在*G*的代数中的嵌入确定了, 单极子的选单完全不受理论中所含的各种场的影响.

特别地,给出Dirac量子化条件的讨论表明,在任何理论中,只要Lie代数G自发破缺到包含电荷算符的子代数,在G的覆盖群的表示中会出现最小电荷,无论理论中是否真的存在携带这一电荷的粒子,允许的磁单极矩是这个电荷倒数的整数倍.如果G的代数自身包含一个U(1)生成元,那么我们必须考察这个U(1)的覆盖群,这个覆盖群是沿着实轴平移的非紧群.如果这个U(1)生成元作

为电荷算符中的一项而出现,就像标准电弱理论中那样,那么在覆盖群的表示中就不存在最小电荷,因此就没有单极子.

23.4 Cartan-Maurer积分不变量

在理解各种紧流形的拓扑时, 通常会存在可以写成流形上积分的拓扑不变量, 这会我们的理解有很大帮助. 在下一节我们对瞬子的讨论中, 这是非常重要的, 并且在19.8节和22.7节, 它已经用于Wess-Zumino-Witten项的研究.

考察奇数维d的任意紧流形*S*到流形*M*的映射,其中*S*上有坐标 $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d$,而*M*是Det $g \neq 0$ 的矩阵 $g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d)$ 的流形.(对于我们这里所考察的应用,*S*通常是球面 S_d ,而g是某个表示下Lie群G的元素.)我们定义 $g(\theta)$ 的泛函,它通常称为*Cartan-Maurer*形式:

$$\mathscr{I}[g] = \int d\theta^1 d\theta^2 \cdots d\theta^d \, \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \\ \times \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \cdots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\},$$
(23.4.1)

其中 $\epsilon^{i_1i_2\cdots i_d}$ 是 $\epsilon^{12\cdots d} = 1$ 的全反对称量. 从 $\epsilon^{i_1i_2\cdots i_d} = -(-1)^d \epsilon^{i_2i_d\cdots i_1}$ 这个性质, 我们看到当*S*是偶数维时, $\mathscr{I}[g]$ 为零, 所以我们在这里将自身限制在d是奇数的情况. 这个量的作用来源于它的几个显著性质.

首先,这个积分独立于用来参数化流形S的坐标性.从e^{i1i2…ia}是逆变张量密度,即

$$\epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \frac{\partial \theta'^{j_1}}{\partial \theta^{i_1}} \frac{\partial \theta'^{j_2}}{\partial \theta^{i_2}} \cdots \frac{\partial \theta'^{j_d}}{\partial \theta^{i_d}} = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right) \epsilon^{j_1 j_2 \cdots j_d}$$

我们可以很显然地看到这一点.

其次, 积分(23.4.1)在映射 $\mathscr{S} \mapsto \mathscr{M}$ 的小形变下也是不变的.利用迹的性质, 我们看到在函数 $g(\theta)$ 的无限小变分 $g \to g + \delta g$ 下, (23.4.1)的每个 $g^{-1}\partial g/\partial \theta^i$ 因子的变分对 $\mathscr{I}[g]$ 的变分有着相同的贡献:

$$\delta \mathscr{I}[g] = d \int d\theta^1 d\theta^2 \cdots d\theta^d \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \\ \times \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \cdots \delta \left(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right) \right\}.$$

现在, 迹中的最后一个因子是

$$\begin{split} \delta \bigg(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \bigg) &= -g^{-1}(\theta) \, \delta g(\theta) \, g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} + g^{-1}(\theta) \frac{\partial \delta g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \\ &= g^{-1}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^{i_d}} \bigg(\delta g(\theta) g^{-1}(\theta) \bigg) g(\theta) \, . \end{split}$$

当我们分部积分时,由于 $\epsilon^{i_1i_2\cdots i_d}$ 是全反对称的,所以导数 $\partial/\partial\theta^{i_d}$ 作用在偏导数 $\partial g/\partial\theta^{i_n}$ 上不给出贡献. $\partial/\partial\theta^{i_d}$ 作用在 $g^{-1}(\theta)$ 上给出剩下的d - 1个项,这些项除了一个交替变化的符号外全都相等,既然它们的个数是偶数,所以和为零.

最后,我们特定到*S*是球面 S_d 的情况.由于 $\mathscr{I}[g]$ 在 $g(\theta)$ 的微小变分下不变, $\mathscr{I}[g]$ 可以认为只 是 $g(\theta)$ 所属同伦类c的函数 $\mathscr{I}(c)$.积分 $\mathscr{I}(c)$ (严格地讲, exp{ $\mathscr{I}(c)$ })构成了同伦群 $\pi_d(\mathscr{M})$ 的一个表 示,也就是说

$$\mathscr{I}(c_a \times c_b) = \mathscr{I}(c_a) + \mathscr{I}(c_b) .$$
(23.4.2)

 $(如果g_a(\theta)和g_b(\theta)分别是同伦类c_a和c_b中的元素,那么构成同伦类c_a × c_b的映射就同伦等价于$

$$g_{ab}(\theta) = \begin{cases} g_a(2\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_d) & 0 \le \theta_1 \le \frac{1}{2} \\ g_b(2\theta_1 - 1, \theta_2 \cdots \theta_d) & \frac{1}{2} \le \theta_1 \le 1 \end{cases}$$

 $\mathscr{I}[g_{ab}]$ 的积分在 $0 \le \theta_1 \le 1/2$ 的半球上的那部分和在 $1/2 \le \theta_1 \le 1$ 半球上的那部分可以分别通过做 变量代换 $\theta'_1 = 2\theta_1 \pi \theta'_1 = 2\theta_1 - 1$ 实现, 而这给出(23.4.2)中的 $\mathscr{I}(c_a)$ 项和 $\mathscr{I}(c_b)$ 项.)

特别地,这告诉我们同伦论 $e, c, c \times c$ 等,以及 $c^{-1}, c^{-1} \times c^{-1}$ 等有

$$\mathscr{I}(c^n) = n\mathscr{I}(c) . \tag{23.4.3}$$

如果对于某个 $c, \mathscr{I}(c) \neq 0$,那么这些不变量都是不同的,所以同伦类 c^n 都是不同的,因而构成 了 $\pi_d(\mathscr{M})$ 的子群Z.这进一步解释了为什么本章附录B中给出的偶数维同伦群大小和奇数维同 伦群大小之间有那么大的差异.例如, $\pi_1(U(1)) = Z$,对于所有单Lie群 $G, \pi_3(G) = Z$,对于所有 的 $n \geq 3, \pi_5(SU(n)) = Z$,而对所有的Lie群 $G, \pi_2(G) = 0 \pm \pi_4(G)$ 是有限的.

作为一个 $\mathscr{I}(c) \neq 0$ 的简单例子,考察同伦群 $\pi_1(U(1))$,它与上一节开头用作例子的 $\pi_1(S_1)$ 是相同的.任何 $S_1 \mapsto U(1)$ 的映射可以由 ν 表征,它是随着坐标 θ 在 S_1 上走一圈,U(1)元素的相位以顺时 针方向沿着 S_1 环绕的次数减去以相反方向沿着 S_1 环绕的次数,当且仅当两个映射有相同的 ν 时,它 们才是同伦等价的.第 ν 等价类包含映射 $g_{\nu}(\theta) = \exp(2i\nu\pi\theta)$,其中 $0 \leq \theta \leq 1$,对于这个映射

$$\mathscr{I}[g_{\nu}] = \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, \exp(-2\mathrm{i}\nu\pi\theta) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \exp(2\mathrm{i}\nu\pi\theta) = 2\mathrm{i}\nu\pi \,,$$

因此证明了 $\pi_1(U(1)) = Z$.

在不那么简单的情况中计算 $\mathscr{I}(g)$ 时, 一个辅助手段是假定我们可以将流形 \mathscr{M} 连续地变形到 维度为d的Lie群H. 先进行一个参量为 θ 的H变换, 再进行一个参量为 φ 的H变换, 其结果也是一 个H变换, 设它的参量是 $\theta'(\theta, \varphi)$. 按照 $g(\theta)$ 的矩阵表示, 这写成

$$g(\varphi)g(\theta) = g(\theta'(\theta,\varphi))$$
.

固定 φ 对 θ' 微分, 然后左乘这个方程的逆, 这给出

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta'^j} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} = g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^j} \,.$$

因此, $\mathscr{I}[g]$ 在点 θ' 处的被积函数是

$$\epsilon^{j_1 j_2 \cdots j_d} \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_1}} g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_2}} \cdots g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_d}} \right\}$$
$$= \operatorname{Det} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right) \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \cdots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\}$$

现在,每个Lie群H有度规 $\gamma_{ij}(\theta)$ (不一定唯一),它是形式不变的,也就是说

$$\gamma_{ij}(\theta') \equiv \frac{\partial \theta k}{\partial \theta'^i} \frac{\partial \theta^\ell}{\partial \theta'^j} \gamma_{k\ell}(\theta) . \qquad (23.4.4)$$

例如,我们可以取

$$\gamma_{ij}(\theta) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^j} \right\}.$$
(23.4.5)

对于 $\gamma_{ij}(\theta)$ 的每个选择,方程(23.4.4)的行列式给出

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{Det}\gamma(\theta')}{\operatorname{Det}\gamma(\theta)}}\,.$$

通过将方程(23.4.1)中的坐标θ换成θ',我们发现

$$\mathscr{I}[g] = \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \cdots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} \gamma(\theta)}} \int \mathrm{d}^d \theta' \sqrt{\operatorname{Det} \gamma(\theta')} \,.$$
(23.4.6)

既然第二个*H*变换的参量 φ 是任意的,我们可以认为 θ 和 θ' 是独立变量,并在任意的 θ 值处计 算(23.4.6)的右边,例如 $\theta^i = 0$.对生成元 t_i 和坐标 θ^i 归一化,使得 $\theta \to 0$ 时,

$$g(\theta) \to 1 + 2\mathrm{i}\theta^i t_i \,, \tag{23.4.7}$$

这种归一化将会方便我们之后的讨论.在这一情况下,方程(23.4.6)写成

$$\mathscr{I}[g] = (2i)^d \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \operatorname{Tr} \{ t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_d} \} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} \gamma(0)}} \int \mathrm{d}^d \theta' \sqrt{\operatorname{Det} \gamma(\theta')} .$$
(23.4.8)

我们特别感兴趣的是d = 3的情况.Bott^[22]证明了,对于任意单Lie群G,所有连续映射 $S_3 \mapsto G$ 可以连续变形到 S_3 到G的一个"标准"SU(2)子群的映射.(当G = SU(n)时,这个标准SU(2)子群 就是那个仅作用在SU(n)定义表示的前两个分量上的SU(2)子群,并非SU(n)的所有SU(2)子群都 等于这一个SU(2)子群.)正如2.7节中所评述的,在2×2表示中,SU(2)的一般元素可以写成

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_4 + i\theta_3 & \theta_2 + i\theta_1 \\ -\theta_2 + i\theta_1 & \theta_4 - i\theta_3 \end{pmatrix} = \theta_4 + 2i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{t} , \qquad (23.4.9)$$

其中,同往常一样,

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, $t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

而 θ_4 和 θ 是实量, 且(θ_4)² = 1 - θ^2 . (注意, 方程(23.4.9)与归一化条件(23.4.7)是一致的.) 直接的计 算表明度规(23.4.5)是

$$\gamma_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \frac{\theta_i \theta_j}{1 - \theta^2}, \qquad (23.4.10)$$

这使得

$$\operatorname{Det} \gamma(\theta) = \frac{1}{1 - \theta^2} \,. \tag{23.4.11}$$

因此方程(23.4.8)在这里变成

$$\mathscr{I}[g] = -8i\epsilon^{ijk} \operatorname{Tr} \{t_i t_j t_k\} \int \frac{\mathrm{d}^3\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \, .$$

利用 $4t_i t_j = \delta_{ij} + 2i\epsilon^{ijl} t_\ell$ 和 $Tr\{t_\ell t_k\} = \frac{1}{2}\delta_{\ell k}$, 我们看到

$$8\epsilon^{ijk} \operatorname{Tr} \{t_i t_j t_k\} = 2i\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} = 12i.$$

另外,对于"全同"映射g1,这个积分要在单位球的内部跑两次(因为θ4可正可负),并给出

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = 2 \int_0^1 \frac{4\pi \, r^2 \, \mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi^2 \,.$$

那么,对于同伦于g1的映射构成的等价类c,我们有

$$\mathscr{I}(c) = 24\pi^2 \tag{23.4.12}$$

因而

$$\mathscr{I}(c^{\nu}) = 24\pi^2 \nu \,. \tag{23.4.13}$$

整数 ν 被称为缠绕数.这个结果针对的表示和归一化确定是:标准SU(2)子代数的生成元 t_i 有结构 常数 ϵ_{ijk} 且Tr $(t_i t_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$.更一般地,如果 $[t_i, t_j] = ig\epsilon_{ijk}t_k$ 且Tr $(t_i t_j) = \frac{1}{2}Ng^2\delta_{ij}$,那么

$$\mathscr{I}(c^{\nu}) = 24\pi^2 N\nu \,. \tag{23.4.14}$$

结果(23.4.13)或(23.4.14)立刻指出, 对于每个单Lie群, $\pi_3(G)$ 包含Z. 正如本章附录B所列出 的, 对于所有单Lie群, $\pi_3(G) = Z$. 因此, 对于任何单Lie群, $g(\theta)$ 的同伦类完全由这个群变形到它 的标准SU(2)子群时的同伦类决定.

23.5 瞬子

正如我们在23.1节中所看到的, 在维数d = 4的欧几里得时空中, 对于规范群为单群G的纯规 范理论, 它的拓扑不平庸解对应同伦群 $\pi_3(G) = Z$ 中的元素. 它们是4维场构形, 称为瞬子, 在路 径积分中必须要考察这样的构形(原因会在下一节进行说明)以及它们附近的涨落. 在Belavin, Polyakov, Schwartz和Tyupkin^[1]例证了这些解的存在性后, 't Hooft^[23]证明了, 在将这些构形计入 路径积分后, 19.10节概述的U(1)问题将得到解决. 在这里, 我们先讨论瞬子本身, 然后再考察它们 在路径积分中的角色.

根据方程(23.1.7),为了使拓扑不平庸规范场的作用量是有限的,规范场在 $r \to \infty$ 时必须趋于 一个纯规范(其中这里的 $r \equiv \sqrt{x_i x_i}, i$ 对1,2,3,4求和):

$$iA_i(x) \to g^{-1}(\hat{x})\partial_i g(\hat{x}) , \qquad (23.5.1)$$

其中 $A_i \equiv t_{\alpha} A_{\alpha i} \prod g(\hat{x})$ 是与方向相关的规范群群元.因此,上一节讨论的拓扑不变量可以写成规范 场渐进行为的形式

$$\mathscr{I}[g] \equiv \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \times \operatorname{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^a} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^b} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^c} \right\} = -\mathrm{i} \lim_{r \to \infty} r^3 \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta^a} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta^b} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta^c} \operatorname{Tr} \left\{ A_i A_j A_k \right\},$$
(23.5.2)

其中a = 1, 2, 3的 θ^{a} 是用来指定单位4-矢 \hat{x} 方向的3个参量.这个积分可以用高斯定理计算出来.类 似闵可夫斯基时空中的流(22.2.9),我们可以定义欧几里得时空中的流

$$G_l \equiv \epsilon^E_{lijk} \left[A_{\gamma i} F_{\gamma jk} - \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha i} A_{\beta j} A_{\gamma k} \right], \qquad (23.5.3)$$

它的散度是

$$\partial_l G_l = \frac{1}{2} \epsilon^E_{ijkl} F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \,. \tag{23.5.4}$$

(这里是 ϵ_{ijkl}^E 是全反对称张量且 $\epsilon_{1234}^E \equiv 1$.) 我们使用的是结构常数全反对称的规范群的表示, 这使得

$$\operatorname{Tr}\{t_{\alpha}t_{\beta}\} = \frac{1}{2}N\delta_{\alpha\beta}, \qquad (23.5.5)$$

其中N是一个常数, 它依赖于我们在计算方程(23.5.2)中的迹时所用的表示. 因此方程(23.5.3)可以 写成

$$G_l \equiv (2/N)\epsilon^E_{lijk} \operatorname{Tr} \left[A_i F_{jk} + (2i/3)A_i A_j A_k \right].$$
(23.5.6)

当r → ∞时,场强 F_{kl} 为零,所以

$$G_l \to (4i/3N)\epsilon^E_{lijk} \operatorname{Tr} \left[A_i A_j A_k\right].$$
 (23.5.7)

因此方程(23.5.2)给出

$$\mathscr{I}[g] = -(3N/4) \int (\mathrm{d}^4 x)_E \,\partial_l G_l = -(3N/8) \,\epsilon^E_{ijkl} \int (\mathrm{d}^4 x)_E \,F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \,. \tag{23.5.8}$$

因此,为了例证拓扑不平庸场构形的存在性,我们必须要证明存在使得Chern-Pontryagin密 度 $\epsilon_{ijkl}^{E}F_{\alpha ij}F_{\alpha kl}$ 的积分不为零的场构形.

对于这个目的,采用所谓的Bogomol'nyi不等式将是非常有帮助的.[10] 从如下的事实

$$0 \le \int \left(F_{\alpha ij} \mp \frac{1}{2} \epsilon^E_{ijkl} F_{\alpha kl} \right)^2 (\mathrm{d}^4 x)_E$$

(其中平方代表对真指标收缩), 我们有

$$S[A] \ge \frac{1}{8} \left| \epsilon^E_{ijkl} \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \, (\mathrm{d}^4 x)_E \right| = |\mathscr{I}[g]|/3N \,, \tag{23.5.9}$$

其中S[A]是(相差一个因子)欧几里得作用量

$$S[A] \equiv \frac{1}{4} \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} \,(\mathrm{d}^4 x)_E \,. \tag{23.5.10}$$

显然,当其仅当规范场是自对偶或反自对偶时,也就是说

$$F_{\alpha ij} = \pm \frac{1}{2} \epsilon^E_{ijkl} F_{\alpha kl} , \qquad (23.5.11)$$

S[*A*]才会达到它的下界(23.5.9).因此,一阶方程(23.5.11)的任何解是缠绕数为1的规范场的*S*[*A*]的极小值点,因此也是二阶Yang-Mills场方程的解.

Belavin等人^[1]发现了方程(23.5.11)如下形式的解

$$iA_i(x) = \left(\frac{r^2}{r^2 + R^2}\right) g_1^{-1}(\hat{x}) \partial_i g_1(\hat{x}) , \qquad (23.5.12)$$

其中R是任意的标度因子, 而g1(x)是规范群的SU(2)子群的一个群元, 具体形式是

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{x_4 + 2\mathbf{i}\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}{r}\right) , \qquad (23.5.13)$$

且.

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23.5.14)$$

显然,这个解有渐进行为(23.5.1),并且 $g(\hat{x})$ 与"全同"映射(23.4.9)相同,所以这个解属于全同 映射的同伦类,因此,正如我们在上一阶看到的,它有缠绕数 $\nu = 1$.从方程(23.4.14)和(23.5.9)(它 在这里取等号),我们就有

$$S[A] = 8\pi^2 \,. \tag{23.5.15}$$

从方程(23.5.10)和(23.5.11)(取正号),我们还有

$$\epsilon^{E}_{ijkl} \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \, (\mathrm{d}^4 x)_E = 64\pi^2 \,.$$
 (23.5.16)

这个解不是唯一的,因为它可以进行一个平移或者经历一个规范变换,但是除却这些自由度之外, 场方程没有其它缠绕数为1的解.^[24]

由于我们已经发现了 $\nu = 1$ 的场构形,我们知道还存在缠绕数为任意整数 ν 的场构形.例如, 对于缠绕数 ν 为一个正整数 \mathcal{N} 的场构形,我们可以通过将 \mathcal{N} 个 $\nu = 1$ 的解叠加起来获得,这 \mathcal{N} 个 场构形中心彼此之间的距离要足够远,远到场方程的非线性性不再重要.通过将方程(23.5.12)中 的 g_1 换成 g_1^{-1} ,我们就获得 $\nu = -1$ 的解,而对于 ν 是任意负整数 $-\mathcal{N}$ 的解,我们可以将 \mathcal{N} 个相距甚 远的 $\nu = -1$ 的解叠加起来获得.对于一般的缠绕数,方程(23.5.15)和(23.5.16)变成

$$S[A] = 8\pi^2 |\nu| , \qquad (23.5.17)$$

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \,(\mathrm{d}^4 x)_E = 64\pi^2 \nu \,. \tag{23.5.18}$$

这些结果针对的是按照方程(23.5.11)—(23.5.13)进行归一化的规范场. 有了这个归一化, 作用 量*I*[*A*]不是-*S*[*A*], 而是

$$I[A] = -S[A]/g^2 = -8\pi^2 |\nu|/g^2, \qquad (23.5.19)$$

其中g是传统的耦合常数.如果我们使用通常的约定,在生成元和结构常数中加入因子g,那么作用 量I[A]就等于-S[A],但是 $A_{\alpha\mu}$ 和 $F_{\alpha\mu\nu}$ 就要携带一个1/g因子,那么我们就会有 $S[A] = 8\pi^2/g^2$ 而不 是方程(23.5.15),所以,在这一情况下作用量还是 $-8\pi^2/g^2$,但是,取代方程(23.5.18),现在我们有

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \, (\mathrm{d}^4 x)_E = 64\pi^2 \nu/g^2 \,. \tag{23.5.20}$$

我们会在下一节看到,在路径积分中,我们必须要对所有缠绕数的瞬子给出的效应求和. 缠绕数 $\nu \neq 0$ 的构形对欧几里得路径积分的贡献会被因子exp(I[A]) = exp($-8|\nu|\pi^2/g^2$)压低. 在23.7节,我们会看到这个指数的系数是g的-n次方:在量子色动力学中,n = 12. 函数 $g^{-n} \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ 以及它对g的所有导数在g = 0处为零,所以这样的贡献是非微扰的——它们不会在微扰论中的任何一阶中出现.

这并不意味着这些贡献一定很小. 正如我们在第18章中所看到的,在量子色动力学中, 耦合g不是固定的无量纲参量,而是滑动能量标度的函数,并且它在低能时会变得很大.方 程(23.5.19)中的耦合所用的有效能量标度有量子涨落决定,这是23.7节的课题,但是从量纲进行分 析,它不可能与方程(23.5.12)中的瞬子尺度R的倒数1/R相差过大.这些瞬子尺度是不固定的,但 是要加上合适的权重函数积掉,权重函数的具体形式依赖于所考察的过程. 在量子色动力学中, µ很大时的跑动耦合常数g_µ由方程(18.7.7)给出

$$g_{\mu}^2 = \frac{8\pi^2}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)} ,$$

其中 $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ 而 $\Lambda \approx 250$ MeV是量子色动力学标度因子.因此,对于小瞬子,因子exp $(-8\pi^2/g_{1/R}^2)$ 是

$$\exp\left(-8\pi^2/g_{1/R}^2\right) = \left(R\Lambda\right)^{\beta_0}$$

我们不能对 $R\Lambda \gg 1$ 的大瞬子计算这个因子,但很显然在这一情况下不存在对瞬子效应的压低.

尽管最初的希望是通过瞬子来帮助我们在量子色动力学中做定理计算,但是发现瞬子并没有 使得我们做定量计算的能力有很大的提升.而另一方面,正如我们马上要看到的,就我们对量子色 动力学和其它规范理论的理解而言,瞬子的发现产生了惊人的定性变化.

场方程存在使得积分(23.5.15)不为零的解,这个事实就足以为19.10节讨论的U(1)问题提供一个解决方案. 在整体U(1)变换 $\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5 \alpha)\psi$ 下, 夸克场的积分测度会经历一个变换,这个变换由方程(22.2.10)给出:

$$[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \to \exp\left\{\mathrm{i}\alpha \int \mathscr{A}(x) \,(\mathrm{d}^4 x)_E\right\} [\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]\,,\qquad(23.5.21)$$

其中的反常函数A(x)由方程(22.2.45)(这里取矩阵t为单位阵)给出:

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^E_{ijkl} F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \operatorname{tr}\{t_{\alpha} t_{\beta}\}.$$
(23.5.22)

存在这一反常本身并不会解决U(1)问题,这是因为(23.5.22)是一个全导数,所以对于在无穷远处 快速为零的非奇异规范场,它的积分为零.而瞬子解只以1/r的速率趋于零,因而使得积分的值不 为零,这个值由方程(23.5.22), (23.5.18)和(23.5.5)给定为

$$\int (\mathrm{d}^4 x)_E \mathscr{A}(x) = 2N\nu , \qquad (23.5.23)$$

这表明这个反常确实破坏了U(1)手征对称性.

正如我们在22.4节所看到的, 重子数流和轻子数流也会包含反常, 而这个反常是有夸克和 轻子与标准模型的 $SU(2) \times U(1)$ 规范玻色场之间的相互作用引起的.因此, SU(2)规范场的瞬 子构形会造成重子数和轻子数的破坏.^[25] 正如22.4节所评注的, 存在一些不会被反常或者其它 事情破坏的守恒流, 例如重子数减去轻子数, 以及电子轻子数, μ 子轻子数和 τ 子轻子数的差, 所 以它们在任何重子数不守恒或轻子数不守恒的过程中是守恒的.例如, 质子或氘核的衰变是不 允许的, 但是He³ $\rightarrow e^+ + \mu^+ + \bar{\nu}_{\tau}$ 的衰变是允许的.这些效应的振幅会像前面一样被同一个因 子exp($-8|\nu|\pi^2/g^2$)压低, 但现在g要换成SU(2)的耦合常数 $e/\sin\theta$, 并且计算g时所处的标度不睡 滑动标度而是电弱过程的自然标度, 这个标度大约是 m_Z 阶的.取 $e^2/4\pi = 1/129$ (参看18.2节)以 及sin² $\theta = 0.23$, 对于 $|\nu| = 1$, 压低因子是exp(-373).所以He³到三个反轻子的衰变不大可能观测 到.

* * *

阐释瞬子性质有另外一种方法.^[26] 在时性规范下, $A_{\alpha 4}(\mathbf{x}, x_4) = 0$, 在 $x_4 \to \pm \infty$ 时我们预期规范场会趋于一个与时间无关的纯规范

$$i\mathbf{A}(\mathbf{x}, x_4) \equiv it_{\alpha}\mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{x}, x_4) \to g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}g_{\pm}(\mathbf{x}) , \qquad (23.5.24)$$

其中 $g_{\pm}(\mathbf{x})$ 是 t_{α} 生成的表示下的群元. 假定 $\mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{x}, x_4)$ 在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时为零, 群元 $g_{\pm}(\mathbf{x})$ 必须要在 $\mathbf{x} \to \infty$ 时趋于一个常数 g_{\pm} , 所以 $x_4 \to \infty$ 处的3-空间可以视为3-球面, 而无穷处的一个点可以视为一个 普通点. 沿用给出方程(23.4.13)的讨论, 我们就有

$$\epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{Tr}\left\{g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \,\partial_i g_{\pm}(\mathbf{x}) \,g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \,\partial_j g_{\pm}(\mathbf{x}) \,g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \,\partial_k g_{\pm}(\mathbf{x})\right\} = 24\pi^2 n_{\pm} \,, \qquad (23.5.25)$$

其中 n_{\pm} 是整数. 方程(23.5.2)中对4-空间的边界的积分可以视为对 $x_4 = +\infty$ 处的"平面"积分减去 对 $x_4 = -\infty$ 处的"平面"积分,所以从(23.5.8)和(23.5.18)(其中N = 1),我们有

$$\nu = n_+ - n_- \,. \tag{23.5.26}$$

因此,来自方程(ref23.5.19)的指数因子exp($-8|\nu|\pi^2/g^2$)可以认为是从 $x_4 \rightarrow -\infty$ 处空间缠绕数 为 n_- 的构形跃迁到 $x_4 \rightarrow +\infty$ 处空间缠绕数为 n_+ 的构形的振幅. 当 $\nu \neq 0$ 时,这个因子的指数形式 反映了这是一个隧穿过程;不存在一系列连续的纯规范场可以使得我们从一个构形变到另一个缠 绕数与它不同的构形.

将因子exp(-8|ν|π²/g²)作为隧穿振幅的解释表明, 当温度高于1 TeV时, 重子数不守恒或轻子数不守恒的过程会急剧发生, 这时取代从势垒的一条边隧穿到另一边, 热涨落使得真空可以翻越势垒.^[27] 这个过程在宇宙学上或许是非常重要的, 但它仍服从上面所提及的选择定则: 热涨落不会改变重子数减去轻子数的密度, 也不会改变三种轻子数密度的差.

23.6 θ 角

我们已经看到存在缠绕数为任意整数的构形,但是我们如何知道这些构形必须要纳入到路径 积分之中?为了保持开放的头脑,假定我们对每个缠绕数的场构形加一个任意权重因子*f*(ν),只保 留其中的一些或者绝大多数权重因子可以为零的可能性.对于处在一个体积为Ω大欧几里得时空 中的定域可观测量*O*,它的期望值就是

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_{\nu} f(\nu) \int_{\nu} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega}[\phi]\right) \mathcal{O}[\phi]}{\sum_{\nu} f(\nu) \int_{\nu} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega}[\phi]\right)} , \qquad (23.6.1)$$

其中 ϕ 代表理论中的所有场.对 ϕ 的积分的下标 ν 是指我们只引入了缠绕数为 ν 的场构形;而 $I_{\Omega}[\phi]$ 是 拉格朗日密度在时空体积Ω上的积分.现在,假定将Ω分成两个很大的体积Ω₁和Ω₂,而O则落 在Ω₁中.对所有缠绕数为 ν 的场积分可以写成所有Ω₁内缠绕数为 ν ₁的场积分和对所有Ω₂内缠绕数 为 ν ₁的场积分,其中 $\nu_1 + \nu_2 = \nu$,所以在一个相当好的近似下,方程(23.6.1)变成

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_{\nu_1,\nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega_1}[\phi]\right) \mathcal{O}[\phi] \int_{\nu_2} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega_2}[\phi]\right)}{\sum_{\nu_1,\nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega_1}[\phi]\right) \int_{\nu_2} [\mathrm{d}\phi] \exp\left(I_{\Omega_2}[\phi]\right)}, \qquad (23.6.2)$$

但是这样一来,对于一般的权重因子,现在取平均和我们在省略掉体积Ω₂后去平均是不同的,这与 我们对集团分解的一般概念矛盾.(参看第4章.)为了使得包含体积Ω₂的因子在这个比值中抵消, 我们必须取

$$f(\nu_1 + \nu_2) = f(\nu_1)f(\nu_2)$$
.

当且仅当 $f(\nu)$ 是如下形式时

$$f(\nu) = \exp(\mathrm{i}\theta\nu), \qquad (23.6.3)$$

这才是这样的情况,其中θ是自由参量.由此特别得出,我们不能随意丢弃所有缠绕数非零的场 构形,这是因为,当一个区域中有缠绕数为ν的瞬子时,我们需要在另外一个区域有一个缠绕数 为-ν的瞬子来平衡它,这使得,不考察在远离所要测量算符的地方发生什么,就对期望值进行直 接计算是不可能的.

因子*f*(*ν*)可以变成一个更加熟悉的形式.根据方程(23.5.18),当规范场的归一化使得标 准*SU*(2)子群的结构常数是*ϵ_{ijk}*时,缠绕数可以写成一个积分:

$$\nu = \frac{1}{64\pi^2} \int (\mathrm{d}^4 x)_E \,\epsilon^E_{ijkl} \,F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} \,. \tag{23.6.4}$$

这可以表示成闵可夫斯基路径积分; 由于 $(d^4x)_E = i d^4x$; $F_{\alpha 34} = -iF_{\alpha 30}$; 以及 $\epsilon^{1230} = -1$, 方程(23.6.4)可以写成

$$\nu = -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \,\epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma} \,. \tag{23.6.5}$$

因此引入权重因子(23.6.3)就相等于给拉格朗日密度加入如下的项

$$\mathscr{L}_{\theta} = -\frac{\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma} . \qquad (23.6.6)$$

但正如我们在15.2节的开头所提及的,我们本就可以在任何非阿贝尔规范理论的拉格朗日中量加 入这样*θ*是任意实数的项.

在拉格朗日密度中引入(23.6.6)项会破坏P守恒和CP守恒. 我们当然可以简单地令θ = 0, 但这 将使得18.7节中标出的量子色动力学的一个成功标志不再有效:即使P守恒和CP守恒被弱相互作 用显然地破坏了, 它通过强相互作用使得P和CP是自动守恒的.

为了估计在拉格朗日量中引入(23.6.6)项的物理后果,考察对所有费米场进行如下重定义产生的效应

$$\psi_f \to \exp(i\gamma_5 \alpha_f)\psi_f$$
, (23.6.7)

其中f是味指标, α_f是实相位. 根据方程(22.2.10)和(22.2.24), 在费米场路径积分测度上的效应是

$$[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \to \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{32\pi^2} \int \mathrm{d}^4x \,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,F^{\mu\nu}_{\alpha} \,F^{\rho\sigma}_{\alpha} \sum_f \alpha_f\right\} [\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}] \,. \tag{23.6.8}$$

(我们使用的生成元归一化使得Tr($t_{\alpha\beta}$) = $\delta_{\alpha\beta}/2$.) 与方程(23.6.6)比较, 这相当于对 θ 做了一个偏移.

$$\theta \to \theta + 2\sum_{f} \alpha_f$$
. (23.6.9)

费米场的重定义同时还会改变拉格朗日密度中的质量项.为了将包含₇₅的质量项也包含在内,我 们将拉格朗日量中的质量项写成

$$\mathscr{L}_m = -\frac{1}{2} \sum_f \mathscr{M}_f \bar{\psi}_f (1+\gamma_5) \psi_f - \frac{1}{2} \sum_f \mathscr{M}_f^* \bar{\psi}_f (1-\gamma_5) \psi_f , \qquad (23.6.10)$$

其中*ℳ*_f是质量参量,如果它是复的,那么它将破坏P守恒和CP守恒.那么重定义(23.6.7)对这些参量造成的变化是

$$\mathcal{M}_f \to \exp(2i\alpha_f)\mathcal{M}_f$$
 (23.6.11)

如果只有路径积分的积分变量发生变化是不能有任何物理效益的,所以可观测量不能单独依赖 于θ或者质量参量*M*_f的相位,而是要依赖于如下的组合

$$\exp(-\mathrm{i}\theta)\prod_{f}\mathcal{M}_{f}.$$
(23.6.12)

特别地,我们总可以重定义费米场使得 $\theta = 0$,但付出的代价是可能会在质量项中引入P或CP破坏相位.

这个讨论表明, 如果任何一个夸克的质量为零, 那么 θ 角就不会有作用, 因而量子色动力学 中也就没有P不守恒或者CP不守恒. 尽管在19.7节中对夸克质量比值的分析中引入 m_d 的二阶项 有时会允许 m_u 为零,^[28] 但是一般情况下这个分析表明所有夸克的质量均不为零. 然而, 毫无 疑问u夸克和d夸克相当轻, 这会压低不为零的 θ 角的效应. 我们在19.4节看到, m_u 和 m_d 的量级大 约是 m_{π}^2/m_N (其中 m_N 在这里用作量子色动力学特征质量标度), 所以我们可以预期 θ 角的效应会 被4个 m_{π} 因子压低, 但这不是完全正确的. 当P和CP不守恒时, π_0 还有一个湮灭到真空中的振 幅, 这个振幅正比于 m_{π}^4 , 但是这种 π 介子线结束与这种真空跃迁顶角的"蝌蚪"图会从 π 介子传播 子获得增幅因子 m_{π}^{-2} , 这给出的净效应将正比于 m_{π}^2 而不是 m_{π}^4 . 特别地, 如果我们定义费米场使 得所有 \mathcal{M}_f 为实数, 那么不为零的 θ 角会产生P和T不守恒的中子电偶极矩 d_n , 这个电偶极矩正比 于 $|\theta|$ 和 m_{π}^2 , 因此从量纲分析可以得出它的大概量级是^[29]

$$d_n \approx |\theta| e m_\pi^2 / m_N^3 \approx 10^{-16} |\theta| e \,\mathrm{cm} \,.$$
 (23.6.13)

已知中子电偶极矩要小于 $10^{-25} e \text{ cm}$,所以 $|\theta| < 10^{-9}$.

为了以一种自然的方式解释为什么θ这么小, Peccei和Quinn^[30]提出了一个理论, 在这个理论中, θ不是参量而是动力学变量, 它可以放松至有效势的极小值点, 这时P和CP都是守恒的. Wilczek和我接纳了这个想法,^[31]并注意到这会要求存在一个非常轻的无自旋粒子, 轴子. 原始Peccei-Quinn模型中出现的轴子被实验排除了, 但存在更一般的可能性,^[32] 这时轴子与普通物质的耦合过弱以至于无法被探测到.

所有版本的轴子理论有一个共同的特征:存在某个U(1)对称性,这个对称性在能量远高于量 子色动力学对应的那些能量标度时就自发破缺了,并且它被一个包含胶子场的反常破坏了.根据 第19章和第22章的一般形式理论,低能有效场论将会包含Goldstone玻色场φ,这使得,在对称变换

$$\phi \to \phi + F_{\phi}\epsilon \,, \tag{23.6.14}$$

有效拉格朗日量的变化是

$$\delta \mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{\epsilon A}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}_{\alpha} F^{\rho\sigma}_{\alpha} , \qquad (23.6.15)$$

其中A是量级为1的无量纲常数,它用来表征反常,而常数 F_{ϕ} 的量级是对称性自发破缺的能量标度(ϕ 的定义使得它是正则归一化的.)这样,有效作用量中包含 ϕ 的项就是

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{64\pi^{2}}\frac{\phi}{M}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}_{\alpha} + \cdots, \qquad (23.6.16)$$

其中 $M \equiv F_{\phi}/A$ 而····代表包含 ϕ 的导数的可能相互作用. 比较方程(23.6.6)和(23.6.6),我们看到, 对于常数的 ϕ ,所有可观测量不在单独是 ϕ 和 θ 的函数,而是组合 $\theta + \phi/M$ 的函数(这里所有费米场的 定义要使得所有质量参量 \mathcal{M}_f 是实数;否则可观测量将会依赖于 $\theta - \sum_f \operatorname{Arg} \mathcal{M}_f + \phi/M$). 如果理 论中除了 θ 项(23.6.6)以外的所有项以及方程(23.6.16)中的 ϕ 相互作用保持P守恒或CP守恒,那么有 效势关于 $\theta + \phi/M$ 是偶函数,所以它在 $\theta + \phi/M = 0$ 处有一个稳定点,在这一点,P守恒和CP守恒都 得到了保护. 在真实世界中,P和CP不是精确对称性,但观测到的对称性破坏在弱相互作用中,因 而只将 ϕ 的期望值从 $-M\theta$ 处偏离了一点点.^[33]

即使不指定底层理论,通过使用有效场论技巧,我们可以推测出很多轴子的一般性质.现在轴子场的拉格朗日量包含*θ*项以及与*u*夸克和*d*夸克直到1/*M*阶的相互作用,它的最一般形式是

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{\phi}{M} + \theta \right] \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}_{\alpha} F^{\rho\sigma}_{\alpha} - \frac{\mathrm{i} f_u}{M} \partial_{\mu} \phi \, \bar{u} \gamma_5 \gamma^{\mu} \, u - \frac{\mathrm{i} f_d}{M} \partial_{\mu} \phi \, \bar{d} \gamma_5 \gamma^{\mu} \, d \,, \qquad (23.6.17)$$

其中*f_u和f_d*是无量纲耦合常数,它们的量级预计是1. 正如方程(23.6.8)证明的,夸克场的重定 义(23.6.7)的效应是对拉格朗日量(23.6.17)中的第二项做如下替换

$$\frac{\phi(x)}{M} + \theta \to \frac{\phi(x)}{M} + \theta + 2\left[\alpha_u(x) + \alpha_d(x)\right].$$
(23.6.18)

通过选择 $\alpha_f = -(\theta + \phi/M)c_f/2$,并令系数 c_f 满足 $c_u + c_d = 1$,我们消掉了拉格朗日量中包 含 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的项,并将低能量子色动力学拉格朗日密度中的质量项变成

$$\mathscr{L}_m = -m_u \,\bar{u} \exp\left[-\mathrm{i}c_u(\theta + \phi/M)\gamma_5\right] u - m_d \,\bar{d} \exp\left[-\mathrm{i}c_d(\theta + \phi/M)\gamma_5\right] d\,. \tag{23.6.19}$$

另外,从夸克拉格朗日量的动能项部分中,我们挑出导数相互作用项

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}c_u \,(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5)u\,\partial_\mu\phi/M + \frac{1}{2}\mathrm{i}c_d \,(\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5)d\,\partial_\mu\phi/M\,,\qquad(23.6.20)$$

这使得方程(23.6.17)中的 f_u 和 f_d 被换成了 $f'_u = f_u - c_u/2\pi f'_d = f_d - c_d/2$.为了导出低能 π 介子和 轴子的有效拉格朗日量,我们沿用19.5节的处理(不过现在要把质子和中子换成u夸克和d夸克),并 做替换:

$$\begin{aligned} \bar{u}u &\to v \cos(\pi^0/F_\pi) , & \bar{d}d \to v \cos(\pi^0/F_\pi) , \\ \bar{u}\gamma_5 u &\to iv \sin(\pi^0/F_\pi) , & \bar{d}\gamma_5 d \to -iv \sin(\pi^0/F_\pi) , \\ i\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 &\to \frac{1}{2}F_\pi \partial^\mu \pi^0 + \cdots , & i\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 \to \frac{1}{2}F_\pi \partial^\mu \pi^0 + \cdots , \end{aligned} \tag{23.6.21}$$

其中v是常数 $v = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$, 而"…"代表那些没有单 π 介子极点的项. 从方程(23.6.19)和(23.6.20), 我们得到有效 π 介子-轴子拉格朗日量

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \pi^{0} \partial^{\mu} \pi^{0} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi' \partial^{\mu} \phi' - \left(\frac{f'_{u} - f'_{d}}{2M}\right) F_{\pi} \partial_{\mu} \phi' \partial^{\mu} \pi^{0} - m_{u} v \cos\left(\frac{\pi^{0}}{F_{\pi}} - \frac{c_{d} \phi'}{M}\right) - m_{d} v \cos\left(\frac{\pi^{0}}{F_{\pi}} + \frac{c_{d} \phi'}{M}\right) , \qquad (23.6.22)$$

其中¢'是轴子场和它期望值的差

$$\phi' \equiv \phi - \langle \phi \rangle = \phi + M\theta \,. \tag{23.6.23}$$

由于 c_u 和 c_d 除了要满足条件 $c_u + c_d = 1$ 外是任意的, 通过取 $c_u = \frac{1}{2} + f_u - f_d$ 和 $c_d = \frac{1}{2} + f_d - f_u$ 以使得 $f'_u = f'_d$. 拉格朗日量(23.6.22)中的二次项部分是

$$\mathscr{L}_{\text{quad}} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\pi^{0}\partial^{\mu}\pi^{0} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi'\partial^{\mu}\phi' - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pi^{0}\\\phi'\end{pmatrix}^{T}M_{0}^{2}\begin{pmatrix}\pi^{0}\\\phi'\end{pmatrix}, \qquad (23.6.24)$$

其中

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} (m_u + m_d)v/F_{\pi}^2 & (-m_u c_u + m_d c_d)c/F_{\pi}M \\ (-m_u c_u + m_d c_d)c/F_{\pi}M & (m_u c_u^2 + m_d c_d^2)v/M^2 \end{pmatrix}.$$
 (23.6.25)

当 $M \gg F_{\pi}$ 时, M_0^2 的一个本征值是 $(m_u + m_d)v/F_{\pi}^2$, 根据方程(19.7.20), 这是 π^0 质量的平方. 那么, 另一个本征值就是轴子质量

$$m_a^2 = \frac{v}{M^2} \frac{m_d m_u}{m_d + m_u} = \frac{F_\pi^2}{M^2} \frac{m_d m_u}{(m_d + m_u)^2} m_\pi^2 \,. \tag{23.6.26}$$

对于19.7节中导出的夸克质量比值,这给出 $m_a = 13 \,\text{MeV}/M(\text{GeV})$.

我们也可以用这个形式理论对轴子与强子的相互作用做一些讨论. M_0^2 的本征值为 m_a^2 的本征矢, 它沿着原始 π^0 方向的分量等于 $(m_u c_u - m_d c_d)F_{\pi}/(m_u + m_d)M$. 正如前面所提及的, 由于 单 π 介子极点, 这是主要的 π 介子-强子耦合. 我们看到产生轴子的相互作用振幅和产生 π 介子的相 互作用振幅之比通常是 F_{π}/M 阶的. 而在这种碰撞中没有观测到的轴子表明M > 3 TeV, 在原始 论文中^[30, 31], 期望让这一反常U(1)对称性自发破缺就是破缺的 $SU(2) \times U(1)$ 对称性的那个标量 真空期望值, 它的量级是0.3 TeV, 显然与实验矛盾. 通过将M取成独立参量,^[32]并令其远大于电 弱破缺标度, 我们有希望解释为什么在反应堆实验或者加速器实验中没有发现轴子, 但是在天文 物理上还有限制. 对红巨星冷却速率的限制给出^[34] $M > 10^7$ GeV, 而对超新星SN1987A的观测表 明^[35] $M > 10^{10}$ GeV.* 宇宙学上的讨论给出^[36]了一个上界 $M < 10^{12}$ GeV, 这为允许的轴子参量 留出了一个开发但狭窄的窗口.

23.7 扩展场构形附近的量子涨落

像瞬子这样的拓扑不平庸4维场构形只给路径积分提供了零阶修正.现在我们必须考察这些 场附近的量子涨落产生的效应.

为了以一种非常普遍的方式出发,考察一组场,合起来记为 $\phi(x)$,它的动力学有欧几里得作用 量 $I[\phi]$ 描述,并假定我们有一组场构形 $\phi_{\nu,u}$ 使得 $I[\phi]$ 在这些场构形上是稳定的,其中 ν 用来标记构形

$$\frac{\Gamma(a \to \gamma + \gamma)}{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + \gamma)} = \left(\frac{F_\pi}{M}\right)^2 \left(\frac{m_a}{m_\pi}\right)^3 \approx \left(F_\pi/M\right)^5.$$

因此, 当 $M > 10^7$ GeV时, 轴子寿命预计要长于 10^{24} s, 这么长的时间甚至足以让轴子在衰变之前跨过一个宇宙学距离.

^{*}当 $M > 10^7$ GeV时, 轴子质量将小于1 eV, 这会使得恒星的温度不足以产生轴子. 轴子衰变到两个光子和 π 介子衰变到两个光子的衰变速率的比值在量级上预期是 $(F_{\pi}/M)^2$ 乘以相空间比值 $(m_a/m_{\pi})^3$, 或者

的拓扑类型, *u*代表构形所依赖的一组连续参量. 例如对于瞬子, *ν*是缠绕数, 这是一个整数, 而*u*则 代表位置, 标度以及它在规范群中的"方向". 这样, 欧几里得路径积分就可以写成

$$\int [\mathrm{d}\phi] \, \exp\Bigl(I[\phi]\Bigr)\mathcal{O} = \sum_{\nu} \int \mathrm{d}u \int_{u} [\mathrm{d}\phi'] \, \exp\Bigl(I[\phi_{\nu,u} + \phi']\Bigr)\mathcal{O} \,, \tag{23.7.1}$$

其中, 对涨落 ϕ '的积分有一个下标, 这个下标是指我们只对不会导致集体参量发生变化的涨落进行积分, 而O代表场算符的定域函数的任意乘积. 由于 $I[\phi]$ 在 $\phi = \phi_{\nu,u}$ 处是稳定的, 它关于涨落的二阶展开取如下的形式

$$I[\phi_{\nu,u} + \phi'] \simeq I_{\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \, d^4y \, K_{xl,ym}(\nu, u) \, \phi'_l(x) \, \phi'_m(y) \,, \qquad (23.7.2)$$

其中l和m代表自旋和种类指标,而由于作用量假定在所有场构形 $\phi_{\nu,u}$ 处是稳定的,所以 $I_{\nu} \equiv I[\phi_{\nu,u}]$ 仅是 ν 的函数.这样,方程(23.7.1)中对涨落 ϕ' 的积分结果就是,算符O中的场进行收缩后产生的项的和,再乘以(对于实标量场)一个总因子[Det $K(\nu,u)$]^{-1/2},它现在理解成K只做用在涨落中那些不导致集团参量u产生变化的子空间上.这个因子可以写成对"矩阵" $K(\nu,u)$ 的本征 $f(\lambda_n(\nu,u))$ 的乘积:

$$\left(\text{Det } K(\nu, u)\right)^{-1/2} = \prod_{n}' \lambda_n^{-1/2}(\nu, u) , \qquad (23.7.3)$$

这里加撇代表我们排除了"零模",即K的零本征值,本征值为零的本征函数对应的是集体参量中的变化.

在23.5节,我们给出了不同缠绕数的瞬子贡献对耦合常数的依赖关系,利用上面给出了一些性质,我们可以精炼这个结果. 假定我们定义理论中的场使得作用量采取形式 $I[\phi,g] = g^{-2}I_1[\phi]$,其中 $I_1[\phi]$ 与耦合无关. (例如,就像15.2节末尾所讨论的那样,在Yang-Mills理论中,我们所用的规范场是正则归一化规范场乘以因子g.) 那么, K的所有本征值将正比于 g^{-2} ,那么因子(23.7.3)将会正比于g的一个幂函数,这个幂函数的幂次等于K的非零本征值的数目. 这个幂次当然是无限大的,但是它可以写成K的所有本征值的数目减去零模的数目 $\mathcal{N}(\nu)$,前者依旧是无限的但是独立于 ν ,后者有限但依赖于 ν . 由此我们得出结论,除去那些不依赖于 ν 的因子,对于拓扑类型为 ν 的构形,它附近的涨落给出的贡献对耦合常数的依赖关系写成集体参量数目 $\mathcal{N}(\nu)$ 的形式是

$$g^{-\mathcal{N}(\nu)} . \tag{23.7.4}$$

这个估计基于近似(23.7.2), 而这对应于单圈近似, 所以当高阶项也考虑在内时, 因子(23.7.4)将会 乘以g的幂级数, 这个幂级数的具体形式依赖于路径积分中的算符O.

我们来看一下如何将这一结果应用于瞬子. $\nu = 0$ 的构形显然没有集体参量,所有它对路 径积分的贡献就是g的幂级数. 在 $\nu = 1$ 的构形中,有4个集体参量给出了瞬子的时空位置,有 一个集体参量给出了瞬子的标度,有 N_1 个参量对应于不使得瞬子不变的旋转和/或整体规范 变换,所以(现在包含方程(23.5.19)给出的因子exp(I_{nu})), $\nu = 1$ 的瞬子对耦合常数的依赖关系 是 g^{-5-N_1} exp($-8\pi^2/g^2$). 对于SU(2)Yang-Mills理论中 $\nu = 1$ 的瞬子,有3个独立的旋转和3个独 立的SU(2)变换,但是由于瞬子在3个旋转和SU(2)变换的组合变换下不变,我们有 $N_1 = 3$,所以 在 $\nu = 1$ 的瞬子附近的涨落给出的耦合常数依赖关系是 g^{-8} exp($-8\pi^2/g^2$). 在SU(3)Yang-Mills理论中,我们有3个独立的旋转和8个独立的SU(3)变换,但是这时瞬子依旧在3个独立的组合变换 下不变,这些组合变换由旋转和标准SU(2)子群(例如,作用在SU(3)定义表示的前两个分量上

的SU(2)子群)中的SU(3)变换构成,同时瞬子还在一个额外的SU(3)变换下不变,这个SU(3)变换(例如超荷)与标准SU(2)子群的所有生成元都对易.因此 $N_1 = 3 + 8 - 3 - 1 = 7$,所以 $\nu = 1$ 的瞬子产生了一个正比于 $g^{-12} \exp(-8\pi^2/g^2)$ 的因子.

现在假定作用量I还包含一项

$$-\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \, \bar{\psi}_l(x) \, \mathscr{K}_{lx,my}(\nu, u) \, \psi_m(y) \, ,$$

这项包含独立的费米场 ψ 和 $\bar{\psi}$.如果这些场没有出现在O中,那么对这些场的积分产生因子Det $\mathscr{K}(\nu, u)$,如果 $\mathscr{K}(\nu, u)$ 有零模,这就为零.这一结果可以按照费米参量的积分规则简单地理解.通过将 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 展成 \mathscr{K} 的本征模,我们可以将对 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的积分写成对展开系数的积分.零模的系数不会出现在作用量的二次近似中,所以对于每个这样的费米零模,我们要对一个不出现在被积函数中的费米参量进行积分,而根据9.5节的一般规则,这为零.在对费米变量的积分中,唯一使得积分不为零的被积函数必须包含每个被积费米变量且每个费米变量的个数只能为1.因此,当且仅当对于 \mathscr{K} 中每个零模,O都有一个费米场时,方程(23.7.1)中对费米场的积分才不会为零.对于瞬子,费米零模的数目和手征由指标定理控制,例如22.2节中推导的Atiyah-Singer指标定理,所以对于给定的缠绕数,只有特定的过程是允许的.以此为基础,'t Hooft^[25]证明了,在标准电弱模型中, $\nu = 1$ 的瞬子产生的重子不守恒和轻子不守恒有效相互作用必须包含每个轻子味且每个轻子味只能有一个.

23.8 真空衰变

如果一个真空态的标量场期望值处在有效势的真正最小值处,那么这个真空态是稳定的.但 是如果标量场处在高于真正最小值的局域极小值处,那么这个真空就是亚稳的.通过一个势垒隧 穿过程,对应局域极小值的亚稳"假"真空态将会衰变都对应真正最小值的稳定"真"真空,这类似 于核α衰变或自发核裂变.这并不是我们可以在实验室中观测的过程,但是在我们宇宙的历史中, 随着数个对称性的自发破缺,它可能发生了数次,所以能够计算这种假真空的衰变速率是非常重 要的.我们将会看到,这个计算将会涉及对另外一种场构形的考察.^[6]

我们将注意力集中在标量场多重态中从真真空中获得真空期望值〈φ〉的分量φ上.例如, 在19.5节讨论的手征对称性破缺的理论中, φ是手征4-矢的第四个分量.我们将会看到,当势垒隧 穿被极大地压低时,其它标量场(包括那些Goldstone玻色子)不会影响这个衰变速率中的主导压低 因子.明确起见,我们取如下形式的拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi). \qquad (23.8.1)$$

我们假定最低阶有效势 $V(\phi)$ 在 $\phi = \langle \phi \rangle$ 处拥有真正的真空,而在 $\phi = 0$ 处有局域极小值,另外我们 调整拉格朗日密度中的一个附加常数使得V(0) = 0,在这一情况下, $V(\langle \phi \rangle) < 0$.我们希望计算的 是标量期望值为零的假真空态到标量期望值为 $\langle \phi \rangle$ 的真真空态的衰变速率.

本章附录A的结果(方程(23.A.6), (23.A.21)和(23.A.23))表明, 标量场期望值为零的假真空态的能量*E*₀是

$$E_0 = -\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \left[\int \exp\left(-S[\phi; T]\right) \prod_{\mathbf{x}, t} \mathrm{d}\phi(\mathbf{x}, t) \right] , \qquad (23.8.2)$$

其中S[\phi;T]是从方程(23.8.1)推导出的欧几里得作用量

$$S[\phi;T] = \int d^3x \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] , \qquad (23.8.3)$$

而方程(23.8.2)要积掉的场 $\phi(\mathbf{x},t)$ 满足条件

$$\phi(\mathbf{x}, T/2) = \phi(\mathbf{x}, -T/2) = 0.$$
(23.8.4)

能量(23.8.2)是复数,它的虚部会给出衰变速率.

为了计算方程(23.8.2)的泛函积分,我们要找出欧几里得作用量 $S[\phi,T]$ 的稳定"点". 使得(23.8.3)稳定的场满足场方程

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \phi} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{\mathrm{d}V(\phi)}{\mathrm{d}\phi} , \qquad (23.8.5)$$

并服从边界条件(23.8.4). 由于这些边界条件,这样的解被称为弹回(bounce)解.

我们将通过做拟设的方法寻找这些弹回解,我们所做的拟设 $\phi(\mathbf{x},t)$ 在围绕点 \mathbf{x}_0, t_0 的四维旋转下不变:

在四维存在一些不是旋转不变的解,但是这些解有更高的S值,^[37]因而在T很大时可以忽略.在方程(23.8.5)中使用方程(23.8.6),这给出常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho} = V'(\phi) \,. \tag{23.8.7}$$

严格地将,仅当T远大于V(ρ)所对应的特征时间时,这个形式的解才与边界条件(23.8.4)是相容的,在这一情况下,我们可以在方程(23.8.4)中取T是无穷大,那么它就变成条件 $\phi(\rho)$ 必须 在 $\rho \to \infty$ 时为零.另外,在**x** = 0附近,对于包含t = t₀在内的所有t, $\phi($ **x**,t)必须是**x**的解析函数, 所以 $\phi(\rho)$ 在 $\rho \to 0$ 时必须是 ρ^2 的幂级数,并且特别地,在 $\rho = 0$ 处d $\phi/d\rho = 0$.有了这些条件,将 ϕ 视 为"位置",将 ρ 视为"时间",方程(23.8.7)就是单位质量的粒子在势–V(ϕ)和黏滞力–(3/ ρ)d $\phi/d\rho$ 的 影响下的运动方程,这个粒子从 ϕ 在 $\rho = 0$ 的某个初始值 ϕ_0 以零初速度出发,然后在 $\rho \to \infty$ 时抵 达 $\phi = 0$,为了克服一路上的黏滞力失去了它的初"能量"–V(ϕ_0) > 0.这种解的欧几里得作用量是

$$B \equiv \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 + V(\phi)\right] \,. \tag{23.8.8}$$

定出*B*的符号很关键. 对于这个目的,^[38] 我们使用在23.1节中用来证明Derrick定理的那个推导, 考察修正场 $\phi_R(\rho) \equiv \phi(\rho/R)$ 的作用量(23.8.8). 通过缩放积分变量, 我们发现

$$S[\phi_R] = \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\left[\frac{R^2}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 + R^4 V(\phi)\right] \,.$$
(23.8.9)

如果 $\phi(\rho)$ 是方程(23.8.7)的解,那么作用量关于 ϕ 的任意变分都是稳定的,这使得d $S[\phi_R]/dR$ 在R = 1处必须为零,因此

$$\int_0^\infty \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 = -4 \int_0^\infty \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,V(\phi) \,. \tag{23.8.10}$$

由此得出

$$B = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 > 0 \,. \tag{23.8.11}$$

稍后我们会回到 $\phi(\rho)$ 的显式近似解,但让我们先来考察任何使用这样的解.

在欧几里得作用量的稳定点,我们不止有一个单弹回构形,而是一系列连续的弹回构形,这些构形由集体坐标 x_0 和 t_0 表征.根据23.7节的结果,我们必须对这些参量积分,由于B独立于 x_0 和 t_0 ,这会产生空间体积为 ψ 的盒子内产生因子 ψ 和T.到一圈阶,所有单弹回构形对方程(23.8.2)中的泛函积分的贡献是

$$\mathscr{V}TA\exp(-B). \tag{23.8.12}$$

其中系数A正比*于乘积 $\prod'_n \lambda_n^{-1/2}$,其中 λ_n 是核 $\delta^2 S[\phi]/\delta\phi(\mathbf{x},t)\delta\phi(\mathbf{x}',t')$ 的本征值,加撇代表我们省 略了零本征值,这些零本征值对应的是集体坐标 \mathbf{x}_0 和 t_0 中的变化.利用方程(23.8.10),我们可以 看到方程(23.8.9)对R的二阶段在R = 1处小于零,所以这里至少存在一个负本征值(实际上只有 一个^[39]),因此到这一阶,A是虚的.我们不会在这里尝试计算A,而只注意到它的一个性质,不 像exp(-B),A对理论的参量并没有显著的依赖性,这使得我们可以从量纲分析出发粗略地估出它 的量级i M^{-4} ,其中M是理论的某个质量标度.

当T和𝒴很大时,通过将N个这样的弹回解叠加起来,我们可以获得额外的稳定场构形,它所 给出的贡献是(23.8.12)的N次方,而在对N个**x**0和t0积分时,我们对那些只相差对这N个全同弹回 的置换进行重复求和,所以还要对这个贡献除以N!.这样,对N求和就给出了(23.8.12)的指数,所 以能量(23.8.2)就是(23.8.12)除以T

$$E_0 = -\mathscr{V}A \exp(-B) \,. \tag{23.8.13}$$

由于A是iM-4阶的,因此,单位体积假真空的衰变速率在量级上是

$$\Gamma/\mathscr{V} \approx M^{-4} \exp(-B) \,. \tag{23.8.14}$$

注意到,由于这个衰变并不会因为空间各处的标量场同时发生变化而发生,而会因为真正真空在 假真空背景下出现真空泡沫而发生,所以这是单位体积的衰变速率,

结果(23.8.14)主要在B很大的情况下是有用的,这使得势垒穿透被极大的抑制了,并且我们可 以简单地将压低因子估计成exp(-B). 幸运的是,在B很大的最自然情况中,有可能以近似的方式 计算出B. 当真正真空的能量 $V(\langle \phi \rangle) \equiv -\epsilon$ 只比假真空的零能量低一点,并且 $V(\phi)$ 在 $\phi = 0$ 和 $\phi = \langle \phi \rangle$ 之前取正值且不为小量时,这就是这样的情况.为了使得这一情况下的欧几里得作用量最小, 我们必须在一个半径为R的4维大球体内将 ϕ 取在 $\langle \phi \rangle$ 的附近,而 ϕ 在穿越一个厚度为 $L \approx M^{-1}$ 的壳 层后掉落至零,在 $\epsilon \to 0$ 的极限下, L是势的一个特征长度.(这有时被称为"薄壁近似",但或许一个 更好的术语是大泡近似.)作用量(23.8.3)在这一近似下是

$$S(R) \simeq -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \epsilon + 2\pi^2 R^3 \mathscr{S},$$
 (23.8.15)

其中*S*是表面张力,它等于单位面积壳层对作用量的贡献.方程(23.8.7)左边的第二项在ρ ≈ R时可以忽略,所以现在这显然是一个一维问题.因此,我们可以从方程(23.1.4)中提取出表面张力,它

^{*}当连续群G自发破缺到子群H时,还有额外的集体坐标来指定H在G内的方向.对这些参量的积分会在A中产生额外的因子,这个因子等于陪集空间G/H的体积.

对于场方程的解取等号,以现在的符号约定写成

$$\mathscr{S} = \int_0^{\langle \phi \rangle} \sqrt{2V(f)} \,\mathrm{d}f \,. \tag{23.8.16}$$

当半径

$$R \simeq 3\mathscr{S}/\epsilon \,, \tag{23.8.17}$$

作用量(23.8.15)是稳定的,所以这个作用量在它的稳定点有值

$$B \simeq \frac{27\pi^2 \mathscr{S}^4}{2\epsilon^3} \,. \tag{23.8.18}$$

注意到当*ϵ*很小时*B*很大,所以在这一情况下假真空的衰变的速率被极大地压低了.在势垒被渗透 后,真正真空的气泡将以光速增长,最终与其它气泡相撞,直至整个空间都处在最低能态上.

附录A 欧几里得路径积分

在这个附录中我们将概述欧几里得路径积分在量子场论中的使用. 正如在9.1节中所提及的, 在4维欧几里得时空中构建出量子场论是可能的. 以这种方法计算*S*-矩阵需要不平庸的解析延拓, 在这里我们不会研究这个解析延拓,相反,我们将会通过处理适合使用欧几里得路径积分的问题 来阐述它的用法.

我们考察一组哈密顿正则变量 Q_a 和 P_a ,并有对易关系

$$[Q_a, P_b] = \mathrm{i}\delta_{ab} , \qquad (23.\mathrm{A.1})$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0.$$
(23.A.2)

在量子场论中,就像9.1节中那样,指标a被理解成由空间坐标**x**以及任何离散的Lorentz和种类指标*m*构成,而方程(23.A.1)中的克罗内克 δ 理解成 $\delta_{\mathbf{x}m,\mathbf{y}n} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}$,我们定义 Q_a 的本征态

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle , \qquad (23.A.3)$$

它的归一化使得

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q'-q) \equiv \prod_{a} \delta(q'_{a}-q_{a}),$$
 (23.A.4)

对 P_a 的本征态 $|p\rangle$ 类似.

我们所考察的问题是如何计算矩阵元

$$F(q',q;T) \equiv \langle q' | \exp\left(-H[Q,P]T\right) | q \rangle , \qquad (23.A.5)$$

其中*H*是哈密顿量,而*T*是任意的正实常数.一个应用是对基态能量的研究.如果*H*的最小本征值 是 E_0 ,相应的本征态是 $|0\rangle$,那么当 $T \to \infty$ 时

$$F(q',q;T) \rightarrow \langle q'|0\rangle \langle 0|q\rangle \exp(-E_0T)$$
,

所以

$$E_0 = -\lim_{T \to \infty} \left(\frac{\ln F(q', q; T)}{T} \right).$$
(23.A.6)

另外,我们可以从迹中计算出统计力学的配分函数:

 $|p,t\rangle$

$$Z(\beta) \equiv \operatorname{Tr}\exp(-\beta H) = \int \left[\prod_{a} \mathrm{d}q_{a}\right] F(q,q;\beta) , \qquad (23.A.7)$$

其中1/β是温度.

为了推导出F(q',q,t)的路径积分公式,我们定义欧几里得时间相关算符

$$Q_a(t) \equiv e^{Ht} Q_a e^{-Ht}, \qquad P_a(t) \equiv e^{Ht} P_a e^{-Ht}, \qquad (23.A.8)$$

以及相应的左本征态和右本征态

$$|q,t\rangle \equiv \exp(Ht)|q\rangle$$
, $\langle q,t| \equiv \langle q|\exp(-Ht)$, (23.A.9)

$$\equiv \exp(Ht)|p\rangle , \qquad \langle p,t| \equiv \langle p|\exp(-Ht) , \qquad (23.A.10)$$

使得

$$Q_a(t)|q,t\rangle = q_a|q,t\rangle, \qquad \langle q,t|Q_a(t) = q_a\langle q,t|, \qquad (23.A.11)$$

以及

$$P_a(t)|p,t\rangle = p_a|p,t\rangle, \qquad \langle p,t|P_a(t) = p_a\langle p,t|. \qquad (23.A.12)$$

这个通常的闵可夫斯基形式理论的一个差别在于,算符的"时间"演化由非幺正相似变换(23.A.8)控制,所以,除了t = 0, Q(t)的左本征态 $\langle q, t |$ 和右本征态 $|q, t \rangle$ 的厄米共轭之间的关系不像以前那么简单.

以这种语言, F(q',q;T)的定义(23.A.5)可以重写成

$$F(q',q;T) = \langle q',T/2|q,-T/2 \rangle.$$
 (23.A.13)

我们先对无限小的dt计算 $\langle q', t + dt | q, t \rangle$. 对H(Q, P)采取所有Q都写在所有P的左边的约定, 我们有

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \langle q', t | \exp\left(-H(q', P)dt\right) | q, t \rangle.$$

我们将|q,t)展至算符Pa(t)的本征态完备集上.从(23.A.1),我们同往常一样有

$$\langle q,t|p,t\rangle = \prod_{a} \frac{\exp(\mathrm{i}p_{a}q_{a})}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \langle p,t|q,t\rangle = \prod_{a} \frac{\exp(-\mathrm{i}p_{a}q_{a})}{\sqrt{2\pi}},$$

所以

$$\langle q', t + \mathrm{d}t | q, t \rangle = \int \left(\prod_{a} \frac{\mathrm{d}p_{a}}{2\pi} \right) \exp\left(\mathrm{i}\sum_{a} p_{a}(q'_{a} - q_{a}) - H(q', p)\mathrm{d}t \right).$$

(这里不使用求和约定.)

和9.1节一样,我们将从-T/2到T/2的时间间隔分成非常多的小间隔,然后对每个间隔插入 对Q本征态的求和.对每个间隔的Q本征值和P本征值定义插值q(t)和p(t),这样我们就获得了F在 它最一般形式下的路径积分表达式

$$F(q',q;T) = \int_{q(-T/2)=q,q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi}\right) \\ \times \exp\left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i\sum_{a} \dot{q}_a(t)p_a(t) - H(q(t),p(t))\right]\right) .$$
(23.A.14)

为了计算配分函数(23.A.7),我们要对p和q积分,这些p和q只服从q(t)关于逆温度 β 是周期的条件:

$$Z(\beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi}\right) \times \exp\left(\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[i\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H\left(q(t), p(t)\right)\right]\right).$$
(23.A.15)

方程(23.A.14)和(23.A.15)看起来有一点古怪,它的指数中有一项是实的而另一项却是虚的. 在做掉对*p_a(t)*的路径积分后,这些公式变到我们更加熟悉的形式.在一类重要的理论中,这个路径 积分是平庸的,这类重要理论的哈密顿量是*P*的二次型:

$$H(q,p) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} A_{ab}(q) p_a p_b + \sum_a B_a(q) p_a + C(q) .$$
(23.A.16)

正如我们在第9章附录中所证明的,对方程(23.A.14)中的p积分给出

$$F(q',q;T) = \int_{q(-T/2)=q,q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} \mathrm{d}q_a(t)\right) \left(\operatorname{Det}\left[2\mathrm{i}\pi\mathscr{A}(q)\right]\right)^{-1/2} \\ \times \exp\left(\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t\left[\mathrm{i}\sum_a \dot{q}_a(t)\overline{p}_a(t) - H\left(q(t),\overline{p}(t)\right)\right]\right).$$
(23.A.17)

其中*A*(q)是"矩阵"

$$\mathscr{A}(q)_{at',bt} = \delta(t'-t)A_{ab}(q(t)),$$
 (23.A.18)

而 p(t) 是方程(23.A.17) 中指数变量的稳定点——即,如下方程的解

$$i\dot{q}_a(t) = \left. \frac{\delta H(q(t), p)}{\delta p_a} \right|_{p=\overline{p}(t)} .$$
(23.A.19)

这里出现因子i不应感到惊讶,这是因为方程(23.A.19)和非厄米算符(23.A.8)所满足的方程相同:

$$\mathrm{i}\dot{Q}_a(t) = \mathrm{i}[H,Q_a(t)] = \frac{\delta H\Big(Q(t),P(t)\Big)}{\delta P_a(t)}$$

对于形式为一般二次型(23.A.16)的哈密顿量, 方程(23.A.19)的解是

$$\overline{p}_a = \sum_b \left[A^{-1}(q) \right]_{ab} \left(iq_b - B_b(q) \right), \qquad (23.A.20)$$

因此方程(23.A.17)采取如下的形式

$$F(q',q;T) = \int_{q(-T/2)=q,q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t)\right) \\ \times \left(\operatorname{Det}\left[2i\pi\mathscr{A}(q)\right]\right)^{-1/2} \exp\left(-S[q]\right).$$
(23.A.21)

其中S[q]是作用量

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + i \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) B_b(q) + C(q) \right].$$
(23.A.22)

在 $B_a(q) = 0$ 的特殊情况(并不常见)下,这简化成

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + C(q) \right].$$
(23.A.23)

因此在这一情况下,出现在这个路径积分中的"拉格朗日量"等同于将哈密顿量中的p表示成q和q后 它在闵可夫斯基时空中的样子.

附录B 同伦群表

这个附录给出了各种流形的同伦群列表.^[40]. 这里*Z*代表整数群,它的群乘法定义为整数加法,这使得零是它的单位元. 另外, *Z*_n是整数模n群. 只有0元构成的平庸群记为0. 流形直积的同伦群可以通过对流形本身的同伦群做直积获得:

$$\pi_n(\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2) = \pi_n(\mathscr{M}_1) \times \pi_n(\mathscr{M}_2) .$$

球面

$$\begin{aligned} \pi_n(S_m) &= 0 \qquad \text{对于} \quad n < m \\ \pi_n(S_n) &= Z \\ \pi_{n+1}(S_n) &= Z_2 \qquad 例 \land \quad \pi_2(S_1) = 0; \quad \pi_3(S_2) = Z \\ \pi_{n+2}(S_n) &= Z_2 \qquad 例 \land \quad \pi_3(S_1) = 0 \\ \pi_{n+3}(S_n) &= Z_{24} \qquad 例 \land \quad \pi_4(S_1) = 0; \quad \pi_5(S_2) = Z_2; \quad \pi_6(S_3) = Z_{12}; \\ \pi_7(S_4) &= Z \times Z_{12} \\ \pi_n(S_1) &= 0 \qquad \qquad \end{pmatrix} \land \quad \pi_1(S_1) = Z \end{aligned}$$

Lie群流形

$$\pi_{1}(G) = \begin{cases} Z & G = U(1) \\ Z_{2} & G = SO(n) \ (n \ge 3) \\ 0 & \text{ 其它紧致连通单Lie群} \end{cases}$$

$$\pi_{2}(G) = 0 \qquad G \end{pmatrix} \text{ $G \basel{eq:gamma} G \basel{eq:gamma} G \basel{eq:gamma} G \begin{aligned} & & & & \\ \pi_{3}(G) = Z & & & & \\ G \begin{aligned} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & &$$

Bott周期定理

$$\pi_k(USp(2n)) = \begin{cases} Z & k = 3,7 \pmod{8} \\ Z_2 & k = 4,5 \pmod{8} \\ 0 & k = 0,1,2,6 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\pi_k(SO(n)) = \begin{cases} Z & k = 3,7 \pmod{8} \\ Z_2 & k = 0,1 \pmod{8} \\ 0 & k = 2,4,5,6 \pmod{8} \end{cases}$$

当 $n \ge (k+1)2, k \ge 2$ 时,

$$\pi_k(SU(n)) = \begin{cases} Z & k 为奇数\\ 0 & k 为偶数 \end{cases}$$

陪集空间

对于任意的Lie群G和Lie子群 $H \subset G$,

$$\pi_2(G/H) = \ker \left\{ \pi_1(H) \mapsto \pi_1(G) \right\}.$$

即, 当H嵌入到G中时, $\pi_2(G/H)$ 是 $\pi_1(H)$ 中映射到 $\pi_1(G)$ 的平庸元的子群. 一个特殊情况是

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$$
 $\forall \exists \pi_1(G) = 0.$

习题

1. 在4维欧几里得时空中,为了使得Goldstone玻色场拥有让作用量稳定的拓扑不平庸场构形,我 们需要给它的作用量加入哪类项?

2. 考察六维时空中的一个标量场论,它的拉格朗日量有手征对称性SU(2) × SU(2),而这个对称 性又自发破缺到同位旋SU(2). 假定我们在拉格朗日量中加入足够的高阶导数项使得斯格明子 是稳定的. 这些斯格明子会服从哪类守恒律?(提示:注意到,我们在2.7节证明了SU(2)在拓扑上 与S₃相同.)

3. 证明, 当n > 1时, 任意流形 \mathcal{M} 的 $\pi_n(\mathcal{M})$ 都是阿贝尔的.

4. 在SU(4)规范理论中, 缠绕数为1的瞬子贡献对耦合常数的依赖关系是什么?

5. 在m_u, m_d和m_s都很小的情况下, 推导出轴子的质量公式.

考察实标量场φ的理论, 设它的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2}m^{2}\phi^{2} - \frac{1}{4}\lambda\phi^{4} - g\phi ,$$

其中 m^2 和 λ 都是正数, 而g很小. 计算亚稳真空态衰变速率中的指数压低因子exp(-B), 并将其写 成 m^2 , λ 和g的形式.

参考文献

- A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz and Yu. S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59B**, 85 (1975).
- [2] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79, 276 (1974); A. M. Polyakov, JETP. Letters 20, 194 (1974).
- [3] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London A260, 127 (1961).
- [4] H. Nielsen and P. Oleson, Nucl. Phys. B61, 45 (1973).
- [5] Ya. B. Zel'dovich, I. Yu. Kobzarev, and L. B. Okun', Sov. Phys. JETP 40, 2 (1975).
- [6] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D15**, 2929 (1977); C. G. Callan and S. Coleman, *Phys. Rev.* **D16**, 1762 (1977). 23.8节的讨论基于这些文献. 关于破缺对性区域构造的早期工作, 参看T. D. Lee and G. C. Wick, *Phys. Rev.* **D9**, 2291 (1974); M. B. Voloshin, I. Yu. Kobzarev, and L. B. Okun', *Sov. J. Nucl. Phys.* **20**, 644 (1975).
- [7] S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B262**, 263 (1985); T. D. Lee and Y. Pang, *Phys. Rep.* **221**, 251 (1992), 以及李政道和其合作者引用的参考文献.
- [8] 关于这些专题的一个清晰易懂的综述以及绝大多数原始质量的参考文献,参看S. Coleman, Aspects of Symmetry (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): Chapters 6 and 7. E.
 J. Weinberg给了一个很好的更加现代的综述, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 42, 177 (1992).
- [9] G. H. Derrick, J. Math. Phys. 5, 1252 (1964).
- [10] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).

- [11] 在研究早期宇称的对称性破缺时, T. W. B. Kibble就已经使用了同伦论, J. Phys. A9, 1387 (1976); A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects (Cambridge University Press, Cambridge, 1994), 以及那里引用的文献.
- [12] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* 28, 1494 (1972).
- [13] J. Arafune, P. G. O. Freund, and C. J. Goebel, J. Math. Phys. 16, 433 (1975).
- [14] M. K. Prasad and C. M. Sommerfeld, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).
- [15] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.* **D11**, 276 (1974); **D13**, 819 (1976).
- [16] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A133, 60 (1934); Phys. Rev. 74, 817 (1948).
- [17] Ya. B. Zel'dovich and M. Yu. Khlopov, Phys. Lett. **79B**, 239 (1978); J. Preskill, Phys. Rev. Lett. **43**, 1365 (1979). 综述可参看, J. Preskill, Annual Rev. Nucl. Part. Science **34**, 461 (1984).
- [18] 可参看, S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972): Chapter 15.
- [19] A. Guth, Phys. Rev. D23, 347 (1981); A. D. Linde, Phys. Lett. 108B, 389 (1982); A. Albrecht and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).
- [20] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* D13, 3398 (1976).
- [21] V. A. Rubakov, JETP Lett. 33, 644 (1981); Nucl. Phys. B212, 391 (1982); C. G. Callan, Phys. Rev. D25, 2141 (1982); Phys. Rev. D26, 2058 (1982); Nucl. Phys. B212, 391 (1982).
- [22] R. Bott, Bull. Soc. Math France 84, 251 (1956).
- [23] G. 't Hooft, Phys. Rev. D14, 3432 (1976); Phys. Rep. 142, 357 (1986).
- [24] M. Atiyah and R. Ward, Commun. Math. Phys. 55, 117 (1977).
- [25] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976). 这里所用的方法找出无反常的守恒流, 而't Hooft对 选择定则的推导基于对Dirac算符零模的分析(参看23.7节), 对于缠绕数给定的瞬子, 这给出 了每个量子数的变化.
- [26] C. G. Callan, R. F. Dashen, and D. J. Gross, *Phys. Lett.* **63B**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172 (1976).
- [27] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **155B**, 36 (1985). 主导这个跃迁的是称为滑子(sphalerons)^h的场构形; 参看N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D28**, 2019 (1983); F. R. Klinkhammer and N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D30**, 2212 (1984); R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10**, 4138 (1974).

^hspharleron取自希腊语 $\sigma\alpha\lambda\varepsilon\rho\delta\zeta$,意为不稳定的,易滑落的,由于这种构形一般处在电弱时的鞍点上,所以在这里翻译成滑子. ——译者注.

- [28] H. Georgi and I. McArthur, 未发表(1981); D. B. Kaplan and A. V. Manohar, *Phys. Rev. Lett.* 56, 2004 (1986); K. Choi, *Nucl. Phys.* B383, 58 (1992).
- [29] 关于细致的计算,参看V. Baluni, *Phys. Rev.* D19, 2227 (1978); R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, *Phys. Lett.* 88B, 123 (1979).
- [30] R. D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. 38, 1440 (1977); Phys. Rev. D16, 1791 (1977).
- [31] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 40, 223 (1978); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 40, 279 (1978).
- [32] J. E. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979); M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B166**, 493 (1980); A. R. Zhitnitsky, *Sov. J. Nucl. Phys.* **31**, 260 (1980); M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, *Phys. Lett.* **104B**, 199 (1981).
- [33] S. Weinberg, in *Neutrinos '78*, E. C. Fowler编辑(Purdue, Lafayette, 1978).
- [34] D. A. Dicus, E. W. Kolb, V. I. Teplitz, and R. V. Wagoner, *Phys. Rev.* D18, 1829 (1978);
 D22, 839 (1980).
- [35] 关于综述,参看M. S. Turner, Phys. Rept. 197, 67 (1990); G. G. Raffelt, Phys. Rept. 198, 1 (1990).
- [36] J. Preskill, M. B. Wise, and F. Wilczek, *Phys. Lett.* **120B**, 127 (1983); L. F. Abbott and P. Sikivie, *Phys. Lett.* **120B**, 127 (1983); M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett.* **120B**, 137 (1983). 关于综述, 参看J. E. Kim, *Phys. Rep.* **150**, 1 (1987); M. S. Turner, *Phys. Rep.* **197**, 68 (1990).
- [37] S. Coleman, V. Glaser, and A. Martin, Commun. Math. Phys. 58, 211 (1978).
- [38] S. Coleman, 参考文献[8], Section 6.2.
- [39] S. Coleman, 参考文献[8], Section 6.5.
- [40] A. Actor, Rev. Mod. Phys. 51, 461 (1979); Encyclopedic Dictionary of Mathematics (MIT Press, Cambridge, 1980): Appendix A.